

## 7. Energii și forțe în câmpuri electromagnetice

### 7.1 Teorema energiei electrice

Un sistem de  $n$  corpuri conductoare aflate la potențialele  $V_1, V_2 \dots V_n$  și încărcate cu sarcinile  $q_1, q_2 \dots q_n$  creează în jurul lor un câmp electric cu un anumit spectru, câmp care înmagazinează în el o cantitate de energie electrică  $W_e$ :

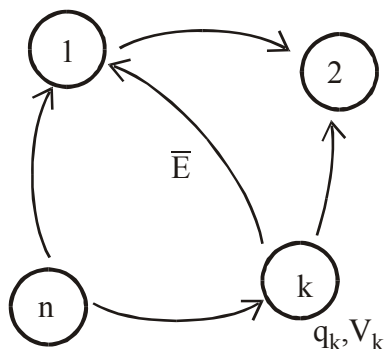


Fig. 7.1

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k V_k \quad (7.1)$$

energie care depinde de toate sarcinile și potențialele corpurilor din sistem, valoare egală cu lucrul mecanic cheltuit pentru încărcarea corpurilor cu sarcină.

Dimensional relația (7.1) înseamnă:  
 $[W_e] = [q] \cdot [V] = CV = AV \text{ sec} = W \text{ sec} = J$ .

Pentru un condensator ( $q_1 = -q_2 = q$ ) relația (7.1) devine:

$$W_e = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2 = \frac{1}{2} q (V_1 - V_2) = \frac{1}{2} q U = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{q^2}{2C} \quad (7.2)$$

Expresia  $\left( \frac{1}{2} C U^2 \right)$  o utilizăm pentru condensatoare cuplate la tensiunea  $U$

iar  $\left( \frac{q^2}{2C} \right)$  pentru condensatoare decuplate dar care au rămas încărcate cu sarcina  $q$ .

Ținând seama de prima formă a relațiilor lui Maxwell:

$V_k = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} q_j$ , relația funcționalei de energie (7.1) se scrie sub forma :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} q_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} q_k q_j = f_1(\text{geometria corpurilor}, \epsilon, q_1 \dots q_n) \quad (7.3)$$

Dacă ținem seama de a doua formă a relațiilor lui Maxwell:  $q_k = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} V_j$ ,

funcționala de energie (7.1) se va exprima sub forma:

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} V_k V_j = f_2(\text{ geometria corpurilor, } \epsilon, V_1, V_2 \dots V_n) \quad (7.4)$$

În expresia (7.3) trebuie cunoscute sarcinile de pe toate corpurile din sistem, în (7.4) trebuie cunoscute potențialele tuturor corpurilor și generalizând, putem afirma că energia electrică se poate evalua dacă pentru o parte dintre corpuri se cunosc sarcinile iar pentru celelalte se cunosc potențialele:

$$W_e = f_3(\text{ geometria corpurilor, } \epsilon, q_1, q_2 \dots q_k, V_{k+1} \dots V_n) \quad (7.5)$$

Expresiile (7.3), (7.4), (7.5) exprimă însă energia electrică într-un mod impropriu. Ea este localizată în câmpul electric dintre corpuri, deci ar trebui exprimată în funcție de parametrii câmpului electric.

La un condensator plan, între armături se creează un câmp electric uniform de intensitate  $E=U/d$  și energia electrică se va repartiza uniform în acest câmp.

$$W_e = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon A}{d} (E^2 d^2) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 (A d) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \cdot V_{\text{dielectric}} \quad (7.6)$$

Densitatea de energie electrică se scrie sub forma:

$$w'_e = \frac{W_e}{V_{\text{dielectric}}} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \left[ \frac{j}{m^3} \right] \quad (7.7)$$

În câmpuri neuniforme densitatea de energie electrică se scrie succesiv sub forma:

$$w'_e = \frac{dW_e}{dV} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon} = \frac{ED}{2} = \frac{\overline{ED}}{2} \left[ \frac{j}{m^3} \right] \quad (7.8)$$

Integrând densitatea de energie (7.8) pe volumul  $\mathcal{V}_\Sigma$  determinăm câtă energie electrică există în volumul delimitat de suprafața  $\Sigma$ :

$$W_{e\Sigma} = \int_{\mathcal{V}_\Sigma} w'_e dv = \int_{\mathcal{V}_\Sigma} \frac{\overline{DE}}{2} dv \quad (7.9)$$

Cu expresiile (7.3), (7.4) și (7.5) putem determina *energia electrică totală* a unui sistem, fără a putea aprecia cum se repartizează ea în spațiu, unde este mai concentrată, etc.

Dacă extindem volumul  $\mathcal{V}_\Sigma$  din (7.9) la  $\mathcal{V}_\infty$ , putem obține energia electrică totală la fel cu formele anterioare:

$$W_{e\text{total}} = \int_{V_\infty} \frac{\overline{DE}}{2} dv \quad (7.10)$$

Dimensional densitatea de energie electrică se exprimă astfel:

$$[w'_e] = \left[ \frac{1}{2} \epsilon E^2 \right] = \frac{F}{m} \frac{V^2}{m^2} = \frac{CV}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

Mai mult, expresiile (7.1), (7.3), (7.4) și (7.5) sunt valabile doar în regim electrostatic, când câmpul electric este produs de un sistem de corpuri încărcate, pe când expresiile (7.9), (7.10) sunt valabile în orice regim de funcționare, chiar și în câmpuri electrice variabile.

Expresia  $w'_e = \frac{DE}{2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{D^2}{2\epsilon}$  este valabilă doar în medii

izotrope iar expresia  $w'_e = \frac{\overline{DE}}{2}$  este valabilă și în medii anizotrope, dar liniare.

## 7.2 Teorema energiei magnetice

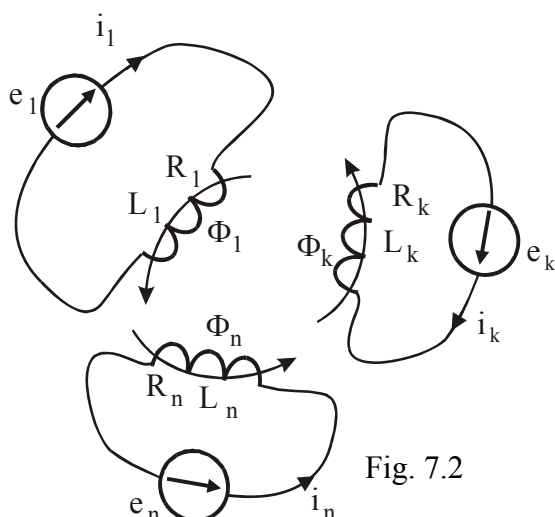


Fig. 7.2

Un sistem de n circuite aflate în prezență sunt alimentate de sursele  $e_1, e_2 \dots e_n$  cu curenții  $i_1, i_2 \dots i_n$  și se creează prin suprafețele lor fluxurile totale  $\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_n$ . În câmpul magnetic creat în jurul acestui sistem de circuite se înmagazinează energie magnetică a cărei expresie:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_k i_k \quad (7.11)$$

pune în evidență faptul că ea depinde de fluxurile și curenții din circuitele sistemului. Dimensional relația (7.11) înseamnă:

$$[W_m] = [\Phi][i] = \text{Wb} \cdot \text{A} = \text{A} \cdot \text{V sec} = \text{J}$$

Exprimând fluxurile magnetice totale  $\Phi_k$  cu prima formă a relațiilor lui Maxwell:  $\Phi_k = \sum_{j=1}^n L_{kj} i_j$ , funcționala energiei magnetice devine:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj} i_k i_j = f_1(\text{geometria circuitelor}, \mu, i_1, i_2 \dots i_n) \quad (7.12)$$

Dacă exprimăm curenții din (7.11) cu forma a doua a relațiilor lui Maxwell, pentru sisteme de circuite:  $i_k = \sum_{j=1}^n \Gamma_{kj} \Phi_j$ , se obține expresia:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \Gamma_{kj} \Phi_k \Phi_j = f_2(\text{geometria circuitelor}, \mu, \Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_n) \quad (7.13)$$

În (7.12) pe lângă geometria circuitelor și  $\mu_{\text{mediu}}$  trebuie cunoscuți toți curenții iar în (7.13) toate fluxurile magnetice. Generalizând, funcționala de energie este determinată dacă pentru o parte dintre circuitele sistemului se cunosc curenții și pentru celelalte se cunosc fluxurile totale:

$$W_m = f_3(\text{geometria circuitelor}, \mu, i_1, i_2 \dots i_k, \Phi_{k+1} \dots \Phi_n) \quad (7.14)$$

Pentru o bobină de inductivitate  $L$  parcursă de curentul  $i$ , fluxul magnetic total este  $\Phi = L \cdot i$  iar energia din câmpul propriu este:

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (7.15)$$

Pentru un sistem format din două circuite cuplate magnetic, energia magnetică cu (7.12) este:

$$W_m = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 + \frac{1}{2} L_{12} i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_{21} i_2 i_1 + \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 \quad (7.16)$$

unde:

$$\begin{cases} W_{m_1} = \frac{1}{2} L_{11} i_1^2 & \text{-este energia din câmpul propriu al bobinei 1} \\ W_{m_2} = \frac{1}{2} L_{22} i_2^2 & \text{-este energia din câmpul propriu al bobinei 2} \\ W_{m_{12}} = L_{12} i_1 i_2 & \text{-este energia magnetică de interacțiune dintre bobinele } L_1 \text{ și } L_2 \end{cases}$$

Energia magnetică de interacțiune dintre cele două bobine se poate scrie astfel:

$$W_{m12} = i_1 \Phi_{12} = i_2 \Phi_{21} = i_1 i_2 L_{12} \quad (7.17)$$

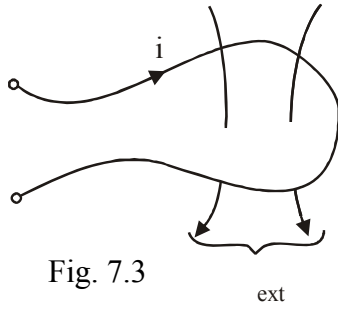


Fig. 7.3

Dacă avem un singur circuit plasat într-un câmp magnetic exterior, astfel că  $\Phi_{\text{ext}}$  este fluxul acestui câmp prin suprafața circuitului, atunci conform (7.17) energia de interacțiune dintre circuit și câmpul exterior este:

$$W_{\text{inter}} = i \cdot \Phi_{\text{ext}} \quad (7.18)$$

Formele (7.11)...(7.16) ale funcționalei de energie magnetică exprimă energia în funcție de mărimile ce caracterizează circuitele componente, deși ea este localizată în câmpul magnetic din jurul circuitelor. Pentru un solenoid (cu câmp magnetic uniform (vezi relația (6.79)) energia magnetică este:

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu N^2 A}{l} i^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{N^2 \cdot i^2}{l^2} (Al) = \frac{1}{2} \mu H^2 v \quad (7.19)$$

și ea se repartizează uniform în câmpul magnetic cu densitatea:

$$w'_m = \frac{W_m}{v} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (7.20)$$

sau generalizând și pentru medii anizotrope (și câmpuri neuniforme) se obține:

$$w'_m = \frac{dW_m}{dv} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{BH}{2} = \frac{\overline{BH}}{2} \quad (7.21)$$

Dimensional, densitatea de energie magnetică înseamnă:

$$[w'_m] = \left[ \frac{1}{2} \mu H^2 \right] = \frac{H}{m} \left( \frac{A}{m} \right)^2 = \frac{Wb \cdot A}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

În general, în medii neliniare, densitatea de energie magnetică înseamnă:

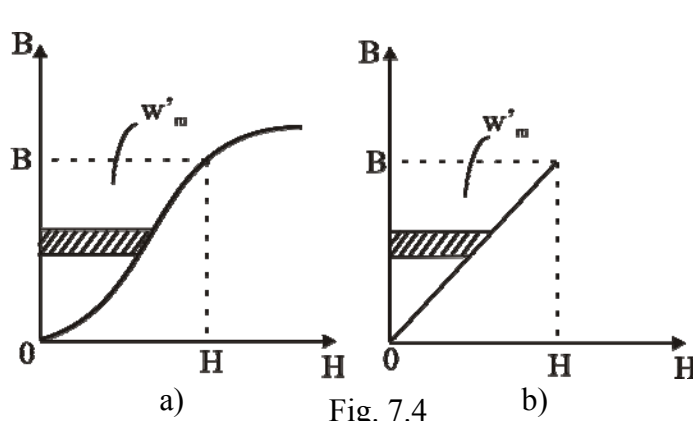


Fig. 7.4

$$w'_m = \int_0^B \overline{H} d\overline{B} \quad (7.22)$$

și are semnificația ariei de pe caracteristica neliniară din figura 7.4.

Pentru medii liniare:  $\overline{B} = \mu \overline{H}$  și se obține din fig 7.4-b:

$$w'_m = \int_0^B \overline{H} d\overline{B} = \int_0^H \mu \overline{H} d\overline{H} = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (7.23)$$

În funcție de potențialul magnetic  $A$ , densitatea de energie este:  $w'_m = \frac{1}{2} \overline{J} \overline{A}$ .

Energia magnetică parțială, conținută în volumul  $v_\Sigma$ , sau cea totală din volumul  $v_\infty$  vor avea expresiile:

$$W_{m\Sigma} = \int_{v_\Sigma} \frac{\overline{B}\overline{H}}{2} dv; \quad W_{m\infty} = \int_{v_\infty} \frac{\overline{B}\overline{H}}{2} dv \quad (7.24)$$

Energia totală calculată cu (7.24) coincide cu cea calculată cu (7.11)...(7.16) care tot energiile totale exprimă, fără însă a indica cum se repartizează ea în spațiu. De asemenea, formele (7.11)...(7.16) sunt valabile în regim staționar sau cvasistaționar (joasă frecvență) iar (7.24) sunt valabile în orice regim de funcționare.

*Observație:* Pentru un sistem de circuite cuplate energia magnetică dată de (7.12) se scrie sub forma:

$$\begin{cases} W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \underbrace{L_{kj} i_j}_{\Phi_{kj}} i_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \Phi_{kj} i_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_k i_k \\ \Phi_k = \sum_{j=1}^n L_{kj} i_j \end{cases} \quad (7.25)$$

Funcționalele  $W_m(\Phi_k, i_k)$  și  $\Phi_k(L_{kj}, i_k)$  au dependențe liniare, deci:

$$L_{kj} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial i_j} = \frac{\partial}{\partial i_j} \left( \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) = \frac{\partial}{\partial i_k} \left( \frac{\partial W_m}{\partial i_j} \right) = \frac{\partial \Phi_j}{\partial i_k} = L_{jk} \quad (7.26)$$

Relația (7.26) exprimă faptul că în medii liniare inductivitățile mutuale dintre două circuite din sistem verifică *teorema reciprocității pentru inductivități* ( $L_{kj} = L_{jk}$ ), respectiv matricea  $[L]$  pentru un sistem de circuite cuplate este simetrică în raport cu diagonala principală.

### 7.3 Teorema energiei electromagnetice

Această teoremă este o consecință a ecuațiilor lui Maxwell bazată pe concepția despre câmpul electromagnetic considerat ca un sistem fizic capabil să schimbe, să acumuleze și să transmită energie.

Într-un mediu liniar ( $\varepsilon = ct, \mu = ct$ ) considerăm o suprafață închisă  $\Sigma$  în interiorul căreia se găsesc corpuri imobile ( $\vec{v} = 0$ , deci nu se cheltuie

energie pentru deplasarea lor) în interacțiune cu câmpul electromagnetic. În domeniul  $V_\Sigma$  câmpul electromagnetic are înmagazinată energia:

$$W = \int_{V_\Sigma} \left( \frac{\overline{DE}}{2} + \frac{\overline{BH}}{2} \right) dv \quad (7.27)$$

Bazat pe principiul de conservare a energiei, viteza de scădere a acestei energii trebuie să fie egală cu suma puterilor cedate de câmpul interior altor sisteme fizice cu care este în contact. Dar câmpul interior este în contact direct doar cu corpurile interioare, cărora le transferă energie pentru a acoperi pierderile de putere prin efect Joule ( $P_j$ ) și cu domeniul din exteriorul suprafeței  $\Sigma$ , deci:

$$-\frac{dW}{dt} = P_j + P_\Sigma \quad (7.28)$$

unde:  $P_j = \int_{V_\Sigma} \overline{E} \cdot \overline{J} dv$  sunt pierderile de putere prin efect Joule iar  $P_\Sigma$  este

puterea cedată prin suprafața  $\Sigma$  câmpului exterior. Ținând seama de identitatea:

$$\text{div}(\overline{H} \times \overline{E}) = \nabla \cdot (\overline{H} \times \overline{E}) = \nabla \cdot (\overline{H} \times \overline{E}) + \nabla \cdot (\overline{H} \times \overline{E}) = \overline{E} \cdot \text{rot} \overline{H} - \overline{H} \cdot \text{rot} \overline{E} \quad (7.29)$$

pierderile locale de putere prin efect Joule se scriu succesiv sub forma:

$$\begin{aligned} p_j &= \overline{E} \cdot \overline{J} = \overline{E} \cdot \left( \text{rot} \overline{H} - \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \right) = \text{div}(\overline{H} \times \overline{E}) + \overline{H} \cdot \text{rot} \overline{E} - \overline{E} \cdot \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} = \text{div}(\overline{H} \times \overline{E}) - \left( \overline{H} \cdot \frac{\partial \overline{B}}{\partial t} + \overline{E} \cdot \frac{\partial \overline{D}}{\partial t} \right) = \\ &= \text{div}(\overline{H} \times \overline{E}) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\overline{DE}}{2} + \frac{\overline{BH}}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.30)$$

Integrând expresia (7.30) pe volumul  $V_\Sigma$  se obține:

$$\underbrace{\int_{V_\Sigma} p_j dv}_{P_j} = \underbrace{\int_{V_\Sigma} \text{div}(\overline{H} \times \overline{E}) dv}_{-P_\Sigma} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\Sigma} \left( \frac{\overline{DE}}{2} + \frac{\overline{BH}}{2} \right) dv}_{-\frac{\partial W}{\partial t}} \quad (7.31)$$

Comparat cu ecuația de bilanț al puterilor (7.28), integralele din (7.31) au semnificațiile notate sub fiecare dintre ele.

Puterea transmisă (radiată) de câmpul electromagnetic interior prin suprafața  $\Sigma$  spre exterior are expresia:

$$P_\Sigma = \int_{V_\Sigma} \text{div}(\overline{E} \times \overline{H}) dv = \int_{\Sigma} (\overline{E} \times \overline{H}) \cdot \overline{ds} = \int_{\Sigma} \overline{S} \cdot \overline{ds} \quad (7.32)$$

unde:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$  reprezintă *vectorul Poynting* sau *densitatea de putere* ce se transmite prin câmpul electromagnetic. Dimensional verifică semnificația sa:

$$[\vec{S}] = [\vec{E}] \cdot [\vec{H}] = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}.$$

Expresia (7.32) a puterii ce iese prin  $\Sigma$  se generalizează și pentru puteri ce se transmit printr-o suprafață deschisă  $S_\Gamma$ :

$$P_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \vec{S} \cdot d\vec{s} = \int_{S_\Gamma} \vec{S} \cdot \vec{n} \, ds \quad (7.33)$$

Sensul arbitrar ales pentru  $d\vec{s}$  (respectiv  $\vec{n}$ ) este *sensul de referință* pentru puterea ce se transmite; dacă rezultă  $P_{S_\Gamma} > 0$  înseamnă ca energia se transmite efectiv în sensul lui  $\vec{n}$ .

### 7.3.1 Puterea electromagnetică transmisă printr-o undă plană

Considerăm o undă plană, ca în figura 4.3 caracterizată (relația 4.38) prin mărimile:

$$\vec{E} = \vec{j} E_y; \quad \vec{H} = \vec{k} H_z = \vec{k} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y \leftrightarrow \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \leftrightarrow w'_e = w'_m \quad (7.34)$$

Se constată că în cazul unei plane transmisia energiei prin câmp are două proprietăți speciale:

- Energia electromagnetică se repartizează egal între componenta electrică și cea magnetică a unei electromagnetice ( $w'_e = w'_m$ ).

Densitatea de energie a unei electromagnetice este:

$$w' = \frac{\vec{D} \cdot \vec{E}}{2} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = \epsilon E^2 = \mu H^2 = 2w'_e = 2w'_m \quad (7.35)$$

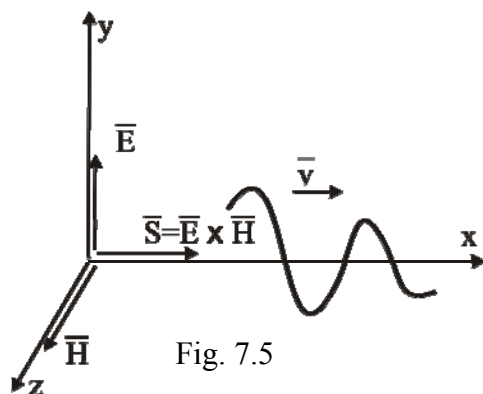


Fig. 7.5

- Vectorul Poynting este dirijat în direcția de propagare a undei

electromagnetice:  $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{i} S_x = \vec{i} S$ .



$$S = EH = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 = \frac{\varepsilon E^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = v \cdot w' \quad (7.36)$$

Modulul densității de putere radiată (transmisă)  $S$  este egal cu produsul dintre densitatea de energie a undei ( $w'$ ) și viteza de fază a undei ( $v$ ).

Totul se petrece ca și cum unda ar „transporta” energia localizată în câmpul său, pe măsură ce ea înaintază pe direcția de propagare (Ox) cu viteza sa de fază ( $v$ ).

Această proprietate nu este generală, energia se transmite prin câmp și în absența undelor (câmpuri desprinse de circuitul radiant), de exemplu în regimuri staționare (cvasistaționare) prin fire (linii de transmisie).

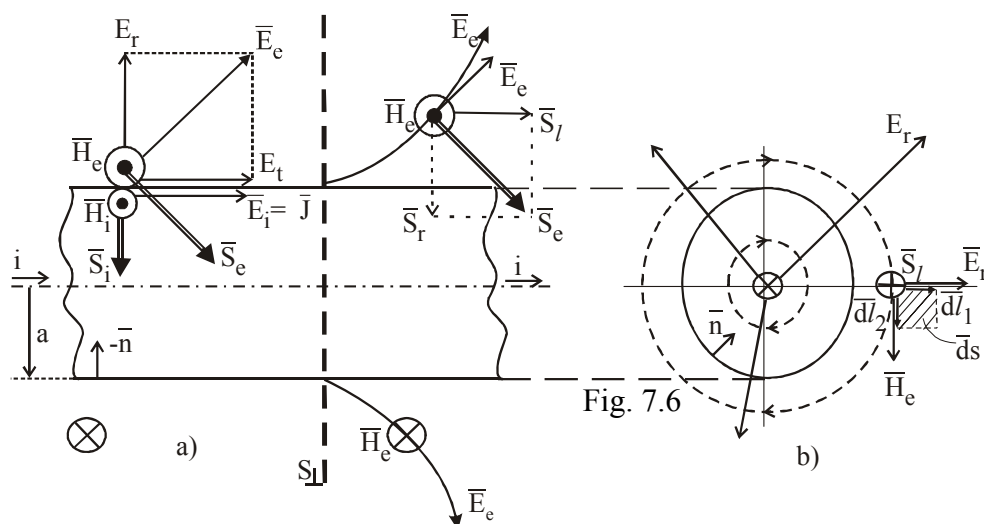
În general, pentru ca un câmp să transmită energie, el trebuie să fie *electromagnetic*, adică  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  să nu fie independenți, să fie variabile în timp, nu numai ca ele să coexiste în aceeași regiune a spațiului; (de exemplu:  $\vec{E}$  creat de sarcini electrice și  $\vec{H}$  creat de un magnet permanent, suprapuse nu înseamnă câmp electromagnetic).

### 7.3.2 Puterea electromagnetică transmisă printr-un conductor

Considerăm un conductor rectiliniu, de formă cilindrică cu raza  $a$ , lungime  $l$ , care are rezistivitatea  $\rho$  și e parcurs de curentul de conducție  $i$ .

Liniile câmpurilor  $\vec{E}$  și  $\vec{H}$  create de acest fir (în interiorul și exteriorul firului) arată ca în figura 7.6.

În interiorul conductorului, liniile câmpului electric sunt paralele cu



axa:  $\bar{E}_{\text{int}} = \rho \bar{J}$  iar liniile lui  $\bar{H}_i$  sunt cercuri concentrice cu firul. În consecință în interiorul firului, vectorul Poynting:  $\bar{S}_i = \bar{E}_i \times \bar{H}_i = -\bar{u}_r S_i$ .

El este dirijat spre axă și asigură fluxul de energie necesară pentru a acoperi pierderile Joule din fir.

În exterior ( $r > a$ ), liniile lui  $\bar{H}_e$  rămân tot cercuri (figura 7.6) iar liniile lui  $\bar{E}_e$  ies din conductor înclinate în direcția liniilor de curent  $\bar{J}$

(la suprafața firului se conservă componenta tangențială a lui  $\bar{E}$  :

$E_i = E_t = (E_e)_{\text{tg}}$ . Componenta radială  $E_r$  corespunde potențialului  $V$  la care

se află firul:  $V = -\int_{\infty}^a E_r dr$ .

Vectorul Poynting, în exterior,  $\bar{S}_e$  are o componentă *longitudinală*  $\bar{S}_l$  care asigură transmisia energiei în lungul conductorului și alta *radială*  $\bar{S}_r$  care asigură fluxul de energie spre interiorul firului, pe direcție radială. Vom arăta că fluxul acestei componente prin suprafața laterală a firului ( $r=a$ ) acoperă pierderile Joule din fir:

$$P_r = \int_{S_{\text{lat}}} \bar{S}_r \cdot d\bar{s} = \int_{S_{\text{lat}}} (\bar{E}_t \times \bar{H}) \cdot d\bar{s} = \int_{S_{\text{lat}}} E_t H_{\phi} ds = E_{t_0} H_0 2\pi a l = \quad (7.37)$$

$$= \rho J \frac{i}{2a\pi} 2\pi a l = \frac{\rho l}{\pi a^2} i^2 = R_{\text{fir}} i^2$$

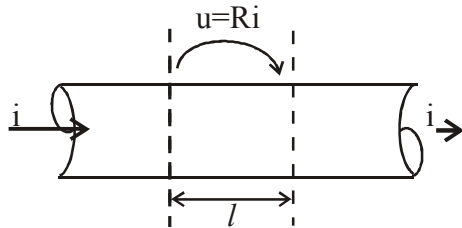


Fig. 7.7

Câmpul magnetic pe suprafața firului este:  $H_0 = \frac{i}{2\pi a}$  iar câmpul electric în interiorul firului este:  $E_i = E_t = \rho J$ . Pentru un tronson de lungime  $l$  avem:

$$E_t \cdot l = u = R \cdot i \quad (7.38)$$

unde  $R$  este rezistența tronsonului de conductor considerat (figura 7.7);

Deci:  $P_r = ui = Ri^2$ .

Puterea care se transmite în lungul conductorului prin suprafața  $S_{\perp}$  din figura 7.6 are expresia:

$$P_l = \int_{S_{\perp}} \bar{S}_l \cdot d\bar{s} = \int_{S_{\perp}} (\bar{E}_r \times \bar{H}) \cdot d\bar{s} = \int_{\Gamma_1 \Gamma_2} \oint (\bar{E}_r \times \bar{H}) (d\bar{l}_1 \times d\bar{l}_2) = \underbrace{\int_{\Gamma_1} \bar{E}_r \cdot d\bar{l}_1}_u \cdot \underbrace{\oint_{\Gamma_2} \bar{H} \cdot d\bar{l}_2}_i = u \cdot i \quad (7.39)$$

deoarece vectorii  $\vec{H}$  și de  $d\vec{l}_1$ , respectiv  $\vec{E}_r$  și  $d\vec{l}_2$  sunt perpendiculari între ei (figura 7.6-b) și produsele acestora s-au anulat.

Puterea  $P_l$  se transmite în lungul firului printr-o suprafață  $S_\perp$  infinit extinsă și perpendiculară pe axa firului.

În procesul de conducție printr-un fir, energia se transmite doar prin câmpul din exteriorul conductorului, singurul care are componentă longitudinală  $\vec{S}_l$  a vectorului Poynting: conductorul are doar rolul de a ghida în spațiu această transmisie(traseul) și pentru aceasta absoarbe din energia câmpului exterior o putere  $P_r$  necesară pentru a-și acoperi pierderile interioare prin efect electrocaloric.

Starea(câmpul) electromagnetică se propagă odată cu cuplarea firului (alimentarea sa), prin câmpul din jurul său, cu viteza  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  și acolo unde

ajunge, o parte din energia sa pătrunde în conductor, pune în mișcare ordonată sarcinile(electronii liberi se propagă prin conductor lent, cu o viteză de ordinul mm/sec). Deci nu electronii liberi, care se mișcă ordonat printr-un conductor parcurs de curent, transmit energia în lungul firului, ci câmpul electromagnetic din jurul acestuia, de aceea energia se poate propaga și fără fire conductoare, numai prin câmp electromagnetic (undă); energia se transmite fie în lungul firului, fie în lungul direcției de propagare a undei.

În cazul unei linii bifilare (figura 7.8) cu fir de dus și întors, (1 și 2)

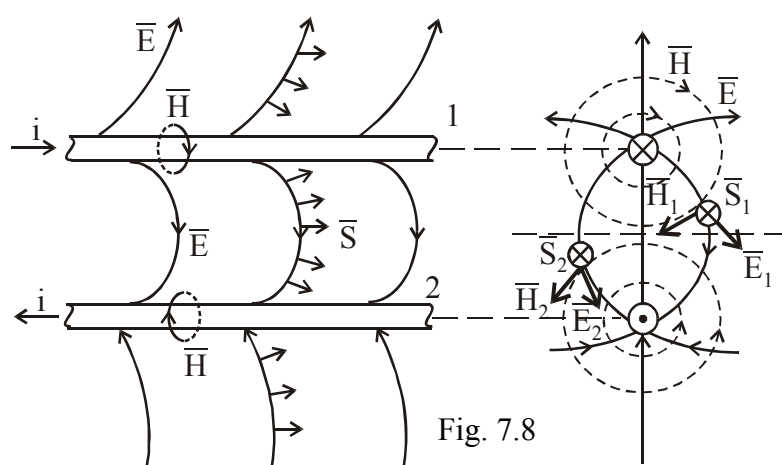


Fig. 7.8

indiferent de sensul curentului, energia este transmisă de ambele fire ale liniei în același sens, spre receptor.

*Observație:*  
Dacă puterea

transmisă printr-un fir este:  $P = V_{\text{fir}} \cdot i$  iar printr-o linie bifilară este:  $P = ui$  atunci, așa cum se prezintă în teoria circuitelor, puterea ce intră pe la bornele unui multipol cu  $n$  poli

este:  $P = \sum_{k=1}^n V_k i_k$  iar puterea ce intră pe la bornele unui multiport cu  $m$  porți este:

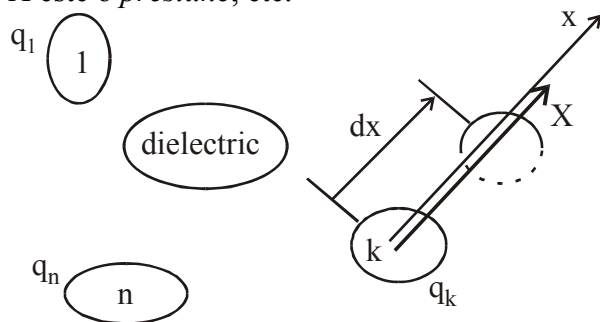
$$P = \sum_{k=1}^m u_k i_k.$$

Din acest motiv studiul energetic al multor dispozitive electronice se poate reduce, punând în evidență doar legăturile dintre tensiuni (potențiale) și curenții ce intră prin porți (poli), fără a fi întotdeauna nevoie a se cunoaște detaliat procesele din interior.

## 7.4 Teoremele forțelor generalizate (lagragiene) în câmp electric

Configurația geometrică a unui sistem de corpuri este caracterizată printr-un număr de parametri de poziție; dacă un corp se poate mișca după câteva coordonate, al căror număr este *numărul gradelor de libertate* ale corpului respectiv, atunci aceste coordonate poartă numele generic de *coordonate generalizate*.

Forța care asigură deplasarea corpului după coordonata generalizată  $x$  poartă numele de *forță generalizată*  $X$ . Dacă  $x$  este o *deplasare liniară* atunci  $X$  este componenta unei *forțe* în lungul acelei deplasări; dacă  $x$  este un *unghi de rotație*, atunci  $X$  este un *moment (cuplu)* în raport cu axul de rotație; dacă  $x$  este o *arie*,  $X$  este o *tensiune superficială*; dacă  $x$  este *volum*,  $X$  este o *presiune*, etc.



Considerăm un sistem de  $n$  corpuri conductoare (figura 7.9) aflate în prezență, încărcate cu sarcinile  $q_1, q_2 \dots q_n$ .

Dacă unul dintre corpurile conductoare (de exemplu corpul  $k$ ),

Fig. 7.9

sau un bloc dielectric dintre corpuri, se poate deplasa după coordonata  $x$  sub acțiunea forței electrice  $X$  exercitată de câmp, atunci la o deplasare a corpului  $k$  cu  $dx$ , sarcinile tuturor corpurilor din sistem se modifică cu câte  $dq_k$  (ele sunt conectate la surse de potențiale  $V_1 \dots V_n$ ).

Energia primită în acest interval de la surse:  $\sum_{k=1}^n V_k dq_k$  trebuie să acopere atât creșterea energiei câmpului electric ( $dW_e$ ) cât și lucrul mecanic efectuat de câmp pentru a schimba poziția corpului  $k$  ( $dL = Xdx$ ), respectiv:

$$\sum_{k=1}^n V_k dq_k = dW_e + Xdx \quad (7.40)$$

Ecuția (7.40) de bilanț energetic este o ecuație diferențială multivariabilă, care se poate integra doar în stări particulare. Să presupunem stările:

a) pe timpul deplasării corpului  $k$ , toate corpurile sunt deconectate de la surse, deci sarcinile lor rămân constante ( $q_k = ct \rightarrow dq_k = 0$ ) și din (7.40) rămâne:

$$(dW_e)_{q=ct} = -Xdx \rightarrow X = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_{q=ct} \quad (7.41)$$

Expresia (7.41) reprezintă *prima teoremă a forțelor generalizate* în câmp electric. Semnul (-) arată că pentru deplasarea corpului se cheltuie energie din energia acumulată în câmpul sistemului, deci duce la micșorarea acestei energii.

b) pe timpul deplasării corpului  $k$ , toate corpurile rămân conectate la sursele de tensiune constantă (potențialele lor  $V_k = ct \rightarrow dV_k = 0$ ). La schimbarea configurației geometrice a sistemului, variază capacitățile dintre conductoare și deoarece  $V_k = ct$ , se vor modifica sarcinile lor cu  $dq_k$ :

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k q_k \rightarrow (dW_e)_{V_k=ct} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n q_k \underbrace{dV_k}_{=0}$$

$$(7.40) \rightarrow (dW_e)_{V_k=ct} = Xdx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n V_k dq_k \Rightarrow X = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_{V_k=ct} \quad (7.42)$$

Expresia (7.42) reprezintă *teorema a doua a forțelor generalizate* în câmp electric. Aportul de energie de la surse:  $\sum_{k=1}^n V_k dq_k$  este dublu față de creșterea energiei electrice a sistemului și se împarte egal între creșterea energiei ( $dW_e$ ) și lucrul mecanic  $dL=Xdx$  efectuat de forțele electrice.

Cele două expresii (7.41) și (7.42) ale forțelor generalizate sunt echivalente și dau același rezultat: forța nu depinde de modul în care decurge procesul energetic la punerea corpurilor în mișcare. Descompunerea în cele două ipoteze ( $q=ct$ ,  $V=ct$ ) servește numai la calculul forței, în general pe timpul mișcării unui corp din sistem se pot modifica și sarcinile și potențialele.

Energia electrică a sistemului este o funcțională care depinde de sarcinile sistemului și de coeficienții de potențial( care și ei depind de geometria sistemului, respectiv de coordonatele generalizate, al căror număr

este egal cu numărul gradelor de libertate:  $x_1, x_2 \dots x_p$ , dacă există  $p$  grade de libertate). Deci:

$$W_e = W_e(q_1, q_2 \dots q_n, x_1, x_2 \dots x_p) \rightarrow dW_e = \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_e}{\partial q_k} \underbrace{dq_k}_{=0} + \sum_{k=1}^p \frac{\partial W_e}{\partial x_k} dx_k$$

Sau

$$W_e = W_e(V_1, V_2 \dots V_n, x_1, x_2 \dots x_p) \rightarrow dW_e = \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_e}{\partial V_k} \underbrace{dV_k}_{=0} + \sum_{k=1}^p \frac{\partial W_e}{\partial x_k} dx_k$$

Pentru a calcula forța generalizată cu prima teoremă (7.41) energia se scrie sub forma (7.43), punându-se în evidență parametrii constanți  $q_k = ct$  și

$X_k = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right)_q$  iar pentru a calcula cu teorema a doua (7.42), energia se va

scrie sub forma (7.44) și-n acest caz forța care determină o mișcare după coordonata  $x_k$  va fi:  $X_k = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x_k}\right)_v$ .

Pentru un condensator la care una dintre armături (sau un strat dielectric) este deplasabil, forța generalizată ce acționează asupra corpului mobil este:

$$\begin{cases} X = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_q = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q^2}{2C} \right) = -\frac{q^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{C} \right) = \frac{q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial C}{\partial x} \\ X = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_u = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} C u^2 \right) = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial C}{\partial x} \end{cases} \quad (7.45)$$

deci rezultatul este același, indiferent de teoremă, forța depinde de variația capacității  $C$  în funcție de gradul de libertate  $x$ ,  $\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)$ . Întotdeauna se

consideră corpul mobil într-o poziție intermediară ( $x$ ) și se calculează capacitatea sistemului  $C(x)$  și apoi forța cu (7.45).

- Indiferent de teorema utilizată pentru calculul forței generalizate  $X$ , dacă a rezultat  $X > 0$  înseamnă că forța  $X$  duce la *creșterea coordonatei* generalizate  $x$  iar dacă  $X < 0$  ea va duce la *micșorarea coordonatei*  $x$ .
- Forțele generalizate  $X$  sunt forțe rezultante ce acționează asupra corpurilor aflate în câmp electric. Corpurile se presupun rigide (nedeformabile) pe timpul deplasării, forța  $X$  este concentrată în

centrul de greutate al corpului. Se poate arăta că această forță se distribuie asupra substanței corpului pe tot volumul său ca o stare de presiune sau numai pe suprafața lor ca o tensiune superficială. Numai dacă se cunoaște distribuția forțelor electrice (magnetice) asupra unui corp se poate face un calcul de dimensionare a corpului ca să reziste solicitării. Forțele generalizate  $X$  ne permit să studiem mișcarea corpurilor și care sunt tendințele de mișcare a unui corp într-un câmp electric.

### 7.5 Teoremele forțelor generalizate în câmp magnetic

Și în câmp magnetic, la fel ca în câmp electric, putem determina forța rezultantă care o exercită câmpul magnetic asupra unui circuit dintr-un ansamblu de  $n$  circuite sau asupra unei armături feromagnetice.

Energia magnetică a sistemului de circuite se poate exprima în funcție de fluxurile sau curenții din circuite și în funcție de geometria sistemului (gradele de libertate  $x_1, x_2, \dots, x_p$  dacă sistemul prezintă  $p$  grade de libertate). Forța generalizată se calculează separat pentru fiecare coordonată generalizată din cele  $p$ .

$$W_m = W_m(i_1, i_2, \dots, i_n, x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (7.46)$$

$$W_m = W_m(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (7.47)$$

La mișcarea circuitului  $j$  cu  $dx_j$  se modifică fluxurile cu câte  $d\Phi_k$ . Energia suplimentară absorbită de la surse trebuie să acopere variația energiei magnetice a sistemului ( $dW_m$ ) și lucrul mecanic necesar pentru a mișca circuitul:  $dL = X dx$  :

$$\sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k = dW_m + \sum_{j=1}^p X_j dx_j \quad (7.48)$$

Și ecuația de bilanț energetic (7.48) este o ecuație diferențială multivariabilă, pe care o integrăm în stări particulare:

- a) pe timpul deplasării circuitului  $j$  cu  $dx_j$ , fluxurile prin suprafețele circuitelor rămân constante:  $\Phi_k = ct \rightarrow d\Phi_k = 0$  și din ecuația de bilanț (7.48) rămâne:

$$\left. \begin{aligned} (dW_m)_{\Phi_k=ct} &= -\sum_{j=1}^p X_j dx_j \\ (7.47) \rightarrow (dW_m)_{\Phi_k=ct} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial \Phi_k} \underbrace{d\Phi_k}_{=0} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial W_m}{\partial x_j} dx_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_j = -\left( \frac{\partial W_m}{\partial x_j} \right)_{\Phi_k=ct} \quad (7.49)$$

Expresia (7.49) este *prima teoremă a forțelor generalizate* în câmp magnetic. Dacă  $\Phi_k = ct$ , nu pot exista fenomene de inducție electromagnetică, deci nu există schimb de energie între circuite și câmp și în acest caz lucrul mecanic pentru deplasarea corpului  $j$  se efectuează pe seama rezervei de energie existentă în câmpul magnetic, deci duce la scăderea acestei energii (așa se explică (-) din 7.49).

Identificând (7.48) cu (7.49) rezultă:  $i_k = \frac{\partial W_m}{\partial \Phi_k}$ , respectiv  $\Phi_k = \frac{\partial W_m}{\partial i_k}$ .

- b) considerăm că pe timpul deplasării circuitului  $j$  nu se modifică curenții din circuite ( $i_k = ct$ ):

$$\left. \begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_k i_k \rightarrow (dW_m)_{i_k=ct} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_k \underbrace{di_k}_{=0} \\ (7.48) \rightarrow (dW_m)_{i_k=ct} &= \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k - \sum_{j=1}^p X_j dx_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} (dW_m)_{i_k} &= \sum_{j=1}^p X_j dx_j = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n i_k d\Phi_k \\ (7.46) \rightarrow (dW_m)_{i_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \underbrace{di_k}_{=0} + \sum_{j=1}^p \frac{\partial W_m}{\partial x_j} dx_j \end{aligned} \right\} \Rightarrow X_j = \left( \frac{\partial W_m}{\partial x_j} \right)_{i_k=ct} \quad (7.50)$$

Expresia (7.50) este *teorema a doua a forțelor generalizate* în câmp magnetic. Pentru a calcula forța magnetică generalizată cu (7.49) funcționala de energie magnetică trebuie scrisă sub forma (7.47) ca funcție de parametrii constanți ( $\Phi_k$ ) și coordonatele generalizate iar pentru a putea calcula cu (7.50) energia  $W_m$  trebuie scrisă sub forma (7.46). În general, la mișcarea unui circuit pot varia simultan atât fluxurile cât și curenții, cele două ipostaze rămân doar ipoteze de calcul.



Pentru o bobină, energia magnetică este de forma:  
 $W_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{\Phi^2}{2L}$ , iar forța ce se exercită asupra bobinei sau asupra unui miez magnetic, calculată cu cele două teoreme este de forma:

$$\left. \begin{aligned} X_m &= -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_\Phi = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Phi^2}{2L}\right) = -\frac{\Phi^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{L}\right) = \frac{\Phi^2}{2L^2} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \\ (7.50): X_m &= \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} Li^2\right) = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \end{aligned} \right\} (7.51)$$

deci rezultatul nu depinde de teorema utilizată. Trebuie evaluată expresia inductivității  $L$  a bobinei atunci când armătura se află într-o poziție intermediară  $x$ , se calculează  $\frac{\partial L}{\partial x}$  și cu (7.51) putem afla forța ce se exercită asupra ei.

- Forța generalizată în câmp electric  $X_e = \frac{\partial}{\partial x} W_e(q, V, x)$  și cea din câmp magnetic  $X_m = \frac{\partial}{\partial x} W_m(i, \Phi, x)$  pot fi interpretate ca o viteză de variație a funcționalei de energie electrică  $W_e$  sau magnetică  $W_m$ ; forțele care provin din variația (derivata) unor funcționale de energie, poartă numele, în mecanică, de *forțe lagragiene*.
- *Echilibrul mecanic* al sistemului de circuite se obține acolo unde forța  $F_{rez} = 0$  (nu va exista deplasare) sau momentul  $M_{rez} = 0$  (nu va exista rotație), deci în general când  $X=0$ , condiție echivalentă cu  $\frac{\partial W_e}{\partial x} = 0$  respectiv  $\frac{\partial W_m}{\partial x} = 0$ . Aceasta înseamnă însă un punct de extrem al funcționalei de energie electrică ( $W_e$ ) sau magnetică ( $W_m$ ).

În mecanica newtoniană punctele de echilibru corespund unor minime ale funcționalei de energie (corpurile obțin echilibru prin cădere, oprire din mișcare, etc); la fel și în alte sisteme (termice), toate sunt *sisteme disipatoare*. În câmp electric și magnetic sistemele găsesc echilibru în punctele de maxim ale funcționalei de energie  $W_e$  sau  $W_m$ ; ele sunt *sisteme acaparatoare* dacă sunt cuplate la surse.

$$\left. \begin{aligned} X_e = 0 &\leftrightarrow \frac{\partial W_e}{\partial x} = 0 \rightarrow \begin{cases} (W_e)_{\min} \text{ sisteme decuplate} \\ (W_e)_{\max} \text{ sisteme cuplate la surse} \end{cases} \\ X_m = 0 &\leftrightarrow \frac{\partial W_m}{\partial x} = 0 \rightarrow (W_m)_{\max} \text{ circuite cuplate la surse} \end{aligned} \right\} \quad (7.52)$$

Este de altfel evident că un sistem electric astfel acționează asupra corpurilor încât să crească capacitatea electrică  $C$  a sistemului:

$$C_{\max} \rightarrow \begin{cases} \text{decuplat: } (W_e)_{\min} = \frac{q^2}{2C} \\ \text{cuplat: } (W_e)_{\max} = \frac{1}{2} C u^2 \end{cases}$$

Un sistem magnetic acționează în sensul creșterii inductivității  $L$  a sistemului, ceea ce înseamnă  $L_{\max} \rightarrow (W_m)_{\max} = \frac{1}{2} L i^2$ .

**Observații:** 1. Forțele ce se exercită prin intermediul câmpului magnetic, în funcție de mărimile care interacționează, au următoarele denumiri:

- **forțe electrodinamice:** forțe ce se exercită între două circuite (sau bobine) parcurse de curenți (forțe de tip Ampère).
- **forțe electromagnetice:** forțe ce le exercită un circuit parcurs de curent asupra unui corp magnetic (armătură); de exemplu forța de atracție a unui miez în interiorul unei bobine
- **forțe magnetoelectrice** (forțe de tip Laplace): forța cu care un câmp magnetic exterior de inducție  $\vec{B}_{\text{ext}}$  acționează asupra unui circuit parcurs de curent sau interacțiunea dintre câmpul magnetic inductor și curentul indus.
- **forțe magnetostatice:** interacțiunea dintre doi magneți permanenți.
- **forțe magnetice** (de tip Lorentz): forța cu care un câmp  $\vec{B}$  acționează asupra particulelor încărcate cu sarcină când se mișcă în interiorul câmpului magnetic.

2. Forțele pe care le exercită câmpul electric sau magnetic asupra corpurilor se distribuie cu o densitate de volum asupra substanței corpului. Densitățile de volum ale forței electrice, respectiv magnetice au expresiile ( $\tau$  - densitatea de masă):

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{f}_{ev} &= \rho_v \vec{E} - \frac{1}{2} E^2 \text{grad} \epsilon + \frac{1}{2} \text{grad} \left( E^2 \frac{d\epsilon}{d\tau} \right) \\ \vec{f}_{mv} &= (\vec{j} \times \vec{B}) - \frac{1}{2} H^2 \text{grad} \mu + \frac{1}{2} \text{grad} \left( H^2 \frac{d\mu}{d\tau} \right) \end{aligned} \right. \quad (7.53)$$

Termenii care apar în (7.53) se interpretează ca fiind diferite forme de acțiune a câmpului electromagnetic asupra corpurilor.

- $(\rho_v \bar{E})$  - densitatea forței exercitate de câmpul exterior  $\bar{E}$  asupra corpurilor încărcate cu sarcină  $\rho_v$ . Forța rezultantă este  $\bar{F} = \int_{V_{corp}} \rho_v \bar{E} dv \xrightarrow{V \ll} \bar{F} = q\bar{E}$ .  
O sarcină nu interacționează cu propriul câmp electric.
- $(\bar{J} \times \bar{B})$  - densitatea forței exercitate de câmpul exterior  $\bar{B}$  asupra corpurilor parcurse de curent  $\bar{J}$ . Forța rezultantă este:  $\bar{F} = \int_{V_{cond}} (\bar{J} \times \bar{B}) dv = i \oint_{\Gamma} (d\bar{l} \times \bar{B})$  - forța de tip Laplace. Un curent  $\bar{J}$  nu interacționează cu propriul său câmp magnetic, în mediu omogen.
- $\left(-\frac{1}{2} E^2 \text{grad } \epsilon\right)$  și  $\left(-\frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu\right)$  - densitățile forțelor datorate neomogenităților permitivității  $\epsilon$  și permeabilității  $\mu$ . Cum  $(-\text{grad } \epsilon)$  are sensul scăderii lui  $\epsilon$ , aceste forțe sunt îndreptate dinspre regiunile cu  $\epsilon$  mare spre cele cu  $\epsilon$  mic; la fel și componenta magnetică de la  $\mu$  mare, la  $\mu$  mic.
- $\left[\frac{1}{2} \text{grad} \left(E^2 \frac{d\epsilon}{d\tau}\right)\right]$  și  $\left[\frac{1}{2} \text{grad} \left(H^2 \frac{d\mu}{d\tau}\right)\right]$  - densitățile forțelor de *electrostricțiune* și *magnetostricțiune*; aceste forțe solicită local materialul creând tensiuni interne și deformații mecanice interne, dar aduc o contribuție nulă la forța rezultantă ce se exercită asupra unui corp plasat în aer (vid).

3. Forțele electrice și cele magnetice sunt  $X_e = \frac{dW_e}{dx}$ ;  $X_m = \frac{dW_m}{dx}$  și la aceeași deplasare  $dx$ , forțele vor fi egale dacă  $dW_e = dW_m$ . La aceleași dimensiuni geometrice, dispozitivul electric și cel magnetic trebuie să aibă aceeași densitate de energie:

$$w'_e = w'_m \rightarrow \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \rightarrow \frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$$

Dacă în câmp magnetic se poate concentra până la o inducție având  $B \approx 1T$ , în câmp electric va fi nevoie de un câmp având  $E \approx 3 \cdot 10^8 V/m$ , câmp la care toate materialele sunt străpunse.

Deci câmpul magnetic este capabil să concentreze în volum mic energii și forțe mari, motiv pentru care majoritatea dispozitivelor electromagnetice (mașini electrice, contactoare, electromagneți, etc) acționează prin intermediul câmpului magnetic. Dispozitivele magnetice au volum mic dar greutate mare, din cauza miezurilor magnetice utilizate. Interacțiunea prin câmp electric necesită suprafețe active mari ale corpurilor, chiar dacă greutatea lor n-ar fi prea mari, dar ar trebui alimentate cu tensiuni înalte.

## 7.6 Aplicații

1. Să se determine forța ce se exercită asupra unui bloc dielectric de permitivitate  $\varepsilon$  introdus între armăturile unui condensator plan ca în figura 7.10.

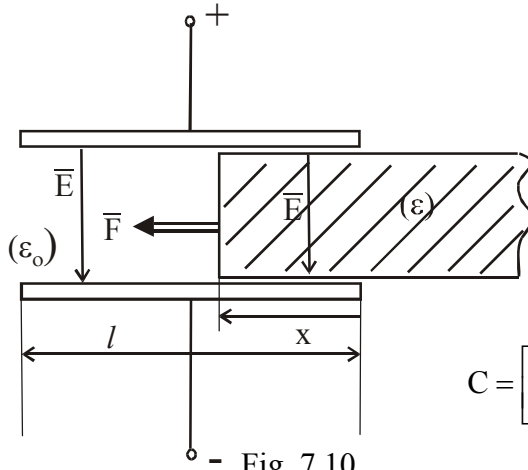


Fig. 7.10

Armăturile condensatorului au aria  $A=hl$  iar blocul dielectric îl presupunem introdus parțial pe distanța  $x$  și studiem ce se întâmplă cu el. În această poziție capacitatea electrică a condensatorului este:

$$C = \left[ \varepsilon_0 \frac{h(l-x)}{d} + \varepsilon \frac{hx}{d} \right] \quad (7.54)$$

a) Admitem condensatorul încărcat cu  $\pm q_0$  și decuplat de la sursă:

( $W_e = \frac{q_0^2}{2C}$ ). Cum coordonata  $x$  este o deplasare liniară, forța generalizată

$X_e$  este o forță  $F$  pe direcția coordonatei  $x$ :

$$X_e = F = - \left( \frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_q = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_0^2}{2C} \right) = \frac{q_0^2 h}{2d} \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\left[ \varepsilon_0 \frac{h(l-x)}{d} + \varepsilon \frac{hx}{d} \right]^2} > 0 \quad (7.55)$$

Cum  $F > 0$ , ea va duce la creșterea lui  $x$ , deci atragerea blocului dielectric între armături; aceasta duce la creșterea capacității  $C$  iar energia

$W_e = \frac{q_0^2}{2C}$  va scădea. Echilibrul se obține pentru un  $(W_e)_{\min} = \frac{q_0^2}{2C_{\max}}$ ;

blocul intră complet între armături iar dacă lungimea sa este mai mică decât  $l$ , el se va opri în zona centrală a condensatorului.

b) Admitem condensatorul cuplat la o sursă de tensiune  $U$ ; energia sistemului este  $W_e = \frac{1}{2}CU^2$  iar forța o calculăm astfel:

$$X_e = F = \left( \frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_U = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2}CU^2 \right) = \frac{1}{2}U^2 \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}U^2 \frac{h}{d}(\varepsilon - \varepsilon_0) > 0 \quad (7.56)$$

Expresia (7.56) este aceeași cu expresia (7.55).

Cum întotdeauna  $\varepsilon > \varepsilon_0$  forța este (+), deci duce la creșterea coordonatei  $x$  și va atrage blocul între armături. Creșterea lui  $C$  duce la  $(W_e)_{\max} = \frac{1}{2} C_{\max} U^2$  și în acest caz (sistem cuplat la sursă) echilibrul se realizează într-un maxim al funcționalei de energie. În ambele situații, sistemul duce la  $C_{\max}$ .

2. Să se determine forța pe care o exercită o bobină cilindrică cu  $N$  spire asupra unui miez magnetic cu permeabilitatea  $\mu$  (figura 7.11).

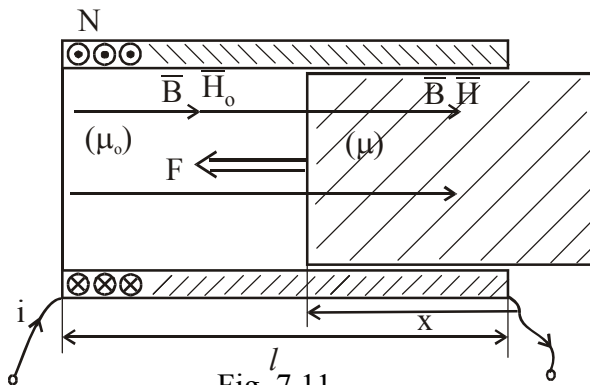


Fig. 7.11

Admitem că blocul cu permeabilitatea  $\mu$  este introdus parțial pe distanța  $x$  și studiem ce forță va exercita câmpul magnetic asupra sa. Privind bobina ca o bobină cu miez, scriem inductivitatea sa sub forma:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{\frac{l-x}{\mu_0 A} + \frac{x}{\mu A}} = \frac{N^2 \mu_0 A}{l-x \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right)} \quad (7.57)$$

Aici nu putem considera că avem două bobine în serie (cum în problema precedentă erau două condensatoare în paralel), fiindcă bobina cu aer de lungime  $(l-x)$  este cuplată magnetic cu cea având lungimea  $x$ , deci  $L \neq L_1 + L_0$ .

Calculăm forța generalizată asupra miezului cu ambele teoreme ale forțelor generalizate:

$$\begin{cases} W_m = \frac{\Phi^2}{2L} \rightarrow X_m = F = -\left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_\Phi = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Phi^2}{2L}\right) = \frac{\Phi^2}{2L^2} \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} \\ W_m = \frac{1}{2} L i^2 \rightarrow X_m = F = \left(\frac{\partial W_m}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{L^2 i^2}{2N^2 \mu_0 A} \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) \end{cases} \quad (7.58)$$

Dacă  $\mu > \mu_0$  ( $\mu_r > 1$ ) atunci  $F > 0$  și duce la creșterea lui  $x$ , respectiv creșterea lui  $L$  iar  $W_m$  tinde spre un maxim.

Dacă  $\mu < \mu_0$  ( $\mu_r < 1$ , material diamagnetic) atunci  $F < 0$ , duce la scăderea lui  $x$ , blocul este respins afară de către bobină și aceasta duce la creșterea lui  $L$  și  $W_m$  tot spre maxim tinde (maximul se atinge la  $x=0$ ).

### 3. Forța portantă a unui electromagnet

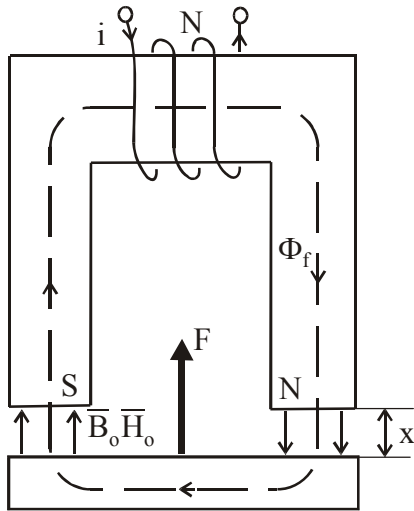


Fig. 7.12

Bobina fiind așezată pe un miez magnetic, inductivitatea bobinei o vom evalua în funcție de reluctanța miezului:

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2}{R_{mf} + R_{mo}} = \frac{N^2}{\frac{l_f}{\mu A} + \frac{2x}{\mu_0 A}} = \frac{N^2 \mu_0 A}{\frac{l_f}{\mu_r} + 2x} \quad (7.59)$$

unde  $l_f$  este lungimea liniei mijlocii de flux prin miez (fier) și  $l_o = 2x$  este lungimea sa prin aer.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2 \frac{N^2 \mu_0 A}{\left( \frac{l_f}{\mu_r} + 2x \right)^2} = \frac{-2L^2}{N^2 \mu_0 A} < 0 \quad (7.60)$$

Forța de atracție dintre armături este:

$$F = \frac{i^2}{2} \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{L^2 i^2}{N^2 \mu_0 A} = -\frac{\Phi_f^2}{\mu_0 A} < 0 \quad (7.61)$$

Forța fiind (-), ea duce la scăderea coordonatei  $x$ , respectiv atragerea armăturii; forța fiind proporțională cu  $i^2$  rămâne forță de atracție indiferent

Un electromagnet format dintr-un miez magnetic de permeabilitate  $\mu$  și geometria din fig. 7.12 are o bobină cu  $N$  spire parcurse de curentul  $i$ .

Coordonata generalizată este distanța  $x$  dintre armătură și polii electromagnetului. Să se determine forța de atracție (forța portantă) asupra armăturii.

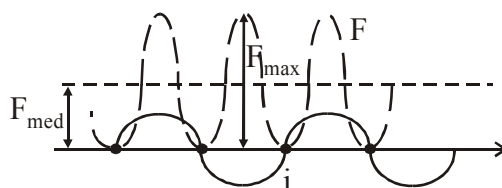
Conform cu relația (7.51) forța ce acționează asupra armăturii este:

$$X_m = F = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial x}.$$

de sensul curentului prin bobină. Dacă bobina este alimentată cu un curent sinusoidal  $i = I_m \sin \omega t$  forța va fi de forma:

$$F = F_{\max} \sin^2 \omega t, \text{ fiind o forță}$$

variabilă în timp cu o valoare medie ca în figura 7.13. Fig. 7.13



Forța este variabilă ca un  $\sin^2 \omega t$ , va produce o vibrație a armăturii pe frecvența ( $2\omega$ ). Pentru a elimina aceste vibrații există mai multe metode tehnice (electromagnet trifazat, ecranarea polului cu o spiră în scurtcircuit, etc.) toate variantele au în vedere eliminarea posibilităților ca forța să treacă prin zero, cum era în figura 7.13.

Forța specifică, raportată la unitatea de arie a polului, este:

$$f_s = \frac{|F|}{2A} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\Phi}{NA} \right)^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2} \mu_0 H_0^2 = w'_m \quad (7.62)$$

cu atât mai mare cu cât densitatea de energie magnetică a câmpului dintre poli și armătură este mai mare. Inducția magnetică pentru miezuri din tole are valori  $B \in (1, \dots, 1.5) \text{ T}$  iar pentru miezuri din ferite  $B \in (0.4 \dots 0.6) \text{ T}$ , admitem  $B \approx 1 \text{ T}$  și în acest caz forța specifică care se poate crea sub polul unui electromagnet este:

$$f_s = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{8\pi \cdot 10^{-7}} \approx 4 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2 = 4 \text{ atm.}$$

Forța de atracție (7.61) nu este constantă pe timpul mișcării, ea depinde de  $x$  ca în figura 7.14. Armătura este reținută la depărtarea maximă  $x_M$  de un resort elastic iar când este atrasă, depărtarea minimă este  $x_m \approx 0$ .

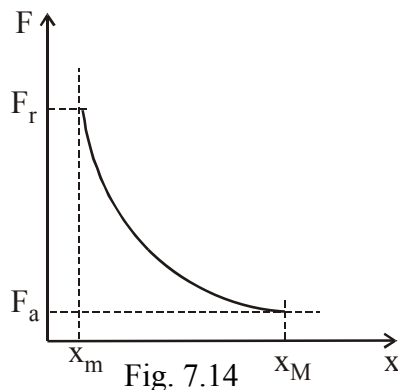


Fig. 7.14

Pentru  $x = x_M$  forța are valoarea  $F_a$  numită *forță de acționare*, care trebuie să fie suficientă pentru a pune în mișcare armătura (cu contactele mobile ale releului sau contactorului care sunt atașate de ea) iar la sfârșit forța este  $F_r$  numită *forță de reținere* (figura 7.14), capabilă să mențină armătura lipită de poli.

4. Într-un mediu omogen cu permitivitate  $\varepsilon$  se suprapun două câmpuri electrice  $\vec{E}_1$  și  $\vec{E}_2$  sub un unghi  $\alpha$ . Să se determine densitatea de energie  $w'_e$  a câmpului electric rezultat.

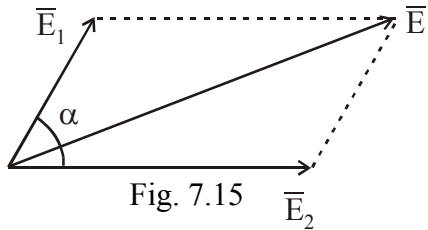


Fig. 7.15

Câmpurile se compun vectorial (figura 7.15):

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha$$

Densitatea de energie electrică a lui  $E$  este:

$$w'_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E_2^2 + \varepsilon E_1 E_2 \cos \alpha \quad (7.63)$$

$$\begin{cases} w'_{e1} = \frac{1}{2} \varepsilon E_1^2 & \text{- densitatea de energie dacă ar exista doar } \vec{E}_1 \\ w'_{e2} = \frac{1}{2} \varepsilon E_2^2 & \text{- densitatea de energie dacă ar exista doar } \vec{E}_2 \\ w'_{\text{inter.}} = \varepsilon E_1 E_2 \cos \alpha & \text{- densitatea energiei de interacțiune dintre cele două câmpuri } \vec{E}_1 \text{ și } \vec{E}_2 \end{cases}$$

Densitatea  $w'_{\text{inter}}$  este maximă dacă  $\alpha = 0$  sau  $\pi$  (câmpuri paralele sau antiparalele) și este nulă când câmpurile sunt ortogonale ( $\vec{E}_1 \perp \vec{E}_2$ ) și  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Se observă că  $w'_e \neq w'_{e1} + w'_{e2}$ , deci la compunerea câmpurilor energiile nu sunt aditive.

5. Să se determine parametrii  $L$  și  $C$  pentru o linie bifilară formată din două fire paralele de rază „a” aflate la distanța  $D$ . Ce forță se exercită între ele?

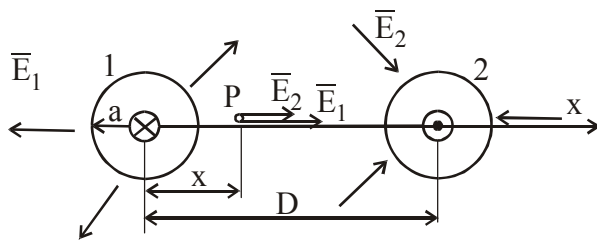


Fig. 7.16

a) Firul 1 este fir de dus iar firul 2 este fir de întors; în model electrostatic ele se consideră încărcate cu  $+\rho_l$ , respectiv  $-\rho_l$ .

Într-un punct  $P(x)$  din figura 7.16 câmpul electric are expresia:

$$E(x) = E_1 + E_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) \quad (7.64)$$



Tensiunea între cele două fire, calculată de-a lungul axei x, este:

$$U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^{D-a} \frac{q}{2\pi\epsilon l} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) dx = \frac{q}{\pi\epsilon l} \ln \frac{D-a}{a}$$

Cum  $D \gg a$ , capacitatea între cele două fire este:

$$C = \frac{q}{U} \approx \frac{\pi\epsilon l}{\ln \frac{D}{a}} \quad (7.65)$$

Energia electrică acumulată în câmpul electric dintre fire este  $W_e = \frac{1}{2}CU^2$ ; coordonata generalizată o considerăm distanța D, deci forța electrică ce se exercită între fire este:

$$F = \frac{\partial W_e}{\partial D} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial D} = -\frac{U^2}{2} \frac{\pi\epsilon l}{D \cdot \ln^2 \frac{D}{a}} < 0$$

Fiind forța negativă, ea ar duce la micșorarea lui D deci, atracție între fire.

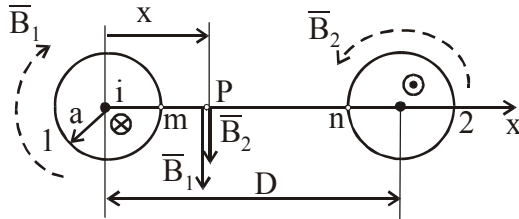


Fig. 7.17

b) Firul de dus 1 și cel de întors 2 parcurse de curentul i creează în jurul lor câmpurile magnetice  $\vec{B}_1$  și  $\vec{B}_2$ . Câmpul rezultat în punctul P(x) are expresia:

$$B(x) = B_1 + B_2 = \frac{\mu i}{2\pi} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{D-x} \right) \quad (7.66)$$

Fluxul exterior (prin suprafața cuprinsă între punctele m și n din figura 7.17 este:

$$\Phi_{\text{ext}} = \int_a^{D-a} B(x) l dx = \frac{\mu i l}{\pi} \ln \frac{D-a}{a} \rightarrow L \approx L_{\text{ext}} = \frac{\Phi_{\text{ext}}}{i} \cong \frac{\mu l}{\pi} \ln \frac{D}{a} \quad (7.67)$$

Forța magnetică ce se exercită între fire este:

$$F = \frac{\partial W_m}{\partial D} = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L}{\partial D} = \frac{1}{2} \frac{\mu i^2}{\pi D} > 0$$

Forța magnetică fiind (+) va duce la creșterea coordonatei D, deci firele se resping.

*Observație:* Dacă  $C_s$  și  $L_s$  sunt parametrii specifici ai liniei (pentru  $l=1\text{m}$ ), se observă că  $\sqrt{L_s C_s} = \sqrt{\epsilon \mu}$ , deci viteza de propagare a unei unde *electromagnetice* pe o linie bifilară este aceeași ca la propagarea unei unde printr-un mediu cu  $(\epsilon, \mu)$ , cum este cel din jurul liniei bifilare:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (7.68)$$