

8. Corpuri conductoare în câmpuri variabile

Câmpul electromagnetic în medii conductoare se studiază neglijând densitatea curentului de deplasare în raport cu densitatea curentului de conducție, în valori efective:

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_{\text{cond}} &= \sigma \bar{E} \rightarrow J_{\text{cond}_{\text{ef}}} = \sigma E \\ \bar{J}_{\text{depl}} &= \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \rightarrow J_{\text{depl}_{\text{ef}}} = \omega \varepsilon E \end{aligned} \right\} \rightarrow \omega \varepsilon \ll \sigma \longleftrightarrow \omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon} \simeq 10^{16} \quad (8.1)$$

respectiv ipoteza rămâne valabilă dacă frecvența undei electromagnetice (sau a curentului) îndeplinește condiția (8.1), condiție care pentru frecvențele care se pot produce în actualele condiții tehnice este îndeplinită; deci în medii conductoare se neglijează curentul de deplasare.

În regim staționar (cvasistaționar) liniile curentului se repartizează uniform pe secțiune ($J = \frac{i}{S} = \text{ct}$), circuitul este *filiform*. Ecuațiile satisfăcute de câmp în medii conductoare au forma (4.12) ecuații ale difuziei, respectiv:

$$\Delta \bar{H} = \sigma \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}; \quad \Delta \bar{E} = \sigma \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}; \quad \Delta \bar{J} = \sigma \mu \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} \dots \quad (8.2)$$

Soluția acestor ecuații pune în evidență “difuzia” câmpului electromagnetic într-o piesă conductoare, câmpul pătrunde și se amortizează pe măsură ce înaintază în grosimea piesei conductoare.

8.1 Pătrunderea câmpului electromagnetic în semispațiul conductor infinit extins

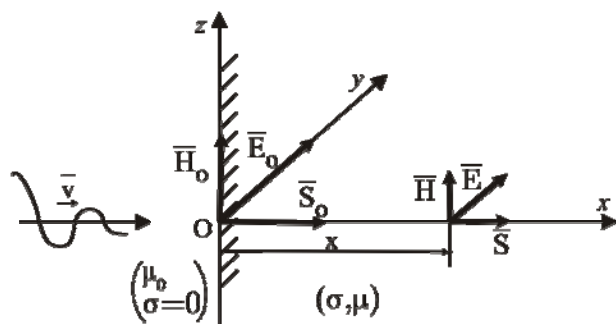


Fig 8.1

O undă plană având componentele $\bar{E} = \bar{j}E$ și $\bar{H} = \bar{k}H$ înaintază în lungul axei Ox și cade pe suprafața plană a unei piese conductoare considerată infinit extinsă și conținută în planul yOz. Valorile câmpului la intrare sunt \bar{E}_0 și \bar{H}_0 . Să studiem pătrunderea undei

magnetice în piesa conductoare. Partea magnetică a undei are la pătrundere componentele:

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{H}(x,t) = \bar{k}H_Z(x,t) \\ H_Z(0,t) = H_0(t) = H_{0m}\sin\omega t \end{cases} \quad (8.3)$$

În regim permanent sinusoidal ecuația difuziei (8.2) se transpune în complex sub forma:

$$\Delta \dot{\bar{H}} = \sigma\mu \frac{\partial \dot{\bar{H}}}{\partial t} \leftrightarrow \frac{d^2 \underline{H}_Z}{dx^2} = j\omega\sigma\mu \underline{H}_Z \leftrightarrow \frac{d^2 \underline{H}_Z}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{H}_Z \quad (8.4)$$

$$\text{unde: } \underline{\gamma}^2 = j\omega\sigma\mu \xrightarrow{\sqrt{j} = e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}} \underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}(1+j) = \alpha(1+j) \quad (8.5)$$

$\underline{\gamma} = \alpha + j\alpha$ este *constanta de propagare* a câmpului prin spațiul conductor; partea reală (α) este *constanta de atenuare* a câmpului [Np], iar partea imaginară (α) este *constanta de defazare* [rad] ($\underline{\gamma} = \alpha + j\alpha = \alpha\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}$)

Soluția ecuației (8.4) este de forma:

$$\underline{H}_Z = \underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x} = \underline{H}_0 e^{-\underline{\gamma}x} = \frac{H_{0m}}{\sqrt{2}} e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\alpha x} \quad (8.6)$$

unde am admis că piesa conductoare este infinită în lungul axei Ox, deci nu va exista undă reflectată (undă inversă), deci $\underline{A}_2 = 0$, iar condiția la limită este de tipul (8.3).

În valori instantanee, expresia undei magnetice (8.6) se scrie astfel:

$$H_Z(x,t) = H_{0m} e^{-\alpha x} \cdot \sin(\omega t - \alpha x) \quad (8.7)$$

Cum:

$$\bar{J} = \text{rot } \bar{H} \rightarrow \underline{J} = \underline{J}_y = - \frac{\partial \underline{H}_Z}{\partial x} = \underline{\gamma} \underline{H}_0 e^{-\underline{\gamma}x} = \alpha H_{0m} e^{-\alpha x} \cdot e^{-j(\alpha x - \frac{\pi}{4})} \quad (8.8)$$

$$J_y(x,t) = \sqrt{2}\alpha H_{0m} e^{-\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}) \quad (8.9)$$

Expresia undei electrice prin spațiul conductor este de forma :

$$E_y(x,t) = \rho J_y(x,t) = \left[\sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma} H_{0m} e^{-\alpha x} \right] \cdot \sin(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}) \quad (8.10)$$

respectiv $H_Z(x,t)$ este defazat în urma lui $E_y(x,t)$, așa cum \underline{I} este în urma lui \underline{U} la un circuit cu caracter inductiv.

Impedanța de undă a mediului conductor este :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{E}}{\underline{H}} = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sigma} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1+j) \quad (8.11)$$

Vectorul Poynting la intrarea în spațiul conductor are valoarea :

$$\bar{S}_0 = \frac{1}{2} (\bar{E}_0 \times \bar{H}_0^*) = \bar{i} \frac{1}{2} E_0 H_0^* = \bar{i} \sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma} H_{0m}^2 = \bar{i} S_0 \quad (8.12)$$

iar într-un punct la adâncimea x în interiorul conductorului (figura 8.1) va fi

$$\bar{S} = \frac{1}{2} (\bar{E} \times \bar{H}^*) = \bar{i} \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{H}^* = \bar{i} \sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma} H_{0m}^2 e^{-2\alpha x} = \bar{i} S \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} S_x(x,t) &= \sqrt{2} \frac{\alpha}{\sigma} H_{0m}^2 e^{-2\alpha x} \sin(\omega t - \alpha x) \cdot \sin(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}) = \\ &= \frac{\alpha}{\sigma} \frac{H_{0m}^2}{\sqrt{2}} e^{-2\alpha x} \left[\cos \frac{\pi}{4} - \cos \left(2\omega t - 2\alpha x + \frac{\pi}{4} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.14)$$

Valoarea medie a vectorului Poynting, la $x = 0$, este :

$$\overline{S_0(0,t)} = \frac{\alpha}{\sigma} \frac{H_{0m}^2}{2} = \frac{\alpha}{\sigma} H_0^2 \quad ; \quad \overline{S_x(x,t)} = \frac{\alpha}{\sigma} H_0^2 e^{-2\alpha x} \quad (8.15)$$

Puterea activă care pătrunde în spațiul conductor este :

$$P_0 = \overline{S_0(0,t)} \cdot A_{lat} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\sigma} H_{0m}^2 \cdot A_{lat} \quad (8.16)$$

iar curenții induși în spațiul conductor vor avea expresia :

$$J = J_y = \sqrt{2}\alpha H_{0m} e^{-\alpha x} \sin\left(\omega t - \alpha x + \frac{\pi}{4}\right) \quad ; \quad J_{0m} = \sqrt{2}\alpha H_{0m} \quad (8.17)$$

cu o repartitie pe axa Ox ca în figura 8.2.

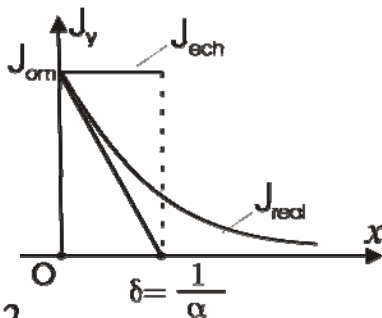


Fig 8.2

pe o adâncime $\delta = \frac{1}{\alpha}$ numită *adâncime de pătrundere*, aria de sub graficul

Atenuarea curenților induși este

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}, \text{ care este foarte pronunțată}$$

la frecvențe mari. La frecvențe înalte, funcția $J(x)$ fiind puternic amortizată, se admite că am avea un curent repartizat cu aceeași valoare ca la suprafața piesei conductoare (J_{0m})

real al funcției $J = J_{om}e^{-\alpha x}$ și cel al repartiției uniforme la suprafață ($J_{om} \cdot \delta$) are aceeași valoare.

8.2 Efectul de refulare

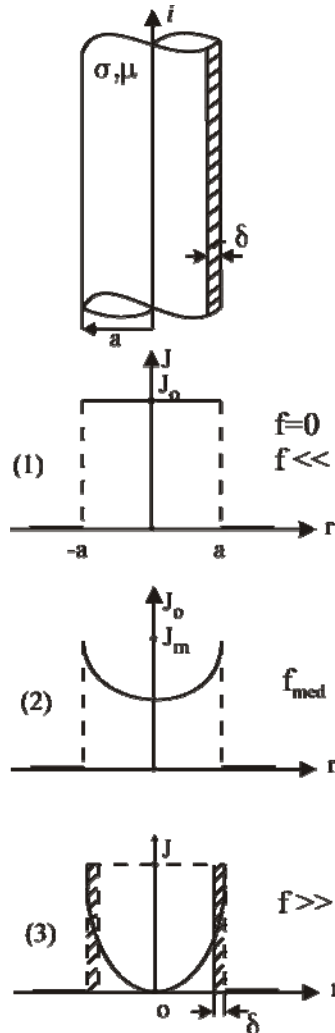


Fig 8.3

Un conductor cilindric cu parametrii constitutivi (σ, μ) este parcurs de un curent variabil $i = I_m \sin \omega t$.

Repartiția liniilor de curent pe secțiunea conductorului depinde în principal de frecvența curentului (ω) ca în figura 8.3. Există posibilitățile:

(1) dacă curentul este continuu ($\omega = 0$) sau de joasă frecvență, el se repartizează uniform pe secțiunea conductorului cu densitatea:

$$J_0 = \frac{i}{A} = \frac{i}{\pi a^2}, \text{ iar rezistența firului este: } R_0 = \frac{l}{\sigma A}.$$

(2) dacă frecvența este medie, repartiția curentului are loc după legea $J = J_m e^{-\alpha x}$, plecând de la suprafață spre interior. În centru densitatea curentului este mică iar rezistența firului crește, R_a se numește *rezistența în alternativă* a conductorului ($R_a > R_0$).

(3) dacă frecvența este mare, atenuarea lui J este pronunțată. Practic în centrul firului nu circulă curent, la suprafață densitatea este foarte mare, firul se încălzește puternic la exterior. Curentul îl putem considera concentrat într-o peliculă de grosime δ la suprafața sa ca în figura

8.3. De exemplu, dacă printr-un fir de cupru ($\sigma = 57 \cdot 10^6 \Omega^{-1}/m$) cu raza $a = 6 \text{ mm}$ trece un curent sinusoidal de frecvență $f = 2500 \text{ Hz}$, atunci raportul dintre densitatea de curent $J(r)$ și densitatea J_0 la o repartiție

uniformă ($\underline{J}_0 = \frac{I}{\pi a^2}$) considerată în centrul conductorului este:

$\frac{J}{J_0} = 0,804e^{-j68^\circ}$ iar la periferia conductorului ($r = a$) aceasta devine:

$\frac{J}{J_0} = 1,726e^{j37^\circ}$ (coeficientul de atenuare este $\alpha = 750$).

Cum $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu}}$, la $\omega \gg$, adâncimea de pătrundere (de refulare) δ va

fi foarte mică, curentul circulă doar pe pelicula de grosime δ (de unde numele de *efect pelicular* (*efect skin*)). Dacă $\delta \ll a$ se apreciază că avem un *efect pelicular pronunțat* (efect pelicular net). Contează deci și grosimea (raza a) a conductorului dar în principal contează frecvența.

O bară conductoare poate fi *filiformă* ($J \approx$ constant pe secțiune) în curent continuu și joasă frecvență iar o liță subțire este *masivă* în înaltă frecvență.

Cum în înaltă frecvență curentul circulă doar la suprafața firului conductor, conductorul poate fi ca o țeavă prin care poate circula agentul de răcire a conductorului.

Conductoarele utilizate în înaltă frecvență nu se realizează dintr-un singur conductor gros la care curentul ar fi refulat la exteriorul său, ci sub forma unei împletituri din mai multe conductoare subțiri (lițe), ceea ce permite ca să existe curent și în centrul conductorului (figura 8.4-a).

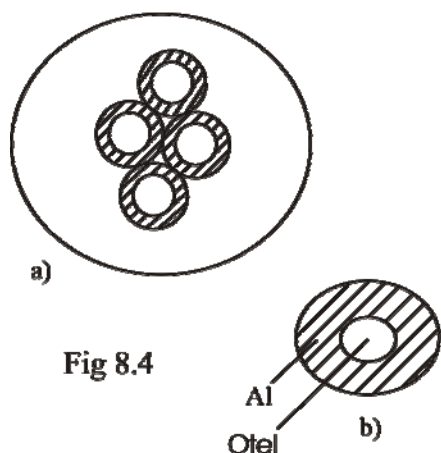


Fig 8.4

Funiile pentru liniile de înaltă tensiune fiind de secțiune mai mare, chiar la $f = 50$ Hz, se manifestă efectul de refulare. Ele se realizează dintr-o inimă de oțel care îi asigură o rezistență mecanică (la vânt, încărcare cu chiciură, etc.) iar în jurul acesteia există o

împletitură din fire de aluminiu (figura 8.4-b) care conduc curentul și a cărei grosime este egală cu adâncimea de refulare δ .

8.3 Efectul de pătrundere

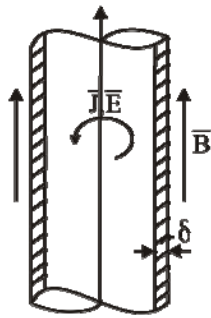
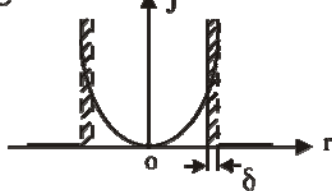


Fig 8.5



O piesă conductoare cilindrică este introdusă într-un câmp magnetic inductor \vec{B} ale cărui linii să fie tangente la suprafața piesei și este variabil în timp sub forma: $B = B_m \sin \omega t$.

Câmpul $\vec{B}(t)$ induce în conductor un câmp electric indus \vec{E} ale cărui linii sunt situate în plane \perp pe \vec{B} (ca în figura 8.5). Câmpul \vec{E} generează curenții induși $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ale căror linii coincid cu cele ale lui \vec{E} (curenții \vec{J} se mai numesc și curenți turbionari sau curenți Foucault, tocmai fiindcă liniile lor fac turbioane (rotoare) în volumul piesei conductoare.

Dacă frecvența câmpului \vec{B} este mică, curenții induși vor exista până aproape de centrul conductorului iar dacă $\omega \gg$, curenții induși sunt puternic amortizați spre interior, ei practic “pătrund” în conductor doar într-o peliculă de grosime δ la suprafață (de unde numele pentru δ de *adâncime de pătrundere*).

Fenomenul este utilizat în tehnica *tratamentelor termice* de suprafață (călire) pentru a se obține efecte speciale (duritate mare a piesei la suprafață, pentru a nu se uza). Se introduce piesa în interiorul bobinei inductoare (cea care creează câmpul \vec{B}) și în câteva secunde se înroșește la suprafață; se scoate și se răcește în mediul dorit (apă, cianură etc). Randamentul este foarte bun (comparat cu încălzirea în cuptoare cu gaz sau altele), se încălzește doar suprafața piesei, proprietățile structurii interioare nu sunt afectate prin încălzire.

Totul este să se poată produce un câmp magnetic ale cărui linii să fie tangente la suprafața piesei iar când piesa are o formă mai complicată trebuie să avem bobine inductoare speciale. Alimentarea acestor bobine se face de la generatoare de înaltă frecvență (GIF).

8.4 Efectul de proximitate (vecinătate)

Curentul variabil printr-un conductor se repartizează pe secțiunea acestuia în funcție de frecvența sa ca urmare a efectului de refulare (spre exterior) a liniilor de curent. De fapt liniile de curent sunt refulate spre regiunea din conductor unde câmpul său magnetic este maxim; și cum la un

conductor singur câmpul magnetic este maxim la suprafața sa, acolo are loc refularea liniilor de curent.

Dacă în vecinătatea unui conductor se găsesc și alte conductoare parcurse de curent variabil (fie de aducție, fie indus în ele) câmpul magnetic al conductoarelor vecine modifică repartiția câmpului magnetic inițial și refularea va avea loc spre regiunea cu câmp maxim H_{\max} .

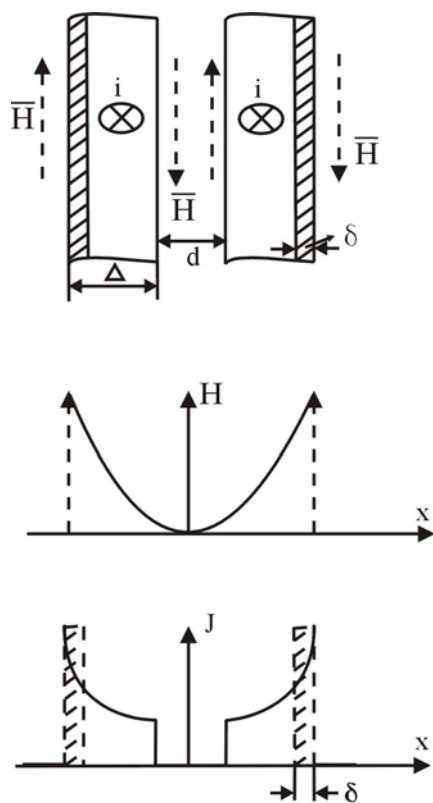


Fig 8.6

În zona interioară plăcilor conductoare din figura 8.6, cele două câmpuri magnetice au sensuri contrare, deci câmpul H va avea valori mari pe partea exterioră și acolo va avea loc refularea liniilor celor doi curenți. La frecvențe mari ei se pot considera concentrați pe o peliculă de grosimea δ la exteriorul plăcilor. Similar, pentru două conductoare paralele cu secțiune circulară, parcurse de curentul i de înaltă frecvență, efectul de refulare are loc ca în figura 8.7.

În figura 8.7-a curenții au același sens, în zona centrală câmpurile \vec{H} au sensuri contrarii, câmpul maxim este la exterior iar curenții vor fi refulați spre exterior, ei circulă prin secțiunile hașurate.

În figura 8.7-b curenții au sensuri contrarii, câmpul magnetic este maxim în zona interioară și curenții vor fi refulați spre interior; ei vor circula doar prin secțiunea hașurată, cu atât mai îngustă cu

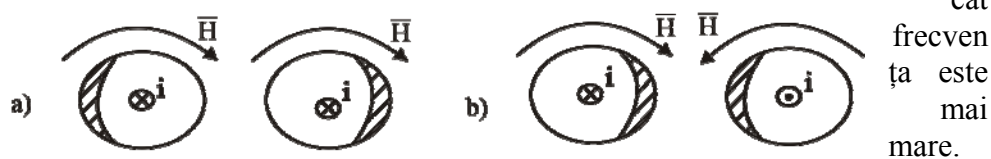


Fig 8.7

cât
frecven
ța este
mai
mare.

8.5 Efectul de buclă

Fie o spiră groasă dintr-o bobină parcursă de un curent de înaltă frecvență. Câmpul magnetic este maxim în zona interioară, deci acolo va avea loc și refularea liniilor de curent, prin secțiunea hașurată din figura 8.8.

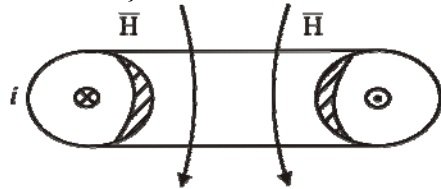


Fig 8.8

Aceasta determină încălzirea spirelor pe partea interioară, acolo unde sunt condiții grele de răcire a acestora (excepție cazul spirelor realizate cu conductor țeavă parcurs de un agent de răcire). Dacă bobina este un inductor care trebuie să încălzească piesele din

interiorul său, în acest caz încălzirea spirelor la interior va îmbunătăți condițiile de transfer a energiei spre interior.

8.6 Efectul Field (direct și invers)

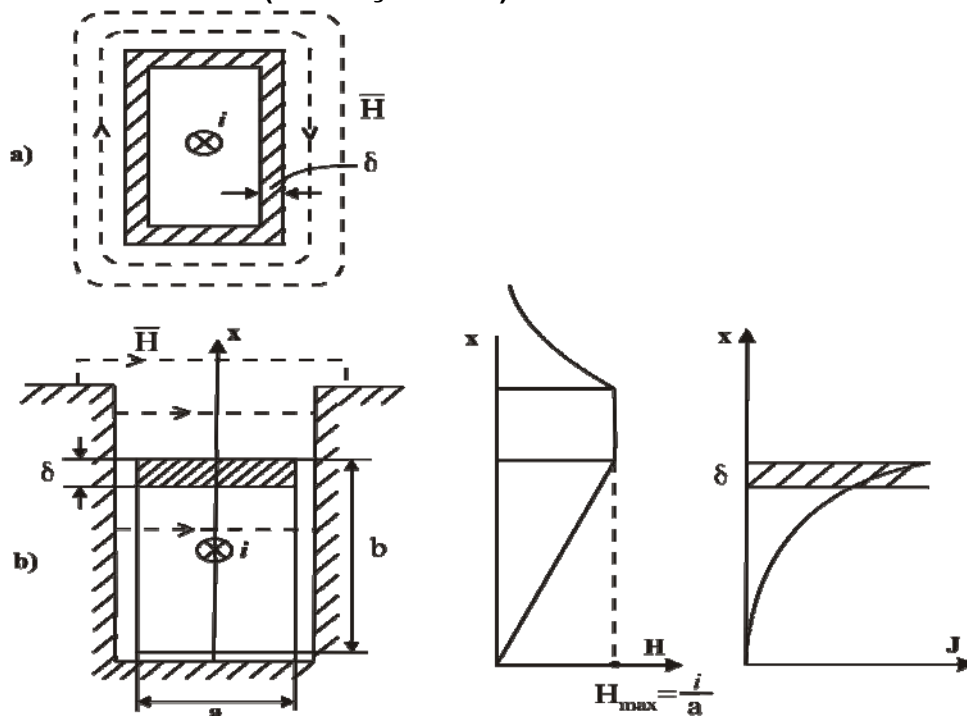


Fig 8.9

Dacă o bară conductoare este plasată într-un mediu omogen ($\mu = \text{ct}$) și este parcursă de un curent variabil $i(t)$ ca în figura 8.9-a, la frecvențe mari va avea loc o refulare a liniilor de curent la periferia barei pe un strat de grosime δ .

Dacă bara parcursă de curentul i este plasată într-o creștătură feromagnetică (figura 8.9-b) atunci liniile de câmp magnetic au o altă distribuție. Câmpul \vec{H} este nul la fundul creștăturii și este maxim la partea de sus a barei (pentru $x=b$). Deci și refularea liniilor de curent va avea loc spre partea de sus a barei, curentul putând fi concentrat pe stratul de grosime δ . Rezistența barei nu va mai fi $R_0 = \rho \frac{l}{ab}$ ci $R_a = \rho \frac{l}{a\delta}$. Acest efect este

numit *efectul Field direct* și reprezintă echivalentul efectului de refulare doar că este aplicat conductoarelor plasate în creștături feromagnetice.

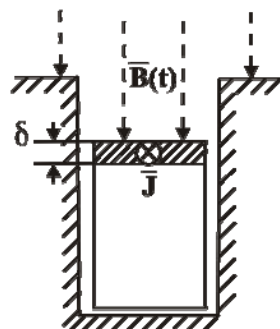


Fig 8.10

Dacă asupra barei conductoare plasată în creștătură cade un câmp magnetic inductor din exterior (figura 8.10), cum este cazul unui motor electric la care câmpul \vec{B} creat de stator cade pe înfășurarea rotorului, plasată în creștătură. Cu cât frecvența câmpului \vec{B} este mai mare, densitatea curentului \vec{J} indus în lungul barei va fi mai intens la suprafața de sus a acesteia, adâncimea de pătrundere δ va fi mică. Acest efect numit *efectul Field invers*

este analogul efectului de pătrundere, doar că este aplicat conductoarelor plasate în creștături. La pornirea unui motor electric asincron frecvența curenților induși în rotor este mare, δ este mic și rezistența barei din rotor este mare, fiind cu secțiune mică. Rezistența mare va limita curentul de pornire. Pe măsură ce se accelerează, scade frecvența curenților, δ crește, scade rezistența și în final curenții induși pătrund până la fundul creștăturii. Totul simulează introducerea unei rezistențe suplimentare în rotor pe timpul pornirii. Ca efectul să se manifeste deplin, la micromotoare creștăturile se fac înguste și adânci (motor cu bare înalte) pentru a avea porniri fără șocuri.

8.7 Efectul de ecranare

A ecrana un dispozitiv sensibil la câmpurile exterioare înseamnă a nu permite ca un câmp exterior să treacă prin ecran (ecranare dinspre exterior spre interior). A ecrana interior \rightarrow exterior înseamnă a nu permite ca un câmp perturbator creat de un dispozitiv să se propage în mediul din jurul său.

O *ecranare electrică* (figura 8.11-a) se realizează printr-un înveliș conductor Σ care nu permite să intre câmpul \vec{E}_e . Dacă învelișul conductor Σ (o folie conductoare, plasă de sârmă etc) este legat la masă, atunci el

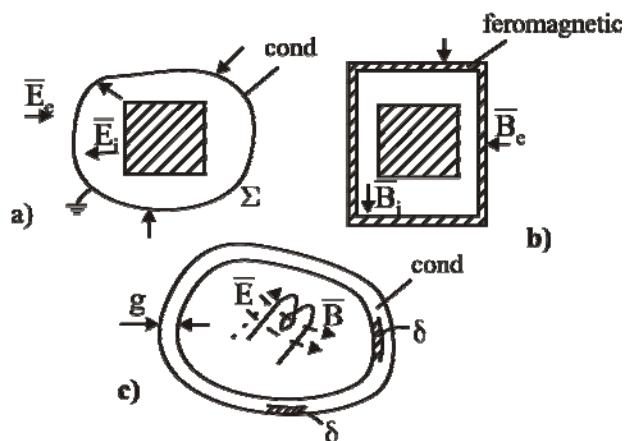


Fig 8.11

Ecranare electromagnetică înseamnă a nu permite să treacă o undă electromagnetică. El se realizează dintr-o folie conductoare având grosimea g . Unda electromagnetică care cade pe suprafața ecranului va pătrunde în acesta pe adâncimea de pătrundere δ , care depinde de parametrii (σ, μ) ai ecranului și de frecvența undei. Dacă $\delta < g$, vom obține o *ecranare completă*, unda “s-a pierdut” în ecran iar dacă $\delta \geq g$ se obține o ecranare parțială, la ieșire amplitudinea sa este redusă de $e^{\alpha g}$ ori.

8.8 Efectul de levitație electromagnetică

În câmpuri statice (electrostatice, magnetostatice) nu se poate obține echilibrul unui corp încărcat sau magnetizat permanent.

În schimb un corp conductor poate fi adus în echilibru prin introducerea sa într-un câmp magnetic inductor, astfel ca interacțiunea dintre acest câmp și curenții turbionari să anuleze greutatea corpului conductor \bar{G} (figura 8.12).

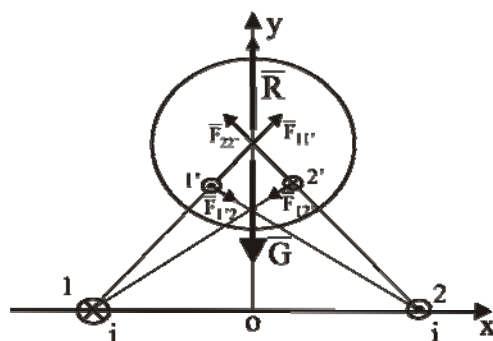


Fig 8.12

Considerăm un conductor cilindric masiv, foarte lung, plasat centrat în câmpul magnetic inductor creat de două fire (1 și 2) parcurse de curentul i în sensuri opuse și paralele cu axa cilindrului: $i = I_m \sin \omega t$. Problema de proximitate dintre fire și cilindru precizează poziția firelor imagine

1' și 2'. Compunerea forțelor de interacțiune $\vec{F}_{11'}, \vec{F}_{22'}, \vec{F}_{12'}, \vec{F}_{1'2}$ ne dă forța rezultantă \vec{R} ce se exercită asupra conductorului.

Dacă cilindrul este centrat între cele două fire, forța rezultantă nu va avea decât componenta R_y ; dacă nu este centrat, componenta R_x va aduce cilindrul pe axa O_y , care este o axă de stabilitate.

Dacă forța $R = R_y < G$, se obține un efect de *pernă magnetică*, corpul nu se lasă cu toată greutatea, efect utilizat în tracțiunea electrică de mare viteză pentru a reduce frecarea trenului cu calea de rulare.

Dacă $R \geq G$ se obține *efectul de levitație* (plutirea corpului conductor) într-un câmp magnetic exterior. Fenomenul este utilizat în diverse aplicații tehnice: topirea metalelor în atmosferă controlată, depunerea picăturilor conductoare în tehnologia integratelor, când picătura pentru a nu se oxida superficial se depune în vid și dirijarea ei din exterior se face prin levitație electromagnetică.