

9. Circuite electrice în regim tranzitoriu

Un circuit electric care înainte de momentul $t=0$ era în regim permanent (sau în repaus) va intra în regim tranzitoriu ca urmare a unei comutații ce apare în momentul inițial ($t=0$). Comutație într-un circuit electric înseamnă:

- *închiderea* sau *deschiderea* unui contact (sau aducerea în stare de conducție a unui dispozitiv electronic – care echivalează cu închiderea unui contact sau stingerea unui dispozitiv, care echivalează cu deschiderea unui contact).

- *aplicarea unui semnal* (cuplarea la o sursă) sau încetarea unui semnal (decuplarea de la o sursă a circuitului).

- *variația bruscă* (în trepte) a unui parametru de circuit.

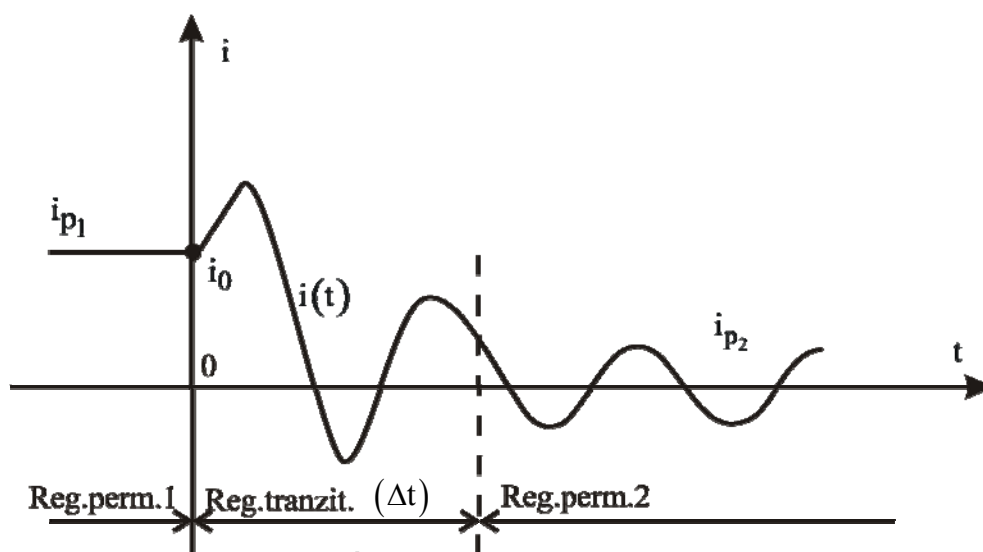


Fig. 9.1

Reglarea unor dispozitive (potențiometru, bobină variabilă, condensator variabil) chiar dacă se face relativ rapid nu declanșează un regim tranzitoriu, circuitul trece printr-o succesiune de regimuri permanente.

Comutațiile într-un circuit pot fi: *naturale* (reale) când fenomenele care însoțesc regimul respectă toate legile și teoremele acelor fenomene, și *forțate* (ideale) când nu toate teoremele se verifică sub forma lor clasică. Comutațiile forțate practic au apărut în studiu odată cu electronica de putere.

Un circuit funcționa într-un regim permanent (1) până la momentul $t=0$ când a apărut o comutație, după care urmează un regim tranzitoriu de durată Δt în care circuitul se adaptează la situația de după comutație și în final urmează regimul permanent (2) ca în figura 9.1

Regimul tranzitoriu a unui semnal este cuprins între două regimuri permanente. Durata sa Δt teoretic este infinită, iar practic ea este de ordinul ($\mu\text{sec} \sim \text{msec}$). Cele mai mari vârfuri de tensiune sau de curent pot apărea în timpul regimului tranzitoriu, deci circuitele trebuie protejate pe baza studiului acestor regimuri.

Soluțiile de regim tranzitoriu $u(t)$ și $i(t)$ se obțin prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale circuitelor în condiții inițiale date; pentru circuite liniare acestea sunt ecuații diferențiale cu coeficienți constanți. Soluția lor se poate scrie sub forma :

$$i(t) = i_\ell + i_f ; u(t) = u_\ell + u_f \quad (9.1)$$

unde (i_ℓ, u_ℓ) reprezintă *componenta liberă* și matematic ele sunt soluția generală a ecuației diferențiale omogene; în expresia lor intervin constantele de integrare al căror număr este egal cu ordinul ecuației diferențiale a circuitului, respectiv cu numărul de elemente reactive din circuit (L și C). Circuitele de ordinul I au un L sau un C, cele de ordinul II au două elemente reactive. Circuitele care conțin numai rezistențe nu au regim tranzitoriu, ele sunt descrise de ecuații algebrice și orice comutație ar suferi, ele intră direct în noul regim permanent. De altfel numai elementele care înmagazinează energie (L și C) au nevoie de un interval de timp pentru a se adapta.

Componentele (i_f, u_f) se numesc *componenta forțată* și matematic ele reprezintă soluția particulară a ecuației (sau a sistemului de ecuații) diferențiale neomogene (în membrul drept ecuațiile conțin t.e.m ale surselor din circuit).

Din alt punct de vedere, soluția de regim tranzitoriu se poate scrie astfel:

$$i(t) = i_t + i_p ; u(t) = u_t + u_p \quad (9.2)$$

în care (i_t, u_t) reprezintă *componenta tranzitorie* a soluției (partea din soluție ce tinde la 0 când $t \rightarrow \infty$), iar (i_p, u_p) reprezintă *componenta permanentă* a soluției, cea care rămâne în circuit la sfârșitul regimului tranzitoriu, în regimul permanent 2, respectiv nu se anulează pentru $t \rightarrow \infty$.

Componentele (i_p, u_p) există numai dacă sursele din circuit au componentă permanentă (continuă, sinusoidală, periodică nesinusoidală).

În foarte multe situații există corespondențele:
 $i_\ell = i_t ; i_f = i_p ; u_\ell = u_t ; u_f = u_p$.

Cum componentele (i_ℓ, u_ℓ) conțin constante de integrare, determinarea acestora se face punând condiția inițială în soluția generală: $i(t) = i_\ell + i_f$; $u(t) = u_\ell + u_f$.

9.1 Teoremele condițiilor inițiale pentru comutații naturale

a) *Condiții inițiale pentru laturi cu bobine:*

Ecuția de tensiuni pentru o bobină este:

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} \quad (9.3)$$

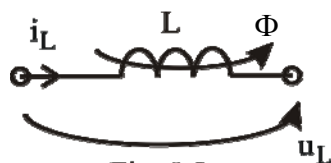


Fig. 9.2

Dacă intensitatea curentului prin bobină ar prezenta puncte de discontinuitate, atunci în punctele respective $\frac{di_L}{dt} \rightarrow \infty$ și $u_L \rightarrow \infty$. Cum

tensiuni infinite nu există, nici curentul prin bobină nu poate prezenta salturi; deci $i_L(t)$ este o funcție continuă în orice moment, inclusiv în jurul momentului comutației ($t=0$):

$$i_{0-} = i_{0+} = i_0 \quad (9.4)$$

Dar fluxul magnetic al bobinei este $\Phi = Li_L$, deci nici fluxul nu poate fi discontinuu:

$$\Phi_{0-} = \Phi_{0+} = \Phi_0 \quad (9.5)$$

Cele două relații (9.4) și (9.5) ne permit să stabilim condiția inițială a unei bobine dacă știm starea bobinei chiar înainte de comutație: i_{0-} ; Φ_{0-} .

Cele două relații care reprezintă *teorema condiției inițiale* pentru o bobină aflată în comutație au și o justificare energetică. Energia magnetică a unei bobine se scrie sub forma:

$$W_m = \frac{1}{2} Li_L^2 = \frac{\Phi^2}{2L} \quad (9.6)$$

Dacă $i_L(t)$ sau $\Phi(t)$ ar prezenta discontinuități atunci și energia W_m ar avea discontinuități, ceea ce contrazice legile fenomenelor naturale: nici o energie nu apare sau dispare brusc și nici nu variază prin salturi, energiile se adună în timp și dispar în timp.

b) Condiții inițiale pentru condensatoare:

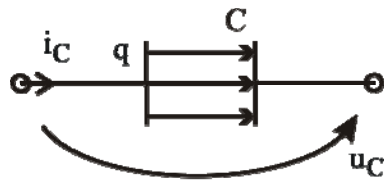


Fig. 9.3

Curentul prin condensator are expresia:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (9.7)$$

Dacă tensiunea la bornele unui condensator $u_C(t)$ ar prezenta discontinuități aceasta ar implica în acele momente: $\frac{du_C}{dt} \rightarrow \infty$ și $i_C \rightarrow \infty$. Dar curenți infiniți nu există, respectiv $u_C(t)$ este funcție continuă pentru orice t , inclusiv pentru $t=0$:

$$u_{C0-} = u_{C0+} = u_{C0} \quad (9.8)$$

$$\text{dar: } q = Cu_C \rightarrow q_{0-} = q_{0+} = q_0 \quad (9.9)$$

Relațiile (9.8) și (9.9) reprezintă *teorema condiției inițiale* pentru un condensator. Energia înmagazinată în câmpul electric dintre armăturile sale este:

$$W_e = \frac{1}{2} Cu_C^2 = \frac{q^2}{2C} \quad (9.10)$$

Dacă $u_C(t)$ și $q(t)$ ar putea fi discontinue, atunci și W_e ar putea varia printr-un salt ceea ce contrazice legile naturii; deci (9.8) și (9.9) au și o justificare energetică.

Curentul printr-o bobină se scrie sub forma:

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int u_L(t) dt + C_1 \quad \text{sau} \quad i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u_L(t) dt + i_{L0} \quad (9.11)$$

iar tensiunea la bornele unui condensator se scrie sub forma:

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt + A_1 \quad \text{sau} \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt + u_{C0} \quad (9.12)$$

Cele două funcții $i_L(t)$ și $u_C(t)$ sunt univoc determinate dacă se cunosc condițiile lor inițiale: i_{L_0} și u_{C_0} . Pentru a cunoaște evoluția unei bobine sau a unui condensator după comutația din momentul ($t=0$), trebuie să cunosc “istoria” celor două elemente, starea lor dinainte de comutație, fiindcă relațiile (9.4) și (9.8) spun că: $i_{L_0} = i_{L_{0-}}$, $u_{C_0} = u_{C_{0-}}$.

Trebuie să cunoaștem atâtea condiții inițiale câte bobine și condensatoare există în circuit, dar și numărul constantelor de integrare din soluție este egal tot cu ordinul circuitului (ordinul ecuației sale diferențiale) deci problema este determinată; pe baza celor două teoreme ale condițiilor inițiale se pot determina constantele de integrare din soluția de regim tranzitoriu.

Observație: Mărimile $i_L(t)$ și $u_C(t)$ care, conform teoremei condițiilor inițiale, sunt mărimi cu variație continuă în jurul oricărui moment t , inclusiv în jurul momentului comutației ($t=0$); astfel de mărimi cu variație controlată nu prezintă salturi, ele se mai numesc *variabilele de stare* ale unui circuit electric.

9.2 Circuite simple sub excitații particulare

9.2.1 Cuplarea și decuplarea unui circuit RL serie la o sursă continuă

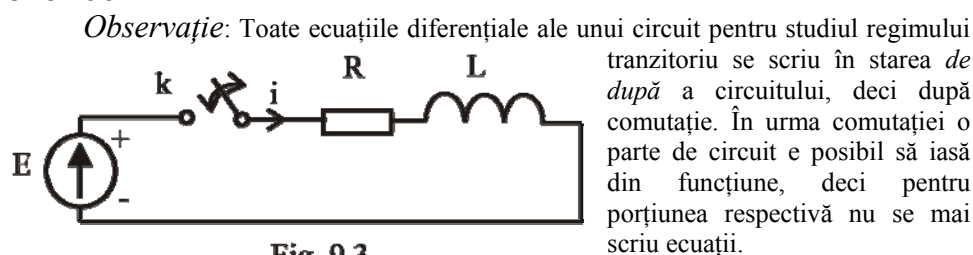


Fig. 9.3

Pentru circuitul din figura 9.3 comutația înseamnă închiderea contactului k la momentul $t=0$. Ecuația de tensiuni este:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (9.13)$$

circuitul este de ordinul întâi (o singură bobină) deci și ecuația (9.13) este de ordinul I.

Soluția ecuației diferențiale omogene este soluția liberă:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \rightarrow i_{\ell} = i_t = Ae^{-\frac{R}{L}t} \quad (9.14)$$

Soluția permanentă (forțată) se poate scrie de pe circuit; după ce a trecut regimul tranzitoriu prin circuitul din figura 9.3 se stabilizează curentul:

$$i_p = i_f = \frac{E}{R}$$

Deci:

$$i = i_p + i_t = i_p + Ae^{-\frac{R}{L}t} \xrightarrow{(t=0; i=i_0)} i_0 = i_{p_0} + A \rightarrow A = i_0 - i_{p_0}$$

Soluția de regim tranzitoriu pentru circuitul RL este de forma:

$$i = i_p + (i_0 - i_{p_0})e^{-\frac{R}{L}t} \quad (9.15')$$

Mărima $\tau = \frac{L}{R} [\text{sec}]$ este *constanta de timp a circuitului*.

Dimensional pentru τ rezultă:

$$\left[u = Ri, u = L \frac{di}{dt} \right] \rightarrow \left[\frac{L}{R} \right] = \text{sec}.$$

Soluția

$$i = i_p + (i_0 - i_{p_0})e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.15)$$

este reprezentată grafic în figura 9.4.

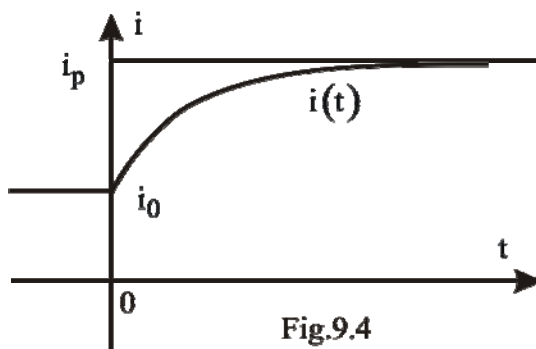


Fig. 9.4

Cuplarea circuitului RL

Înainte de închiderea lui k nu există curent în circuit ($i_0=0$) iar în final va circula curentul

$$i_p = \frac{E}{R}, \text{ deci (9.15) devine:}$$

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (9.16)$$

Constanta de timp τ a

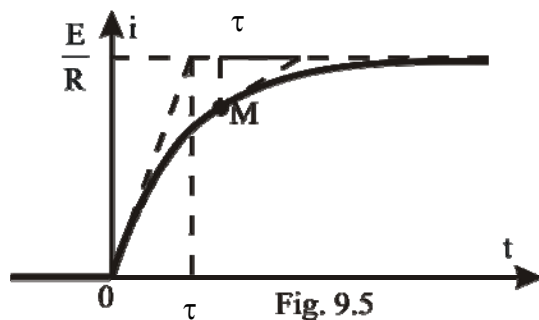


Fig. 9.5

unui circuit are mai multe interpretări:

- este timpul după care curentul ar atinge valoarea de regim permanent $i_p = \frac{E}{R}$ dacă ar varia cu viteza inițială (după tangenta la grafic în origine ca în figura 9.5)

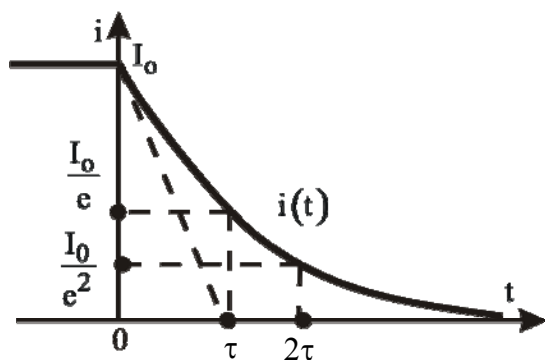


Fig. 9.6

- este subtangenta la curbă în orice punct M al variației $i(t)$.

- pentru o mărime cu

variația $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$,

constanta de timp τ reprezintă timpul după care mărimea i se reduce de e ori ca în figura 9.6. După 2τ se reduce de e^2 ori, iar după

5τ ajunge la valoarea $\frac{I_0}{e^5} = 0,67\% I_0$. Deducem că orice regim tranzitoriu durează maxim (4-5) constante de timp.

Bobinele cu multe spire și așezate pe miez magnetic au L mare și $\tau = \frac{L}{R}$ va fi mare, pentru ele durata regimului tranzitoriu va fi mare (\sim msec), ele se adaptează mai greu.

Decuplarea circuitului RL. Admitem că la momentul $t=0$ se deschide contactul, și curentul care există în circuit în acel moment va fi condiția inițială pentru regimul tranzitoriu

care începe: $t=0 \rightarrow i_0 = \frac{E}{R}$ iar

în final pentru $t \rightarrow \infty$, $i_p = 0 \rightarrow i_{p0} = 0$ (i_{p0} este o mărime de calcul, ea reprezintă valoarea lui i_p luată în $t=0$; însă

i_p nu există decât după

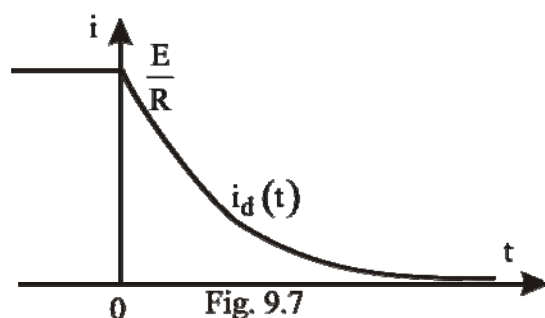


Fig. 9.7

terminarea regimului tranzitoriu, valoarea sa la $t=0$ nu are nici o semnificație fizică). Deci soluția de regim tranzitoriu (9.15) la decuplare este de forma:

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.17)$$

ea este reprezentată în figura 9.7 (i_d - curentul la decuplare). Cum contactul k s-a deschis, acest curent (9.17) nu se poate închide decât dacă între contactele fix și mobil ale întreruptorului k apare o scânteie (la bobine mai mari chiar arc electric care se menține până bobina s-a descărcat, toată

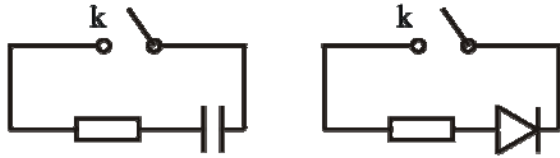


Fig. 9.8

energia sa magnetică s-a transformat în căldură pe R și pe scânteia electrică dintre contacte. Dacă k nu este un întreruptor mecanic (ci unul electronic, static) trebuie să

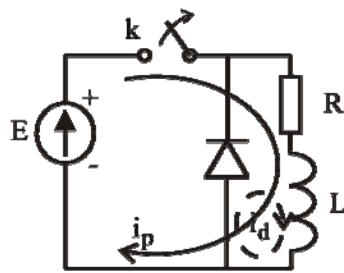


Fig. 9.9

se prevadă în paralel cu k un *circuit de stingere* (figura 9.8) prin care să se descarce bobina. Sau în paralel cu circuitul RL se prevede o *diodă de fugă* prin care se va închide curentul de descărcare a bobinei $i_d(t)$ atunci când se decuplează de la sursă (se deschide k) ca în figura 9.9.

Tensiunea la bornele bobinei va avea următoarea dinamică:

$$\begin{cases} \text{cuplare: } u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{t}{\tau}} \\ \text{decuplare: } u_L = L \frac{di_d}{dt} = -E e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \quad (9.18)$$

și ele sunt reprezentate în figura 9-10 a,b.

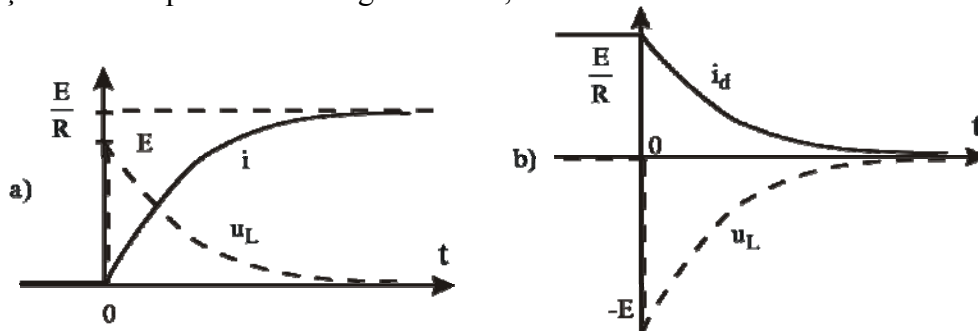


Fig. 9.10

Vârful de tensiune $(-E)$ din figura 9.10 – b favorizează aprinderea unei scânteii între contacte la deschiderea lui k .

9.2.2 Cuplarea și decuplarea unui circuit RL serie la o sursă sinusoidală

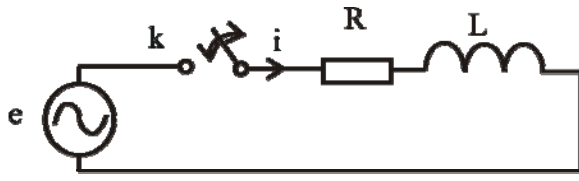


Fig. 9.11

Circuitul RL se va cupla la o sursă sinusoidală având t.e.m. e de forma:

$$e = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \gamma_e) \quad (9.19)$$

Dacă în regim permanent γ_e era o mărime arbitrară (distanța de la originea de timp, arbitrar aleasă, până la cea mai apropiată trecere prin zero în sens crescător a lui e), în studiul regimului tranzitoriu originea de timp nu

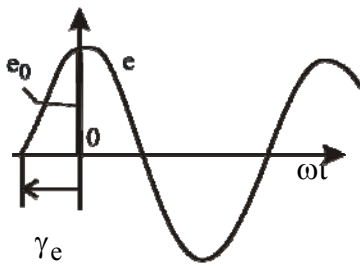


Fig. 9.12

mai e aleasă arbitrar ci este chiar momentul comutației ($t=0$). Faza inițială γ_e pune în evidență în ce poziție a fost surprinsă sursa în momentul comutației, când t.e.m. avea valoarea e_0 (figura 9.12).

Soluția de regim tranzitoriu este de forma (9.15) când la cuplarea circuitului vom avea:

$$t = 0 \rightarrow i_0 = 0;$$

$$i_p = \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin(\omega t + \gamma_e - \varphi) \xrightarrow{t=0} i_{p0} = \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin(\gamma_e - \varphi)$$

$$\begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L}{R} \end{cases}; \quad I_p = \frac{E}{Z} \quad (9.20)$$

Înlocuind în (9.15) se obține expresia curentului tranzitoriu la cuplare:

$$i = \sqrt{2} \frac{E}{Z} \left[\sin(\omega t + \gamma_e - \varphi) - \sin(\gamma_e - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (9.21)$$

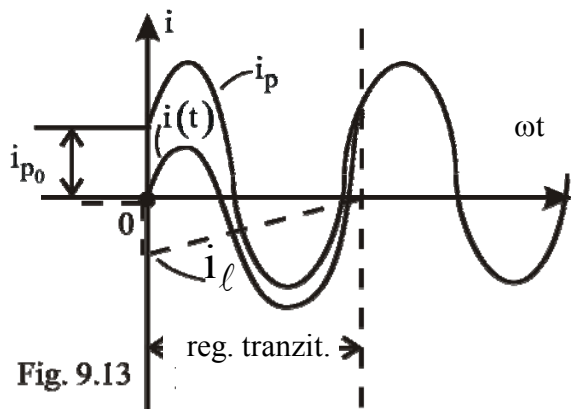


Fig. 9.13

Componentele:

$$\begin{cases} i_p = \sqrt{2}I_p \sin(\omega t + \gamma_e - \varphi) \\ i_\ell = \sqrt{2}I_p \sin(\gamma_e - \varphi) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases}$$

sunt reprezentate în figura 9.13, iar soluția tranzitorie este superpoziția lor: $i = i_p + i_\ell$. Cea mai mare valoare pe care o poate atinge curentul este:

$$i_{\max} \leq 2 \left(\sqrt{2} \frac{E}{Z} \right) \text{ în funcție de momentul ales pentru cuplarea la sursă } (\gamma_e).$$

Dacă dorim să alegem un moment optim al cuplării, astfel încât să nu existe regim tranzitoriu, circuitul din repaos să treacă direct în regimul permanent i_p , trebuie ca în soluția (9.21) să impunem ca $i_\ell = 0 \leftrightarrow \sin(\gamma_e - \varphi) = 0$

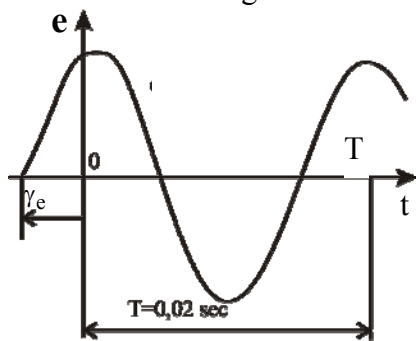


Fig. 9.14

$$\gamma_{e_{\text{opt}}} = \varphi = \arctg \frac{\omega L}{R}$$

(9.22)

Pentru o frecvență de doar $f=50\text{Hz}$, perioada lui e este $T = \frac{1}{f} = 0.02\text{sec}$ (figura

9.14) și manual ar fi imposibil de închis circuitul pe o fază γ_e dată de (9.22). Aceasta devine posibil doar electronic, în momentul dorit ($\gamma_{e_{\text{opt}}}$) se dă impulsul de cuplare a circuitului la sursă.

9.2.3 Încărcarea și descărcarea unui condensator

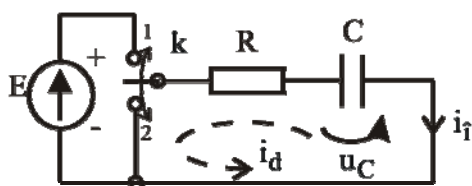


Fig. 9.15

Când comutatorul k din figura 9.15 se închide pe poziția 1, circuitul RC este cuplat la sursă și începe încărcarea condensatorului (i_1 – este curentul de încărcare), iar când k trece pe poziția 2, începe descărcarea (i_d – este curentul de descărcare).

Ecuția de tensiuni a circuitului este de forma:

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E \quad (9.23')$$

sau cu o schimbare de variabilă: $i = \frac{dq}{dt} \rightarrow R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad (9.23'')$

sau $\begin{cases} q = Cu_C \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \rightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \quad (9.23''')$

Soluția ecuației diferențiale (9.23'') este $q = q_\ell + q_p$, în care q_ℓ este soluția generală a ecuației omogene:

$$q_\ell = Ae^{-\frac{1}{RC}t} \rightarrow q = q_p + A e^{-\frac{t}{RC}} \quad (9.24)$$

Dacă în momentul cuplării comutatorului pe poziția (1) condensatorul era încărcat cu q_0 (de la o funcționare anterioară), atunci:

$$t = 0 \rightarrow \begin{cases} q = q_0 \\ q_p|_{t=0} = q_{p_0} \end{cases} \rightarrow A = q_0 - q_p \rightarrow q = q_p + (q_0 - q_{p_0}) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.25)$$

În care $\tau = RC[\text{sec}]$ este constanta de timp a circuitului RC serie.

Încărcarea condensatorului

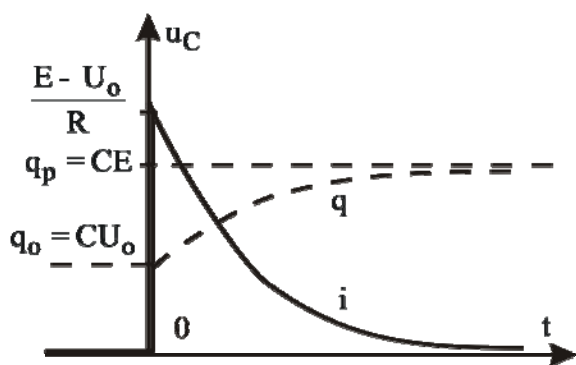


Fig. 9.16

Dacă $q_0 = CU_0$ era încărcarea inițială a condensatorului iar $q_p = CE$ este încărcarea finală (după regimul tranzitoriu), atunci $q_{p_0} = q_p|_{t=0} = CE$.

Soluția (9.25) devine, pentru acest caz, de forma

$$q = CE + C(U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.26')$$

iar curentul de încărcare este:

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.27')$$

reprezentate grafic în figura 9.16.

Dacă nu există încărcare inițială ($q_0 = CU_0 = 0$) atunci:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = CE \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{array} \right. \quad (9.26)$$

Curentul de încărcare este un impuls cu valoarea inițială $\frac{E}{R}$ care, dacă R este mic (cum este cazul la cuplarea cablurilor de comunicații care sunt circuite RC cu $R \ll \tau$), poate deveni periculos pentru circuit.

În acest caz, în serie cu circuitul RC se introduce o rezistență de valoare mare R_p (rezistență de pornire) care va limita vârful impulsului de curent la $\frac{E}{R + R_p}$ (figura 9.17) iar

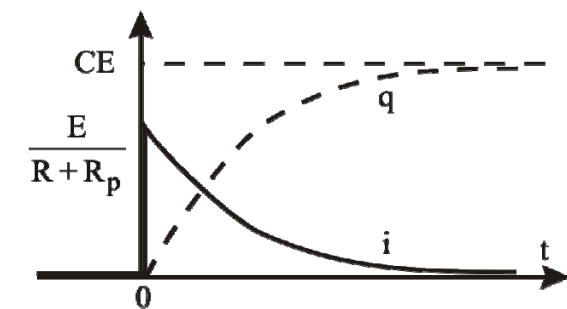


Fig. 9.17

condensatorul are expresia:

după regimul de cuplare se închide și contactul k_1 pentru a scoate rezistența R_p din circuit. Se poate arăta că introducerea rezistenței R_p nu afectează cu nimic randamentul schemei.

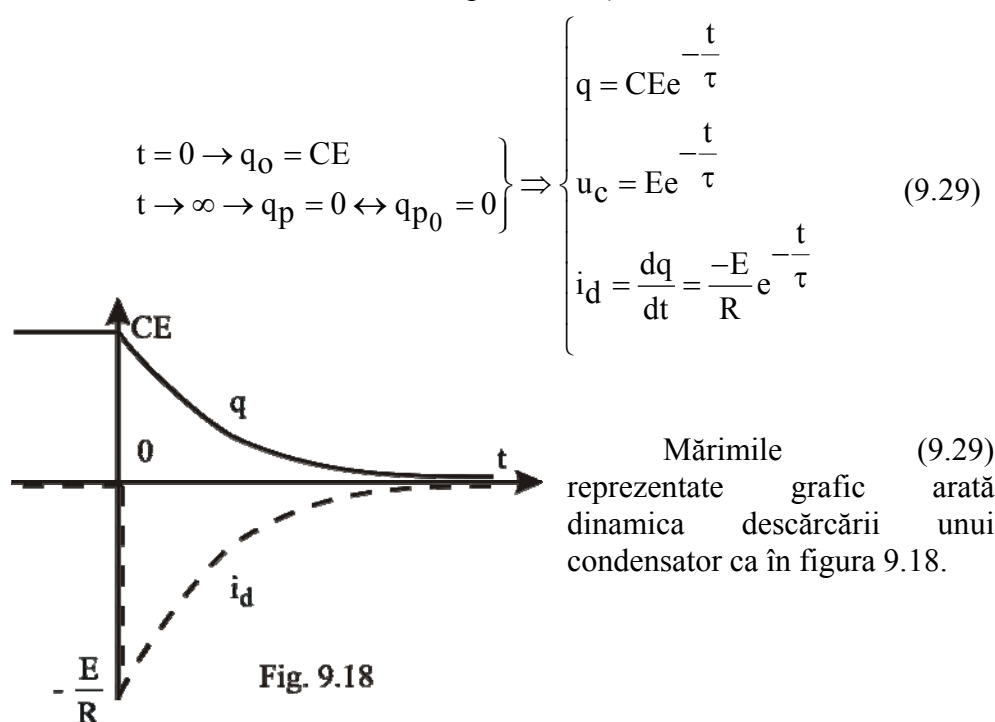
Într-adevăr, energia transformată în căldură pe rezistența înseriată cu

$$W_j = \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \int_0^{\infty} R \frac{E^2}{R^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{E^2}{R} \left(\frac{-\tau}{2} \right) e^{-\frac{2t}{\tau}} \Big|_0^{\infty} = \frac{CE^2}{2} \quad (9.28)$$

Deci energia pierdută prin efect Joule nu depinde de valoarea rezistenței din circuitul de încărcare și este egală cu energia utilă înmagazinată în condensator (randament 50%); rezistența R_p a avut doar un rol benefic.

Descărcarea condensatorului

La trecerea comutatorului k pe poziția (2) în figura 9.15 începe procesul de descărcare a condensatorului, toată energia acumulată în câmpul electric se va transforma în căldură pe rezistența R .



9.2.4 Cuplarea circuitului RC la o sursă sinusoidală

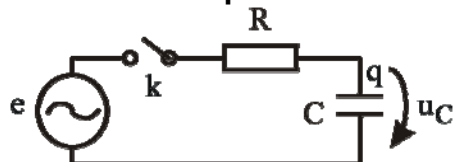


Fig. 9.19

Sursa are t.e.m. de forma:

$$e = \sqrt{2}E \sin(\omega t + \gamma_e) \quad (9.30)$$

unde γ_e este faza inițială a lui e față de

momentul comutației ($t=0$).

Curentul absorbit în regim permanent este:
 $i_p = \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin(\omega t + \gamma_e + \varphi)$ unde $Z = \sqrt{R^2 + X_c^2}$ și $\varphi = \arctg \frac{1}{\omega RC}$ sunt
 impedanța și defazajul introduse de circuit. Sarcina de pe armături în regim
 permanent este de forma:

$$q_p = \int i_p dt = \sqrt{2} \frac{E}{\omega Z} \sin\left(\omega t + \gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.31)$$

$$q_{p0} = (q_p)_{t=0} = \sqrt{2} \frac{E}{\omega Z} \sin\left(\gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) \quad (9.32)$$

Dacă în momentul cuplării $q_0=0$, atunci expresia tranzitorie (9.25) devine:

$$q = \underbrace{\sqrt{2} \frac{E}{\omega Z} \sin\left(\omega t + \gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}_{q_p} - \underbrace{\sqrt{2} \frac{E}{\omega Z} \sin\left(\gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)}_{q_\ell} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.33)$$

Dacă dorim, și-n acest caz, să găsim un moment optim al cuplării ($\gamma_{e_{opt}}$), astfel ca circuitul să treacă direct în regim permanent, trebuie ca soluția liberă să fie nulă:

$$q_\ell = 0 \leftrightarrow \sin\left(\gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow \gamma_{e_{opt}} = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (9.34)$$

Curentul la cuplare are expresia de forma:

$$i = \frac{dq}{dt} = \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin(\omega t + \gamma_e + \varphi) + \sqrt{2} \frac{E}{\omega RCZ} \sin\left(\gamma_e + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (9.35)$$

9.2.5 Regimul tranzitoriu al circuitului RLC serie

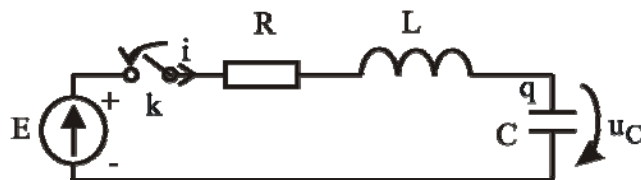


Fig. 9.20

Ecuatiile circuitului
 scrise în variabilele (i , q ,
 u_C) sunt de forma:

$$\left. \begin{aligned} Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt &= E \\ i = \frac{dq}{dt} \rightarrow L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} &= E \\ i = C \frac{du_C}{dt} \rightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= E \end{aligned} \right\} \quad (9.36)$$

Ecuția caracteristică pentru ecuația omogenă în variabila u_C are rădăcinile:

$$LCr^2 + RCr + 1 = 0 \rightarrow r_{1,2} = \frac{-RC \pm \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC} = \frac{-R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (9.37)$$

Notăm: $\delta = \frac{R}{2L}$ - *factorul de amortizare* a circuitului

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ - *pulsăția proprie* de rezonanță a circuitului

$$\text{Deci: } r_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \Omega \quad (9.37')$$

a) dacă $\delta > \omega_0 \rightarrow \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \leftrightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{cr}$ (rezistența critică a circuitului) atunci, având două rădăcini reale (r_1, r_2) soluția liberă este de forma:

$$u_{C\ell_1} = A_1 e^{\eta t} + A_2 e^{\eta_2 t} = A_1 e^{(-\delta + \Omega)t} + A_2 e^{(-\delta - \Omega)t} = A e^{-\delta t} \text{sh}(\Omega t + \alpha) \quad (9.38)$$

soluția, în acest caz, este *aperiodică* de forma (9.38)

b) dacă $\delta = \omega_0 \rightarrow R = R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow r_1 = r_2 = -\delta$. Soluția liberă în acest caz este de forma:

$$u_{C\ell_2} = (A_1 + A_2 t) e^{-\delta t} \quad (9.39)$$

Regimul în acest caz este un regim *aperiodic critic* (este cel mai scurt regim aperiodic)

c) dacă $\delta < \omega_0 \leftrightarrow R < R_{cr} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \rightarrow r_{1,2} = -\delta \pm j\Omega$

Soluția liberă are expresia:

$$u_{C_{\ell 3}} = A_1 e^{(-\delta + j\Omega)t} + A_2 e^{(-\delta - j\Omega)t} = A e^{-\delta t} \sin(\Omega t + \alpha) \quad (9.40)$$

care este un *regim periodic (oscilant) amortizat*.

Circuitul este de ordinul II, ecuația diferențială este și ea tot de ordinul II și în soluția liberă există două constante de integrare (A_1, A_2) sau (A, α). Determinarea lor se face pe baza condițiilor inițiale.

La cuplare condensatorul putea avea o încărcare u_{C_0} sau nu ($u_{C_0} = 0$) iar curentul prin circuit înainte de cuplare era zero, iar bobina L impune $i_0 = 0$.

Punând condițiile inițiale în soluția generală:

$$\left. \begin{aligned} u_C &= u_{C_{\ell}} + u_{C_p} = u_{C_{\ell}}(t) + E \leftrightarrow u_{C_0} = u_{C_{\ell}}(0) + E \\ i &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{du_{C_{\ell}}}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1, A_2 \quad (9.41)$$

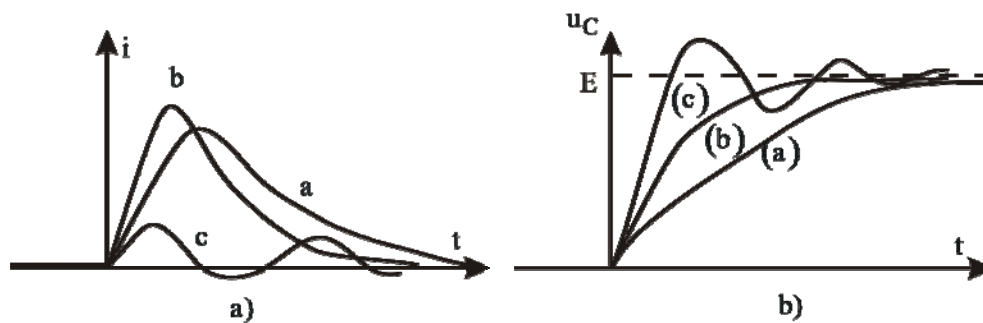


Fig. 9.21

Soluțiile sunt reprezentate grafic în fig. 9.21 – a,b. Tensiunea $u_C(t)$ tinde în final spre valoarea E , dar în funcție de valorile elementelor, dinamica cum ajunge la valoarea finală este diferită în cele trei situații(a,b,c). La curentul de încărcare a condensatorului nu va mai apare vârful de curent $\frac{E}{R}$, din cauza bobinei care se găsește în circuitul de încărcare a condensatorului, acest maxim este redus și întârziat în timp.

9.2.6 Aplicații

1. Pentru circuitul din figura 9.22 contactul k_1 se închide în momentul $t=0$, iar după timpul $t=t_1=4\text{ms}$ se închide și k_2 .

Să se determine expresiile tranzitorii ale curenților i , i_1 și i_2 .

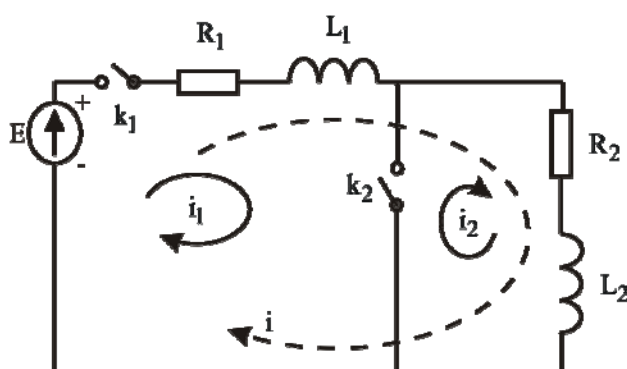


Fig. 9.22

$$E = 7,5\text{V}; R_1 = 10\Omega; R_2 = 5\Omega$$

$$t_1 = 4\text{ms}; L_1 = 10\text{mH}; L_2 = 20\text{mH}$$

a) La $t = 0$; $i_0 = 0$

Ecuția de tensiuni a circuitului este:

$$(R_1 + R_2)i + (L_1 + L_2)\frac{di}{dt} = E$$

$$i_p = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{7,5}{15} = 0,5\text{A} = i_{p0}; i_\ell = Ae^{-\frac{t}{\tau}}; \tau = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2} = 2\text{ms}$$

Soluția de regim tranzitoriu va fi de forma:

$$i = i_p + (i_0 - i_{p0})e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,5(1 - e^{-500t}) \cdot \gamma(t) \quad (9.42)$$

b) La momentul $t=t_1=4\text{ms} \rightarrow i(t_1) = 0,5(1 - e^{-500t_1}) = 0,432\text{A}$ și aceasta va fi condiția inițială pentru ambele bobine din circuit în noul regim tranzitoriu care începe în momentul t_1 .

- Bobina L_1 :

$$i_{1p} = \frac{E}{R_1} = 0,75\text{A} = i_{1p0} \rightarrow i_1 = i_{1p} + (i_{10} - i_{1p0})e^{-\frac{R_1}{L_1}(t-t_1)};$$

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1} = 10^{-3}\text{sec}$$

$$i_1 = 0,75 + (0,432 - 0,75)e^{-1000(t-t_1)} = 0,75 - 0,318e^{-1000(t-t_1)} \cdot \gamma(t-t_1) \quad (9.43)$$

• Bobina L_2 :

$$i_{2p} = i_{2p_0} = 0 \rightarrow i_2 = i_{2p} + (i_{2_0} - i_{2p_0})e^{-\frac{R_2}{L_2}(t-t_1)}; \tau_2 = \frac{L_2}{R_2} = 4\text{ms}.$$

$$\text{Deci: } i_2 = 0,432e^{-250(t-t_1)} \cdot \gamma(t-t_1) \quad (9.44)$$

Dinamica celor trei curenți este prezentată în figura 9.23.

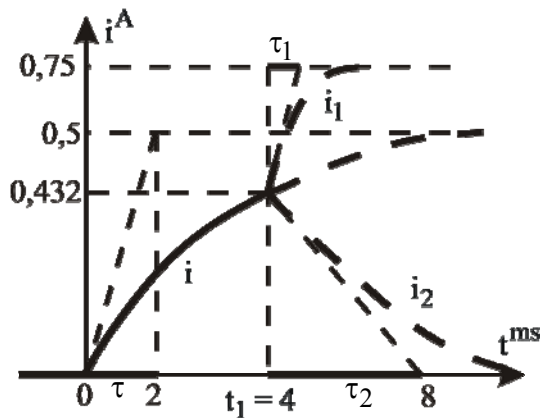


Fig. 9.23

Faptul că expresiile (9.43) și (9.44) sunt înmulțite cu trepta translatată $\gamma(t-t_1)$ pune în evidență că cele două funcții $i_1(t)$ și $i_2(t)$ există numai începând cu momentul t_1 ($t > t_1$).

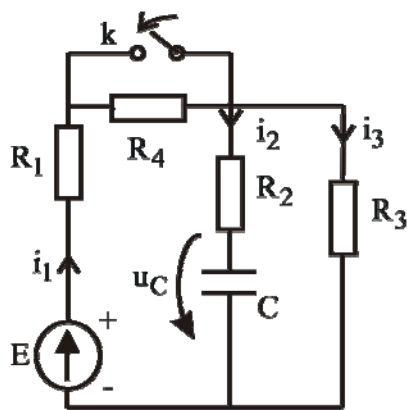


Fig. 9.24

2. Circuitul din figura 9.24 funcționează în regim permanent, iar la momentul $t=0$ se închide k . Se cere expresia tranzitorie pentru $u_C(t)$.

Deși este circuit de ordinul I, cu un singur condensator, nu se pot aplica relațiile (9.25) care sunt valabile doar pentru circuite RC – serie.

Vom scrie ecuațiile de funcționare a circuitului în starea de după comutație (cu k închis):

$$\left\{ \begin{array}{l} E = 60V \\ R_1 = 5\Omega \\ R_2 = R_3 = 10\Omega \\ R_4 = 15\Omega \\ C = 100\mu F \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} i_1 = i_2 + i_3 \\ R_1 i_1 + R_2 i_2 + u_c = E \\ R_3 i_3 - R_2 i_2 - u_c = 0 \\ i_2 = C \frac{du_c}{dt} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} i_3 = \frac{u_c}{R_3} + \frac{R_2}{R_3} C \frac{du_c}{dt} \\ \frac{C}{R_3} (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) \frac{du_c}{dt} + \frac{R_1 + R_3}{R_3} u_c = E \\ \downarrow \\ R' C \frac{du_c}{dt} + R'' u_c = E \end{array} \right. \quad (9.45)$$

Ecuția diferențială echivalentă (9.45) la care s-a redus sistemul de ecuații inițial este o ecuație diferențială de ordinul I pentru care constanta de timp este:

$$\tau = \frac{R' C}{R''} = \frac{1}{200} = 5 \text{ msec}$$

După regimul tranzitoriu se va stabiliza un regim nou permanent pentru care:

$$u_{Cp} = E \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 40V; u_C(0_-) = E \frac{R_3}{R_1 + R_3 + R_4} = 20V$$

Soluția ecuației (9.45) este de forma:

$$u_C(t) = 40 + A e^{-200t}$$

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) \leftrightarrow 20 = 40 + A \rightarrow A = -20$$

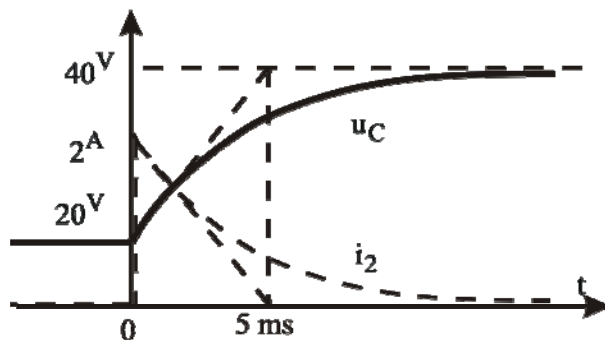


Fig. 9.25

Soluțiile tranzitorii sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_C(t) = 40 - 20e^{-200t} \\ i_2 = C \frac{du_C}{dt} = 2e^{-200t} \end{array} \right. \quad (9.46)$$

Ele sunt reprezentate grafic în figura 9.25.

3. Circuitul din fig. 9.26 – a are comutatorul k pe poziția 1 și funcționează în regim permanent. Comutatorul k trece pe poziția 2 în momentul în care t.e.m. a sursei alternative are valoarea $\frac{E_{\max}}{2}$ și este în descreștere.

Să se determine regimul tranzitoriu al curentului $i(t)$.

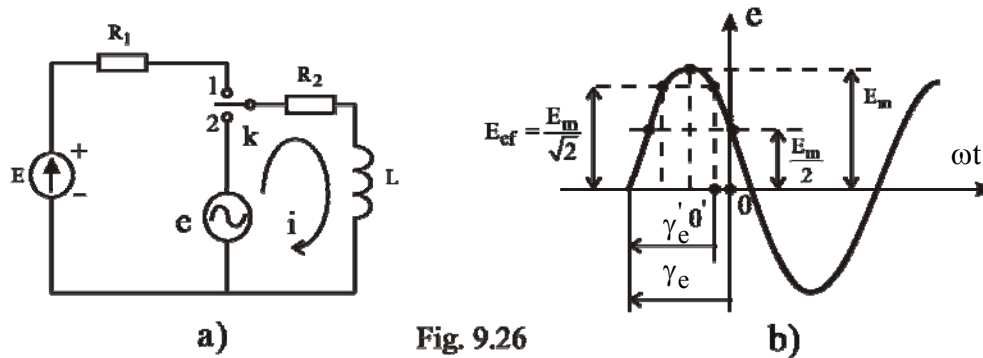


Fig. 9.26

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = 10\Omega; L = 31,8\text{mH} \\ E = 200\text{V} \\ e = 141\sin(314t + \gamma_e) \end{cases}$$

Comutația apare în momentul $(t=0)$: $(e)_{t=0} = \frac{E_m}{2}$ și este în descreștere $\frac{141}{2} = 141\sin\gamma_e \rightarrow \sin\gamma_e = \frac{1}{2} \rightarrow \gamma_e = 30^\circ$ sau 150° și dacă este în descreștere $\rightarrow \gamma_e = 150^\circ \left(\frac{5\pi}{6}\right)$ ca în figura 9.26 – b.

Valoarea inițială a curentului prin bobină este:
 $i_0 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{200}{20} = 10\text{A}$. În regim sinusoidal circuitul are:

$$Z = \sqrt{R_2^2 + X_L^2} = 10\sqrt{2}\Omega; \quad \text{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R_2} = 1 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}. \quad \text{Deci în regimul}$$

permanent final va rămâne curentul:

$$i_p = \frac{E_m}{Z} \sin(\omega t + \gamma_e - \varphi) = 10 \sin(314t + 105^\circ) \text{ [A]}$$

$$i_{p0} = 10 \sin 105^\circ = 9,66 \text{ A}; \quad \frac{1}{\tau} = \frac{R}{L} = 314 \text{ sec}^{-1}$$

Soluția tranzitorie cerută este de forma:

$$i(t) = 10 \sin(314t + 105^\circ) + 0,33e^{-314t} \quad (9.47)$$

Curentul $i(t)$ nu va avea regim tranzitoriu ($i_\ell = 0$) dacă $i_0 = i_{p_0}$, respectiv: $10 = 10 \sin(\gamma_e - \varphi) \rightarrow \sin(\gamma_e - \varphi) = 1 \rightarrow \gamma'_e = \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{3\pi}{4}$.

Cuplarea trebuie să aibă loc în momentul 0', astfel ca faza inițială să fie $\gamma'_e = \frac{3\pi}{4}$ și circuitul R_2L va intra direct în regim permanent. (Așa cum se observă pe figura 9.26 – b, la fazele $\frac{\pi}{4}$ și $\frac{3\pi}{4}$ funcția $e(t)$ trece prin valoarea sa efectivă $E_{ef} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$, iar în momentul 0' t.e.m. $e(t)$ trece prin valoarea efectivă și este în descreștere).

9.3 Analiza operațională a circuitelor electrice în regim tranzitoriu pe baza transformatei Laplace

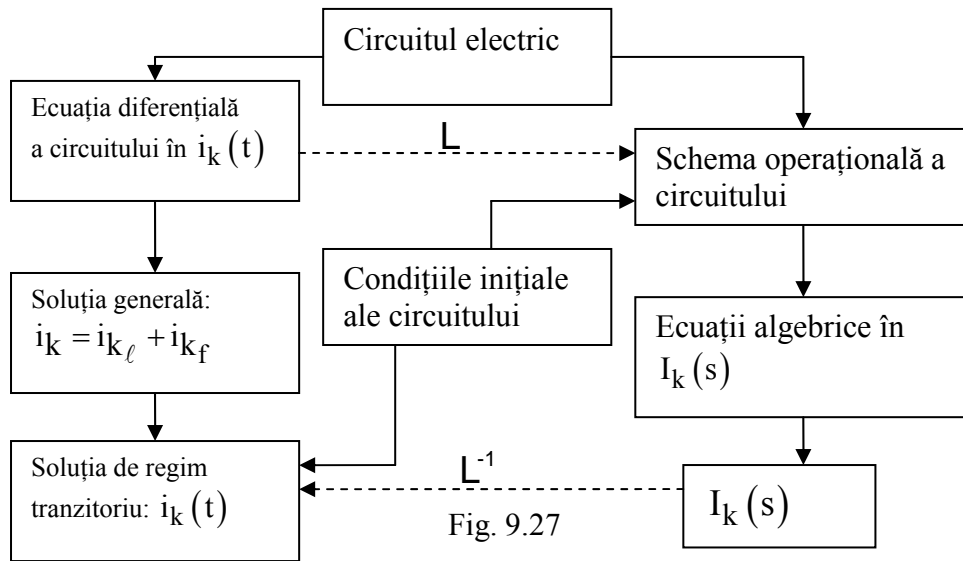
Metodele clasice (directe) de rezolvare a unui sistem de ecuații diferențiale implică trei etape:

- determinarea soluției generale a sistemului omogen;
- determinarea soluției particulare a sistemului neomogen;
- determinarea constantelor de integrare pe baza condițiilor inițiale date.

Metodele operaționale contopesc cele trei etape și permit calculul direct al soluției corespunzătoare condițiilor inițiale date. Plus de aceasta, ele permit o sistematizare a calculelor (metode tip de calcul, tabele precalculate, etc.).

Metodele operaționale se bazează pe asocierea biunivocă a unei funcții imagine pentru o *funcție original* $f(t)$ dată și prin aceasta ecuațiile integro-diferențiale între funcțiile original se transformă în ecuații algebrice între funcțiile imagine.

Atât în metoda operațională cât și în cea clasică intervine ca parte dificilă rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior (gradul polinomului în s , respectiv gradul ecuației caracteristice) dacă circuitul este de ordin superior. În reprezentarea din figura. 9.27 se prezintă în paralel cei doi algoritmi clasic și operațional.



9.3.1 Teoremele transformatei Laplace

O funcție original $f(t)$ admite o transformată Laplace $F(s)$ sub forma:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (9.48)$$

Pentru a exista transformata (convergența integralei 9.48) funcția original $f(t)$ trebuie să îndeplinească condițiile Dirichlet (semnal neted, cu număr finit de subintervale de monotonie) și să nu crească în timp mai repede ca o exponențială. Semnalele fizice care există într-un circuit toate admit transformată Laplace.

→ teorema liniarității: $\mathbf{L}\left[\sum a_k f_k(t)\right] = \sum a_k F_k(s);$

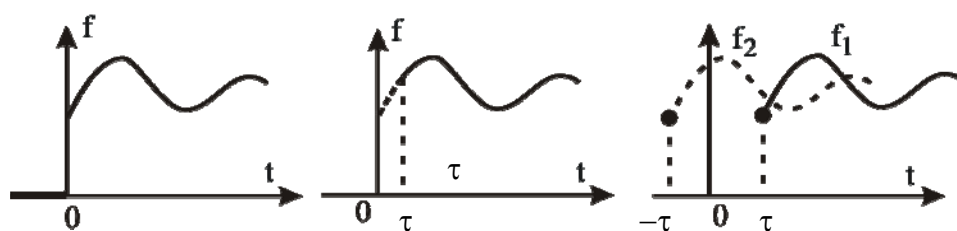
$$\mathbf{L}(f_1 \pm f_2) = F_1(s) \pm F_2(s)$$

→ teorema derivării: $\mathbf{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0_+);$

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f_0 - s^{n-2} f_0' \dots$$

→ teorema integrării: $\mathbf{L}\left[\int f(t) dt\right] = \frac{F(s)}{s} - \frac{f_0^{-1}}{s};$

$$\rightarrow \mathbf{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{F(s)}{s}.$$



a) $f(t) \cdot \gamma(t)$

b) $f(t) \cdot \gamma(t-\tau)$

c)
$$\begin{cases} f_1(t) = f(t-\tau) \cdot \gamma(t-\tau) \\ f_2(t) = f(t+\tau) \cdot \gamma(t+\tau) \end{cases}$$

Fig. 9.28

În fig. 9.28-a funcția $f(t) \cdot \gamma(t)$ există pentru $t > 0$; în fig 9.28 - b este o trunchiere, funcția $f(t) \cdot \gamma(t-\tau)$ există pentru $t > \tau$, iar în fig. 9.28 - c avem o *translație* a funcției $f(t)$, în întârziere cu τ , $f_1(t)$ sau în avans cu τ , $f_2(t)$.

→ teorema translației în domeniul timp:

$$\mathbf{L}[f(t \pm \tau)] = e^{\pm s\tau} F(s) \quad (9.49)$$

→ teorema translației în planul s (teorema atenuării, amplificării): $\mathbf{L}[e^{\pm at} f(t)] = F(s \mp a)$ (9.50)

→ teorema asemănării (scara timpului):

$$\mathbf{L} f(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right); \quad \mathbf{L} \left[f\left(\frac{t}{a}\right) \right] = a F(as)$$

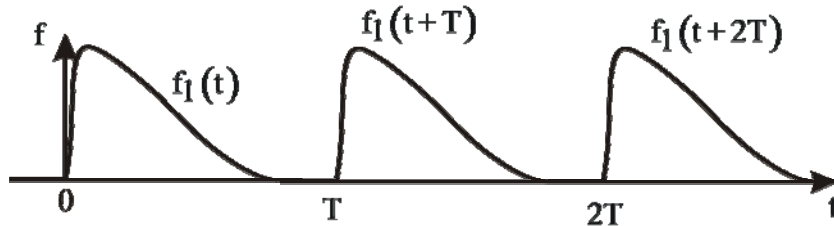
→ teorema valorii inițiale: $\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ (9.51)

→ teorema valorii finale: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (9.52)

→ derivata (integrala) imaginii: $\mathbf{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds};$

$$\int_s^\infty F(s) ds \rightarrow \frac{f(t)}{t};$$

→ funcții periodice: $\mathcal{L}[f(t+T)] = \frac{F_1(s)}{1-e^{-sT}}$; (9.53)



Semnalul de forma $f_1(t)$ având transformata Laplace $F_1(s)$ se repetă cu perioada T .

→ teorema convoluției (teorema lui Borell):

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (9.54)$$

→ teorema lui Duhamel:

$$F(s) = s F_1(s) \cdot F_2(s) \rightarrow f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \quad (9.55)$$

→ Transformata Laplace inversă:

- Cu formula lui Mellin-Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(s) e^{st} ds$$

- Pe baza tabelelor de corespondență
- Cu formulele lui Heaviside (bazat pe descompunerea unui raport de polinoame în fracții

simple) $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$

- Poli simpli: $f(t) = \sum_1^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}$

- Pol în origine: $Q(s) = s Q_1(s)$

$$f(t) = \frac{P(0)}{Q_1(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{s_k Q_1'(s_k)} e^{s_k t}$$

$$\text{Exemplu : } I(s) = \frac{24}{(s+20)^2} \rightarrow i(t) = 24t \cdot e^{-20t}$$

Tabela 9.1

Originalul f(t)	Imaginea F(s)	Originalul f(t)	Imaginea F(s)
Impuls unitate $\delta(t)$	1	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s + \alpha}$
Impuls de arie A (de valoare A): $A\delta(t)$	A	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Treapta unitate $\gamma(t)$	$\frac{1}{s}$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Treapta translatată $\gamma(t - \tau)$	$\frac{1}{s} e^{-s\tau}$	$\sin(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}$
Rampa unitate: $r(t) = t \cdot \gamma(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\cos(\omega t + \varphi)$	$\frac{s \cos \varphi - \omega \sin \varphi}{s^2 + \omega^2}$
$e^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{s \mp \alpha}$	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$te^{\pm \alpha t}$	$\frac{1}{(s \mp \alpha)^2}$	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
		$Ae^{\alpha t^2}$	Nu are imagine

Observație: Teorema valorii inițiale o putem folosi pentru a calcula condiția inițială $f(0_+)$ atunci când se cunoaște imaginea $F(s)$, iar teorema valorii finale pentru a calcula soluția de regim permanent care se stabilește în circuit după regimul tranzitoriu ($t \rightarrow \infty$) în funcție de soluția operațională $F(s)$.

9.3.2 Schemele operaționale ale circuitelor simple în regim tranzitoriu

Vom considera pe rând elementele simple de circuit cărora li se aplică la momentul $t=0$ tensiunea la borne $u(t)$ sau li se injectează curentul $i(t)$ ale căror transformate Laplace sunt $U(s)$ și $I(s)$. Ecuațiilor integro-diferențiale scrise pentru funcții de timp pe schema reală li se asociază ecuații algebrice între imagini Laplace scrise pe schema operațională.

$$\text{Rezistorul: } \begin{cases} u = Ri \\ i = Gu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} U(s) = RI(s) \\ I(s) = GU(s) \end{cases}$$

Impedanța operațională $Z(s)=R$ și admitanța operațională $Y(s)=G$ fiind niște constante, înseamnă că circuitele numai cu rezistențe nu au comportare dinamică (nu au regim tranzitoriu).

Bobina:

$$\text{Ecuația de tensiuni } u = L \frac{di}{dt} \text{ cu condiția inițială } i_{0-} = i_{0+} = i_0$$

$$\text{transpusă operațional devine: } U(s) = sL I(s) - Li_0 \quad (9.56)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(s) = sL \text{ este } \textit{impedanța operațională} \text{ a bobinei;} \\ E_{L_0} = Li_0 = \Phi_0 \text{ t.e.m. a sursei de tensiune fictivă care echivalează} \\ \text{condiția inițială a bobinei.} \end{array} \right.$$

$$\text{Ecuația de curenți a bobinei } i = \frac{1}{L} \int_0^t u dt + i_0 \text{ transpusă operațional}$$

devine :

$$I(s) = \frac{1}{sL} U(s) + \frac{i_0}{s} \quad (9.57)$$

unde:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y(s) = \frac{1}{sL} \text{ este } \textit{admitanța operațională} \text{ a bobinei;} \\ I_{L_0} = \frac{i_0}{s} \text{ este curentul de scurt al } \textit{sursei fictive de curent} \text{ care} \end{array} \right.$$

echivalează condiția inițială.

Ecuației 9.56 îi corespunde o schemă operațională în care în serie cu impedanța bobinei sL se introduce o sursă de tensiune $E_{L_0} = \Phi_0 = Li_0$ orientată în sensul lui $I(s)$.

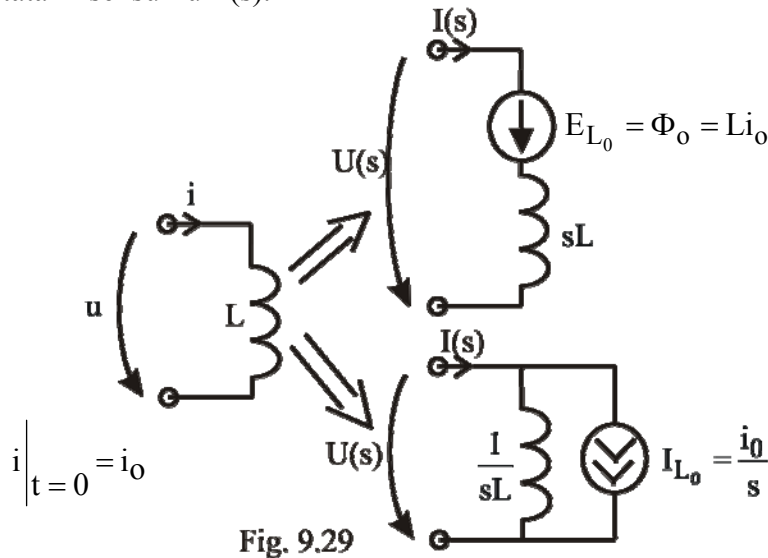


Fig. 9.29

Ecuației 9.57 îi corespunde o schemă operațională în care în paralel cu admitanța bobinei $\frac{1}{sL}$ se introduce o sursă de curent I_{L_0} orientată în sensul de referință a laturii (figura 9.29).

Bobine cuplate:

Tensiunea la bornele bobinei j dintr-un sistem de bobine este:

$$u_j = \sum_{k=1}^m L_{jk} \frac{di_k}{dt} \xrightarrow{L} U_j(s) = \sum_{k=1}^m sL_{jk} I_k(s) - \sum_{k=1}^m L_{jk} i_k(0) \quad (9.58)$$

unde $sL_{jk} = Z_{jk}(s)$ este impedanța operațională de cuplaj; $L_{jk} i_k(0)$ este valoarea

inițială a fluxului de cuplaj dintre j și k , iar $\Phi_j(0) = \sum_{k=1}^m L_{jk} i_k(0)$ este

valoarea inițială a fluxului prin bobina j , în care intră atât fluxul propriu cât și cele de cuplaj între L_j și celelalte m bobine din circuit.

Separând fluxul propriu se poate scrie:

$$\begin{cases} u_j = \frac{d\Phi_j}{dt} \rightarrow U_j(s) = s\Phi_j(s) - \Phi_j(0) \\ u_j = L_j \frac{di_j}{dt} + \sum_{k=1}^m L_{jk} \frac{di_k}{dt} \rightarrow U_j(s) = sL_j I_j(s) + \sum_{k=1}^m sL_{jk} I_k(s) - \underbrace{\left[L_j i_{j0} + \sum_{k=1}^m L_{jk}^{\pm} i_{k0} \right]}_{\Phi_{j0} = E_{j0}} \end{cases} \quad (9.59)$$

În serie cu bobina se introduce în schema operațională o sursă fictivă de tensiune având t.e.m. E_{j0} egală numeric cu valoarea inițială a fluxului său Φ_{j0} ; $\left[E_{j0}^V = \Phi_{j0}^{Wb} \right]$.

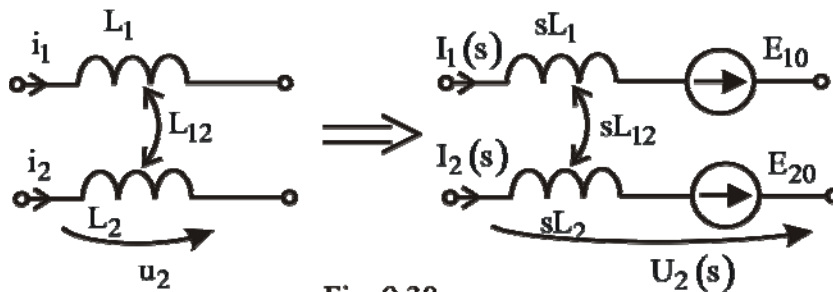


Fig. 9.30

În particular vom desena schema operațională pentru două bobine cuplate (figura 9.30) când sursele fictive au valorile:

$$\begin{cases} E_{10} = L_1 i_{10} \pm L_{12} i_{20} \\ E_{20} = L_2 i_{20} \pm L_{12} i_{10} \end{cases}$$

Tensiunii $u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm L_{12} \frac{di_1}{dt}$ îi corespunde imaginea $U_2(s)$ care cuprinde și sursa fictivă E_{20} :

$$U_2(s) = sL_2 I_2(s) \pm sL_{12} I_1(s) - E_{20} \quad (9.60')$$

Condensatorul:

$$\text{Ecuția de curenți: } i = C \frac{du}{dt} \xrightarrow{L} I(s) = sC u(s) - C u_{C0} \quad (9.60)$$

$\begin{cases} Y(s) = sC \text{ este admitanța operațională pentru condensator;} \\ I_{c0} = q_0 = C u_{C0} \text{ este curentul de scurt al sursei de curent fictive} \end{cases}$
corespunzătoare condițiilor inițiale:

Ecuția de tensiuni: $u_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_{c0} \xrightarrow{L} U_c(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_{c0}}{s} \quad (9.61)$

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(s) = \frac{1}{sC} \text{ este impedanța operațională a unui condensator} \\ E_{C0} = \frac{u_{C0}}{s} \text{ este t.e.m. a sursei fictive de tensiune corespunzătoare} \end{array} \right.$$

condiției sale inițiale.

Ecuției 9.61 îi corespunde o schemă operațională în care, în serie cu impedanța $\frac{1}{sC}$ se introduce o sursă de tensiune E_{C0} orientată invers cu sensul de referință al laturii.

Ecuției 9.60 îi corespunde o schemă operațională în care în paralel cu admitanța sC se introduce invers cu orientarea laturii o sursă de curent $I_{C0} \left(I_{C0}^A = q_0^C \right)$.

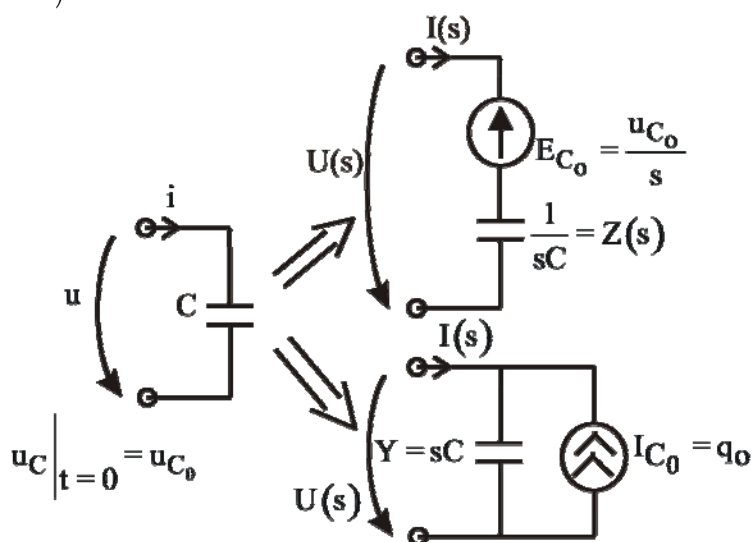
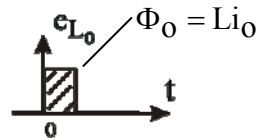


Fig. 9.31

Observație 1. Acestor surse fictive operaționale $E_{L0}, E_{C0}, I_{L0}, I_{C0}$ le corespund în domeniul timp surse “reale” corespunzătoare condițiilor inițiale: $e_{L0}, e_{C0}, i_{L0}, i_{C0}$, după cum urmează:

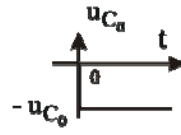
$$E_{L_0} = \Phi_0 = Li_0 = \text{cst} \rightarrow e_{L_0} = \Phi_0 \delta(t) = Li_0 \delta(t)$$

e_{L_0} - impuls de arie Φ_0

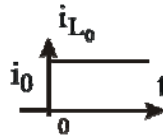


$$E_{C_0} = \frac{u_{C_0}}{s} \rightarrow e_{C_0} = u_{C_0} \cdot \gamma(t)$$

e_{C_0} - treaptă de valoare u_{C_0}

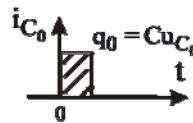


$$I_{L_0} = \frac{i_0}{s} \rightarrow i_{L_0} = i_0 \cdot \gamma(t) \text{ - treaptă de curent}$$



$$I_{C_0} = q_0 = Cu_{C_0} \rightarrow i_{C_0} = q_0 \cdot \delta(t)$$

i_{C_0} - impuls de valoare (arie) q_0



2. Un condensator poate să aibă condiție inițială pozitivă CI^+ sau condiție inițială negativă CI^- . În schema operațională sursele fictive corespunzătoare se așează întotdeauna corect (invers cu orientarea laturii), iar valoarea lor poate fi (\pm) ca în figura 9.32.

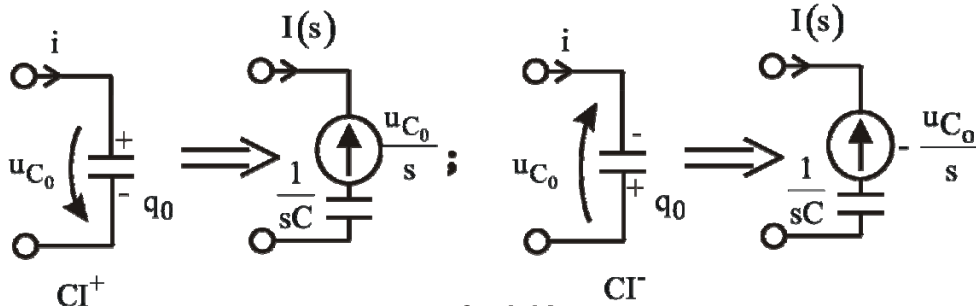


Fig. 9.32

Circuite serie în operațional

Ecuția de tensiuni pentru un circuit RLC serie este:

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt + u_{C_0} \rightarrow U(s) = \left(R + sL + \frac{1}{sC} \right) I(s) - Li_0 + \frac{u_{C_0}}{s} \quad (9.62)$$

$Z(s) = R + sL + \frac{1}{sC}$ este impedanța operațională a circuitului

$E_o = Li_o - \frac{u_{C_0}}{s}$ este t.e.m. a sursei fictive care echivalează condiția inițială a circuitului (L și C).

Atunci schema operațională a circuitului RLC serie este ca și în figura 9.33.

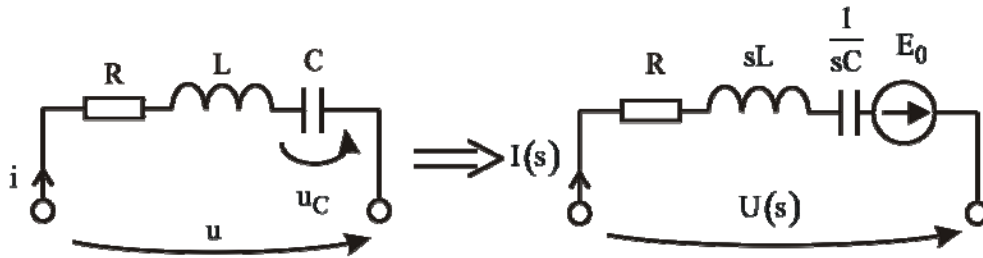


Fig. 9.33

Pentru a scrie operațional tensiunea de pe bobină sau pe condensator va trebui separat din E_o condiția inițială care-i revine fiecăruia:

$$\begin{cases} U_L(s) = sLI(s) - Li_o \\ U_C(s) = \frac{1}{sC} I(s) + \frac{u_{C_0}}{s} \end{cases} \quad (9.63)$$

9.3.3 Forma operațională a teoremelor lui Kirchhoff

Pentru un circuit oarecare cu s – subrețele, n – noduri și ℓ – laturi cu T1K se scriu $(n-s)$ ecuații independente în noduri, iar cu T2K se scriu $o = \ell - n + s$ ecuații independente pe ochiuri.

$$\begin{cases} \sum_{k \in b} i_k = 0; \quad b = \overline{1, n-s} \\ \sum_{k \in p} (u_{R_k} + u_{L_k} + u_{C_k}) = \sum_{k \in p} e_k; \quad p = \overline{1, o} \end{cases} \quad (9.64)$$

Aplicând transformata Laplace membru cu membru asupra sistemului (9.64) se obține:

- $i_k(t) \rightarrow I_k(s) = I_k$

$$\bullet u_{R_k} = R_k i_k \rightarrow U_{R_k} = R_k I_k$$

$$\bullet u_{L_k} = \frac{d\Phi_k}{dt} = \sum_{j=1}^{\ell} L_{kj} \frac{di_j}{dt} \rightarrow U_{L_k}(s) = s\Phi_k - \Phi_{k_0} = \sum_{j=1}^{\ell} sL_{kj} I_j - \Phi_{k_0}$$

unde $\Phi_{k_0} = \sum_{j=1}^{\ell} L_{kj} i_{j_0}$ - este valoarea inițială a fluxului prin bobina L_k

$$\bullet u_{C_k} = \frac{1}{C_k} \int_0^t i_k dt + u_{C_{k_0}} \rightarrow U_{C_k}(s) = \frac{I_k}{sC_k} + \frac{u_{C_{k_0}}}{s}$$

Sistemul (9.64) se poate scrie operațional sub forma:

$$\begin{cases} \sum_{k \in b} I_k(s) = 0 ; b = \overline{1, n-s} \\ \sum_{k \in p} \left\{ \left[\left(R_k + sL_k + \frac{1}{sC_k} \right) I_k + \sum_{j=1}^m sL_{kj} I_j \right] - \sum_{j=1}^m L_{kj} i_{j_0} + \frac{u_{C_{k_0}}}{s} \right\} = \sum_{k \in p} E_k(s) \end{cases} \quad (9.65)$$

Notăm:

$$E_{e_k}(s) = E_k(s) + \Phi_{k_0} - \frac{u_{C_{k_0}}}{s} \text{ - t.e.m. echivalentă laturii } k \text{ și formată}$$

din t.e.m. a sursei reale de pe latura $E_k(s)$ și t.e.m. ale surselor fictive ce echivalează condiția inițială a lui L_k :

$$E_k = \Phi_{k_0} = L_k i_{k_0} + \sum L_{kj} i_{j_0} \text{ sau a}$$

$$\text{lui } C_k: E_{C_{k_0}} = \frac{u_{C_{k_0}}}{s}$$

$$Z_k(s) = R_k + sL_k + \frac{1}{sC_k} \text{ este impedența operațională a laturii } k$$

$$Z_{kj}(s) = sL_{kj} \text{ - impedența operațională de cuplaj dintre } L_k \text{ și } L_j$$

TK scrise în (9.65) cu notațiile făcute devine:

$$\begin{cases} \sum_{k \in b} I_k = 0 \\ \sum_{k \in p} \left(Z_k I_k + \sum_{j=1}^m Z_{kj} I_j \right) = \sum_{k \in p} E_{ek} \end{cases} \quad (9.66)$$

T2K se enunță astfel: “suma algebrică a căderilor de tensiune operaționale pe elementele ochiului p este egală cu suma algebrică a t.e.m. operaționale din ochi”.

Algoritmul aplicării TK – operațional la studiul regimurilor tranzitorii presupune:

- Se studiază funcționarea circuitului înainte de comutație pentru a se stabili condițiile inițiale pentru fiecare bobină și condensator din circuit (i_{L_o}, u_{C_o}) .
- Se alcătuiește schema operațională care va conține partea din circuit care este în funcțiune după comutație ($t > 0$).
- Elementele schemei operaționale au impedanțele $R, sL, \frac{1}{sC}, sL_{kj}$ și în serie cu fiecare bobină și condensator se introduce câte o sursă fictivă de tensiune corespunzătoare condiției inițiale ale acelui element.
- Se aplică TK scriind ecuațiile (9.66) pe noduri și ochiuri independente, alese cu ajutorul grafului de circuit.
- Se rezolvă sistemul algebric de ecuații (9.66) și se obțin imaginile curenților din fiecare latură sub forma: $I_k(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$.
- Se revine în domeniul timp cu : transformata inversă (L^{-1}), tabelele de corespondență, teoremele lui Heaviside și se obțin curenții tranzitorii din laturi $i_k(t)$.
- Schemei operaționale, odată desenată, i se poate aplica oricare dintre teoremele și metodele de analiză utilizate de teoria circuitelor pentru studiul regimului permanent (curenți ciclici, potențiale la noduri, variante matriciale, generatoare echivalente etc.). Excepție față de regimul permanent sinusoidal fac

teoremele de conservare a puterilor, care erau condiționate de caracterul periodic al mărimilor, în regim tranzitoriu, unde mărimile nu sunt periodice rămâne valabilă doar teorema de conservare a puterilor instantanee, evident fără aplicabilitate deosebită.

Observație: În regim permanent, pentru un dipol pasiv, se poate întotdeauna scrie $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$. În regim tranzitoriu nu este suficient să fie pasiv (fără surse) ci trebuie ca

toate elementele sale de tip L și C să fie în condiții inițiale nule ($CI=0$), altfel în schema operațională apar surse fictive corespunzătoare acestor condiții inițiale. Deci pentru circuite pasive și cu condiții inițiale nule se poate scrie:

$$Z(s) = \frac{U(s)}{I(s)}$$

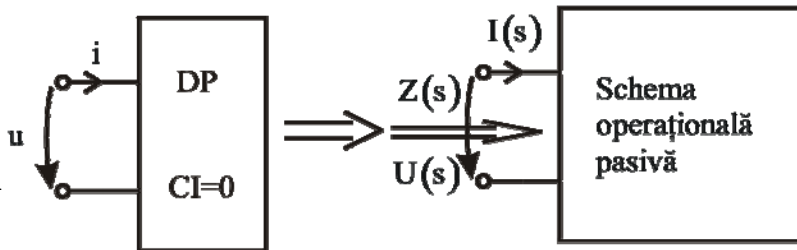


Fig. 9.35'

Aplicație:

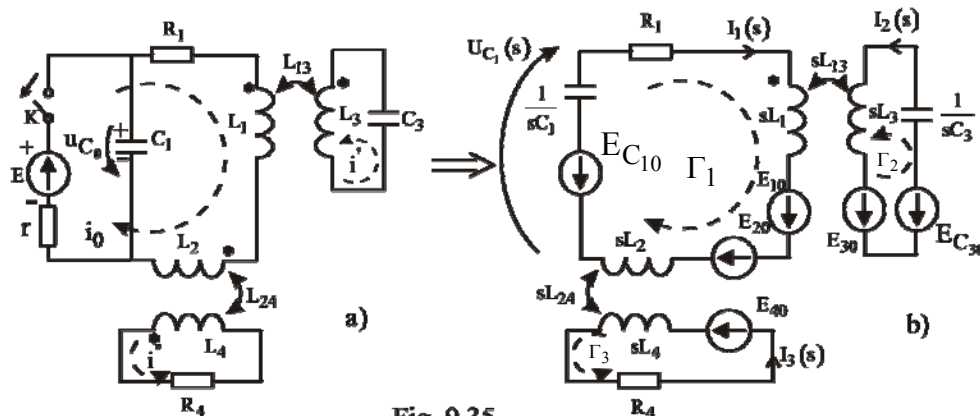


Fig. 9.35

Circuitul din figura 9.35 – a funcționează în regim permanent; circula curentul $i_0 = \frac{E}{r + R_1}$, iar C_1 este încărcat cu tensiunea $u_{C_0} = R_1 i_0$.

În cele două bucle nu există curent $i'=0$ și $i''=0$ (fluxurile fiind constante nu

induc t.e.m.). La momentu $t=0$ se deschide contactul k și latura cu sursă iese din funcțiune.

În figura 9.35 – b este desenată schema operațională a circuitului, în serie cu fiecare bobină și condensator este plasată câte o sursă corespunzătoare condiției sale inițiale:

$$\begin{aligned} E_{10} &= L_1 i_0; E_{20} = L_2 i_0; E_{30} = L_{13} i_0 = \Phi_{30}; E_{40} = L_{24} i_0 = \Phi_{40}; \\ E_{C_{10}} &= -\frac{u_{C_{10}}}{s}; E_{C_{30}} = 0; \end{aligned} \quad (9.67)$$

Pe schema operațională cu topologia $[s=3, n=3, \ell=3]$ scriem ecuațiile de funcționare cu TK:

$$\begin{cases} \left(R_1 + s(L_1 + L_2) + \frac{1}{sC_1} \right) I_1 + sL_{13}I_2 - sL_{24}I_3 = E_{10} + E_{20} - E_{C_{10}} \\ sL_{13}I_1 + \left(sL_3 + \frac{1}{sC_3} \right) I_2 = E_{30} - E_{C_{30}} \\ -sL_{24}I_1 + (R_4 + sL_4)I_3 = E_{40} \end{cases} \quad (9.68)$$

Prin rezolvarea sistemului 9.68 rezultă $I_1(s)$, $I_2(s)$, $I_3(s)$. Aplicând transformata Laplace inversă se obțin soluțiile de regim tranzitoriu $i_1(t)$, $i_2(t)$ și $i_3(t)$.

Tensiunea la bornele condensatorului C_1 se poate deduce astfel:

$$u_{C_1}(t) = \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1(t) dt + u_{C_{10}}$$

$$\text{sau:} \quad U_{C_1}(s) = \frac{I_1(s)}{sC_1} + E_{C_{10}} \rightarrow u_{C_1}(t) = L^{-1}[U_{C_1}(s)].$$