

9.4 Comutații forțate

Comutații forțate(ideale, impropii) într-un circuit sunt cele la care nu se respectă condițiile(9.4), (9.8) respectiv $i_L(t)$ și $u_C(t)$ nu mai sunt variabile de stare, controlate, ele pot avea variații prin salt, discontinuități. O *comutație forțată* apare într-un circuit dacă:

- în urma comutației două bobine L_1 și L_2 cu “istorie” diferită ($i_{10-} \neq i_{20-}$) ajung în serie, deci: $i_{10+} = i_{20+}$.
- în urma comutației o bobină ajunge în serie cu o sursă ideală de curent, chiar dacă: $i_{0-} \neq i_{sc0-}$, imediat după comutație: $i_{0+} = i_{sc0+}$.
- într-un nod b de circuit (figura 9.36) concurează două laturi cu bobine și cu surse ideale de curent. Rămâne adevărată T1K: $\sum_{k \in \text{nod } b} i_{k0-} = 0$ și $\sum_{k \in \text{nod } b} i_{k0+} = 0$, numai că diferenții curenți vor prezenta discontinuități
- două condensatoare cu “istorie” diferită ($u_{c10-} \neq u_{c20-}$) ajung în paralel, deci: $u_{c10+} = u_{c20+}$.
- un condensator ajunge în paralel cu o sursă ideală de tensiune: $u_{c0-} \neq e_{0-}$ dar $u_{c+} = e_{0+}$.
- O buclă formată numai din laturi cu condensatoare și surse ideale de tensiune pentru care T2K înseamnă: $\sum_{k \in \text{ochi}} u_{k0-} = 0$ și $\sum_{k \in \text{ochi}} u_{k0+} = 0$, numai că diferențele tensiunii vor avea discontinuități de la $t = 0_-$ la $t = 0_+$.

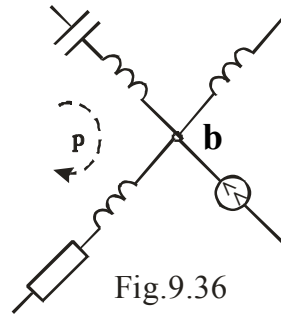


Fig.9.36

În astfel de comutații curenții $i_L(t)$ au discontinuități care duc la impulsuri de t.e.m. cu valori foarte mari la bornele bobinelor iar discontinuitățile tensiunilor $u_C(t)$ duc la impulsuri foarte mari de curent prin condensatoare. De fapt egalizarea condițiilor inițiale la $t = 0_+$ se realizează prin aceste impulsuri.

9.4.1 Teorema condițiilor inițiale pentru comutații forțate la condensatoare

Fie o secțiune Σ_1 ce conține numai laturi cu condensatoare (figura 9.37).

Curentul prin latura k este $i_k = \frac{dq_k}{dt}$ iar sarcina de pe armătura lui C_k va fi:

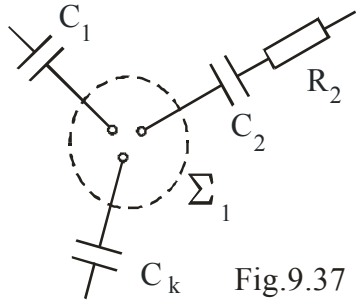


Fig.9.37

$$q_k(t) = \int_{-\infty}^t i_k(t') dt = q_k(t_0) + \int_{t_0}^t i_k(t') dt' \quad (9.69)$$

momentul t' fiind oarecare: $t' \in (-\infty, t)$

iar $i_k(t') = C_k \frac{du_k(t')}{dt'}$. Cum pentru

toate laturile ce converg în secțiunea

Σ_1 este valabilă (1.18), putem scrie:

$$\sum_{k \in \Sigma_1} i_k(t') = 0 \Rightarrow \sum_{k \in \Sigma_1} q_k(t) = \sum_{k \in \Sigma_1} C_k u_k(t) = ct \quad (9.70)$$

Cum (9.70) este valabilă pentru orice moment " t ", ele rămân valabile și pentru momentul inițial (momentul comutației t_0):

$$\sum_{k \in \Sigma_1} q_k(t_0) = ct \Leftrightarrow \sum_{k \in \Sigma_1} q_k(0_-) = \sum_{k \in \Sigma_1} q_k(0_+) \quad (9.71)$$

Relația reprezintă *teorema condițiilor inițiale* pentru condensatoare aflate în comutație forțată. La comutații naturale pentru fiecare condensator în parte era adevărat că: $q_{0_-} = q_{0_+}$ (relația 9.9) iar la comutații forțate doar suma pentru toate condensatoarele ce converg într-un nod (sau într-o secțiune Σ_1) este continuă în jurul momentului $t = 0$ (relația 9.71).

9.4.2 Teorema condițiilor inițiale pentru comutații forțate la bobine

Considerăm o buclă Γ (un ochi p) care cuprinde cel puțin două bobine aflate în comutație forțată (figura 9.38).

Tensiunea la bornele bobinei L_k este: $u_k = \frac{d\Phi_k}{dt}$ iar fluxul prin bobina L_k se poate scrie astfel:

$$\Phi_k(t) = \int_{-\infty}^t u_k(t') dt' = \Phi_k(t_0) + \int_{t_0}^t u_k(t') dt' \quad (9.72)$$

momentul t' fiind oarecare $t' = (-\infty, t)$. Pentru bucla Γ din figura 9.38 sau pentru ochiul p din figura 9.36, T2K ne dă :

$$\sum_{\substack{k \in \Gamma \\ (p)}} u_k(t') = 0 \rightarrow \sum_{k \in \Gamma} \Phi_k(t) = \sum_{k \in \Gamma} L_k i_k(t) = ct \quad (9.73)$$

Cum (9.73) sunt adevărate pentru orice moment t , ele rămân valabile și pentru momentul inițial t_0 (sau $t = 0$):

$$\sum_{k \in \text{ochi}} L_k i_k(t_0) = ct \rightarrow \sum_{k \in \text{ochi}} \Phi_k(0_-) = \sum_{k \in \text{ochi}} \Phi_k(0_+) \quad (9.74)$$

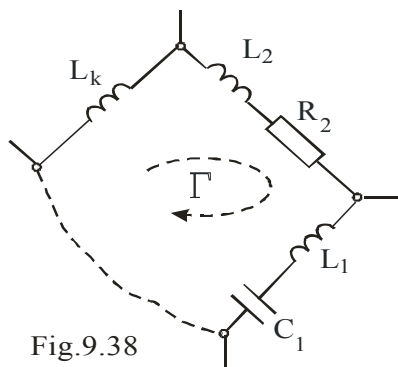


Fig.9.38

Relația (9.74) reprezintă *teorema condițiilor inițiale* pentru bobine aflate în comutație forțată. La o comutație naturală fluxul magnetic Φ_k și curentul i_{L_k} ale fiecărei bobine sunt variabile de stare: $\Phi_{0_-} = \Phi_{0_+}$ și $i_{L_{0_-}} = i_{L_{0_+}}$.

La comutații forțate doar suma fluxurilor pentru toate bobinele din bucla Γ (sau din ochiul p) este continuă în jurul momentului de comutație $t = 0$. (relația 9.74)

9.4.3 Aplicație

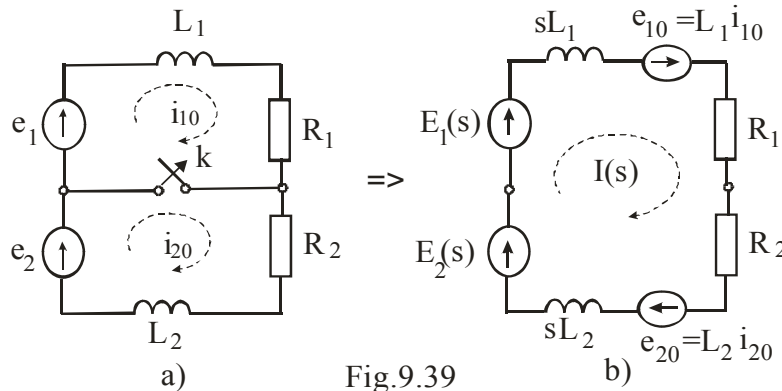


Fig.9.39

Pentru circuitul din figura 9.39 contactul k se deschide la momentul $t = 0$, condiția inițială a celor două bobine este: $i_{10-} \neq i_{20-}$. La momentul $t = 0_+$ cele două bobine ajung în serie dar cu curenți diferiți prin ele și vor avea aceeași condiție inițială i_{0+} , unde:

$$i_{0+} \neq i_{10-} \neq i_{20-} \quad (9.75)$$

Ecuția de tensiuni scrisă pentru schema operațională a circuitului din figura 9.39-b este:

$$s(L_1 + L_2)I(s) + (R_1 + R_2)I(s) = E_1(s) + E_2(s) + (L_1 + L_2)i_{0+} \quad (9.76)$$

Conform cu relația (9.74): $\Phi_{\Gamma(0-)} = \Phi_{\Gamma(0+)}$, deci:

$$L_1 i_{10-} + L_2 i_{20-} = (L_1 + L_2) i_{0+} \rightarrow i_{0+} = \frac{L_1 i_{10-} + L_2 i_{20-}}{L_1 + L_2} \quad (9.77)$$

În urma comutației ($t = 0$) curenții din cele două bobine vor avea un salt :

$$\begin{cases} \Delta i_{10} = i_{0+} - i_{10-} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} (i_{20-} - i_{10-}) \\ \Delta i_{20} = i_{0+} - i_{20-} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} (i_{10-} - i_{20-}) \end{cases} \quad (9.78)$$

Fluxul magnetic total al ochiului care cuprinde cele două bobine aflate în comutație forțată va avea o variație continuă în jurul momentului $t = 0$:

$$\begin{cases} \Phi_{0+} = (L_1 + L_2) i_{0+} \\ \Phi_{10-} = L_1 i_{10-} \\ \Phi_{20-} = L_2 i_{20-} \end{cases} \leftrightarrow \Phi_{0+} = \Phi_{10-} + \Phi_{20-} = \Phi_{0-} \quad (9.79)$$

T.e.m indusă în ochiul Γ ce cuprinde cele două bobine este:

$$e_{\Gamma} = -\frac{\Delta \Phi_{\Gamma}}{\Delta t} = -\frac{\Phi_{\Gamma(0+)} - \Phi_{\Gamma(0-)}}{\Delta t} = 0 \quad (9.80)$$

dar la bornele fiecărei bobine se induce câte un impuls de t.e.m, dar cele două impulsuri e_{10} și e_{20} sunt în opoziție : $e_0 = e_{10} + e_{20} = 0$.

$$\begin{cases} e_{10} = -L_1 \frac{\Delta i_{10}}{\Delta t} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (i_{10-} - i_{20-}) \delta(t) \\ e_{20} = -L_2 \frac{\Delta i_{20}}{\Delta t} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} (i_{20-} - i_{10-}) \delta(t) \end{cases} \quad (9.81)$$

Cele două impulsuri mari de t.e.m solicită însă izolația între spirele bobinelor.

Observație:

Dacă sursele fictive corespunzătoare condițiilor inițiale pentru elementele L și C se calculează cu valorile la $t = 0^-$: (u_{C0^-}, i_{L0^-}) , atunci schemele operaționale permit să obținem soluția corectă, indiferent de tipul comutației (naturală sau forțată).

9.5 Analiza operațională a circuitelor electrice în regim tranzitoriu pe baza transformatei Fourier

Clasa funcțiilor care admit transformată Fourier este mai mică decât clasa funcțiilor care au transformată Laplace.

Transformata Fourier (imaginea Fourier) *bilaterală* pentru o funcție original $f(t)$ se definește prin:

$$\underline{F}(j\omega) = \underline{F}^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9.82)$$

Pentru ca o funcție $f(t)$ să admită transformată Fourier trebuie :

- să satisfacă condițiile Dirichlet (discontinuități finite, număr finit de intervale de monotonie).
- să fie *absolut integrabilă* pe intervalul $(-\infty, \infty)$, respectiv integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt \text{ să fie convergentă; aceasta impune anularea funcției pentru}$$

$t \rightarrow \pm\infty$, $f(-\infty) = f(+\infty) = 0$ respectiv funcția $f(t)$ să nu persiste în circuit (să fie amortizată) și exclude posibilitatea ca funcția $f(t)$ să fie *periodică* (cu perioadă finită). Pe scurt, doar semnalele de *tip impuls* (și care nu se repetă periodic) admit transformată Fourier.

Pentru funcții nule la $t < 0$, transformata bilaterală (9.82) devine o *transformată Fourier unilaterală* :

$$\underline{F}(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (9.83)$$

expresie ce seamănă cu (9.48) care definea transformata Laplace; motiv pentru care se spune că transformata Fourier unilaterală se obține din transformata Laplace a acelei funcții pentru $s = j\omega$; $\underline{F}(j\omega) = F(s)|_{s=j\omega}$, cu condiția ca $f(t)$ să admită transformată Fourier.

Sursele corespunzătoare condițiilor inițiale pentru o bobină sunt de tip impuls: $e_{L_0} = \Phi_0 \cdot \delta(t) = L_{i_0} \cdot \delta(t)$, deci admit transformată Fourier iar cele pentru condensatoare: $e_{C_0} = -u_{C_0} \cdot \gamma(t)$ sunt de tip treaptă și nu admit transformată Fourier. Din acest motiv analiza operațională Fourier este destinată circuitelor liniare aflate în condiții inițiale nule.

Transformata Fourier inversă (integrala Fourier) este:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} dj\omega \quad (9.84)$$

care poate fi privită ca o descompunere a funcției neperiodice, de tip impuls $f(t)$ într-o infinitate de componente sinusoidale (reprezentate în complex) cu pulsații ce iau toate valorile $(-\infty, \infty)$, deci are un spectru continuu (la semnale periodice aveam dezvoltare în serie Fourier și spectrul era discret). Modulul $F(\omega) = |F(j\omega)|$ se mai numește *densitatea spectrală a amplitudinilor*. Din acest motiv analiza operațională Fourier se mai numește *analiză spectrală*.

Dacă o funcție $g(t)$ poate fi descompusă într-o componentă pară $g_p(t)$ și alta impară $g_i(t)$: $g(t) = g_p(t) + g_i(t)$, atunci:

- transformata Fourier a unei funcții reale și pară de t este o funcție reală și pară de ω :

$$G_p(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_p(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} g_p(t) \cos \omega t dt \quad (9.85)$$

- transformata Fourier a unei funcții reale și impare de t este o funcție impară și imaginară de ω :

$$G_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_i(t) e^{-j\omega t} dt = -j2 \int_0^{\infty} g_i(t) \sin \omega t dt \quad (9.86)$$

respectiv:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] = G_p(j\omega) = R(\omega); \quad \operatorname{Im}[G(j\omega)] = G_i(j\omega) = jX(\omega); \quad (9.87)$$

iar transformata inversă înseamnă:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} R(\omega) \cos \omega t d\omega + \frac{-2}{\pi} \int_0^{\infty} X(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (9.88)$$

relație care reprezintă forma trigonometrică a *dezvoltării în integrală Fourier*, analog cu *dezvoltarea în serie Fourier*.

Descompunerea unei funcții $f(t)$ în componentă pară și impară atrage după sine descompunerea transformatei Fourier într-o componentă reală $R(\omega)$ și una imaginară $X(\omega)$: $\underline{F}(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ iar modulul și faza transformatei sunt:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F(-\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + [-X(\omega)]^2} \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = -\varphi(-\omega) \end{aligned} \quad (9.89)$$

La seria Fourier A_k și B_k se măsoară în V sau A iar la transformata Fourier $R(\omega)$ și $X(\omega)$ se măsoară în V/Hz sau A/Hz.

Aplicarea metodei operaționale Fourier la studiul unui regim tranzitoriu presupune:

- Transformata Fourier unilaterală are proprietățile transformatei Laplace pentru $s = j\omega$ (dacă există transformata) și prezintă interes practic dacă se cunosc impedențele operaționale ale elementelor $\left(Z_R = R, Z_L = j\omega L, Z_C = \frac{1}{j\omega C} \right)$ prin analogie cu impedențele operaționale Laplace $\left(R; sL; \frac{1}{sc} \right)$. Deosebirea față de regimul permanent sinu-

soidal constă în faptul că acolo $\left(R, j\omega L, \frac{1}{j\omega C} \right)$ erau *numere complexe* iar aici sunt *funcții complexe* de $(j\omega)$. Aici, pentru o structură mare de circuit, impedența operațională $Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$ se poate determina și pe cale experimentală (prin puncte) făcând măsurarea impedențelor ca și în regim sinusoidal dar pentru diverși $\omega [\omega \in (0, \infty)]$.

- Deoarece pentru $t \rightarrow \infty$ toate mărimile trebuie să tindă la zero, înseamnă că se pot studia numai acele regimuri tranzitorii care nu au componentă permanentă.



- Dezvoltarea în integrală Fourier fiind interpretată ca o descompunere în componente armonice (sinusoidale) elementare, studiul se face aplicând teorema superpoziției.

- Considerăm un dipol liniar, pasiv și în repaus ($x_i(t) = 0$ pentru $t < 0$) căruia i se aplică la momentul $t = 0$ mărimea de intrare $x_i(t)$ a cărei transformată Fourier este:

$$\underline{X}_i(j\omega) = \int_0^{\infty} x_i(t) e^{-j\omega t} dt = \underline{X}_i(s)|_{s=j\omega} \quad (9.90)$$

Dacă $\underline{H}(j\omega)$ este *funcția de transfer* a dipolului, atunci transformata Fourier a mărimii de ieșire este: $\underline{X}_e(j\omega) = \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{X}_i(j\omega)$ iar mărimea de ieșire se scrie sub forma:

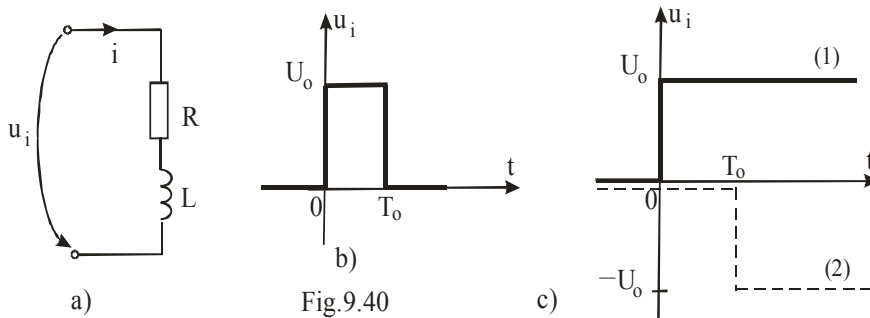
$$x_e(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underline{H}(j\omega) \cdot \underline{X}_i(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} \underline{X}_e(j\omega) e^{j\omega t} dj\omega \quad (9.91)$$

$\underline{H}(j\omega)$ poate avea caracter de: impedanță, admitanță sau funcție complexă după cum x_i și x_e sunt ambele tensiuni sau curenți sau una tensiune, cealaltă curent.

- Avantajul metodei operaționale Fourier constă în faptul că se operează cu funcții de circuit $\underline{H}(j\omega)$ formal identice cu cele din regimul permanent sinusoidal dar care pot fi determinate pe cale experimentală la diverse frecvențe (ω) și apoi le aproximează analitic. Funcția $\underline{H}(j\omega)$ se interpretează ca răspunsul circuitului la o excitație sub formă de impuls Dirac: dacă $x_i = \delta(t)$, atunci $\underline{X}_i = 1$ iar $\underline{X}_e = \underline{H}(j\omega)$.

Aplicație:

Unui circuit RL aflat în condiții inițiale nule i se aplică la momentul $t = 0$ un impuls dreptunghiular de tensiune. Să se determine răspunsul $i(t)$.



Semnalul $u_i(t)$ se consideră că provine din superpoziția a două drepte traslate (figura 9.40-c):

$$u_i(t) = U_o[\gamma(t) - \gamma(t - T_o)] \quad (9.92)$$

și fiind un semnal impuls satisface condiția de a avea transformată Fourier:

$$\underline{U}_i(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_i(t) e^{-j\omega t} dt = U_o \int_0^{T_o} e^{-j\omega t} dt = \frac{U_o}{j\omega} (1 - e^{-j\omega T_o}) \quad (9.93)$$

Impedanța operațională a circuitului este: $\underline{Z}(j\omega) = R + j\omega L$ iar răspunsul circuitului este:

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{\underline{U}_i(j\omega)}{\underline{Z}(j\omega)} = \frac{U_o}{j\omega(R + j\omega L)} (1 - e^{-j\omega T_o}) \quad (9.94)$$

Pentru a determina răspunsul original $i(t)$ vom descompune pe $\underline{I}(j\omega)$ în fracții simple:

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{U_o}{R} \left[\frac{1}{j\omega} - \frac{1}{j\omega + \frac{R}{L}} \right] \cdot (1 - e^{-j\omega T_o})$$

Deci curentul absorbit (originalul lui $\underline{I}(j\omega)$) va fi:

$$i(t) = \frac{U_o}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \gamma(t) - \frac{U_o}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}(t-T_o)} \right) \gamma(t - T_o) = i_1(t) + i_2(t) \quad (9.95)$$

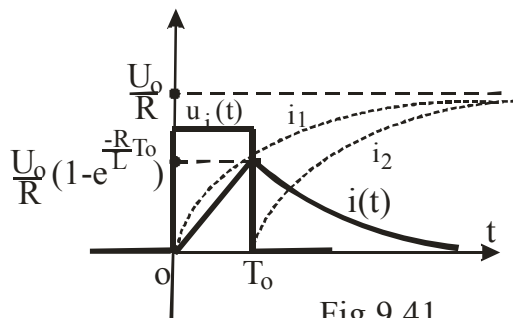


Fig.9.41

Soluția este reprezentată grafic în figura 9.41; curentul $i(t)$ este superpoziția celor doi curenți i_1 și i_2 translați cu T_o .

9.6 Analiza circuitelor electrice în regim tranzitoriu în domeniul timp

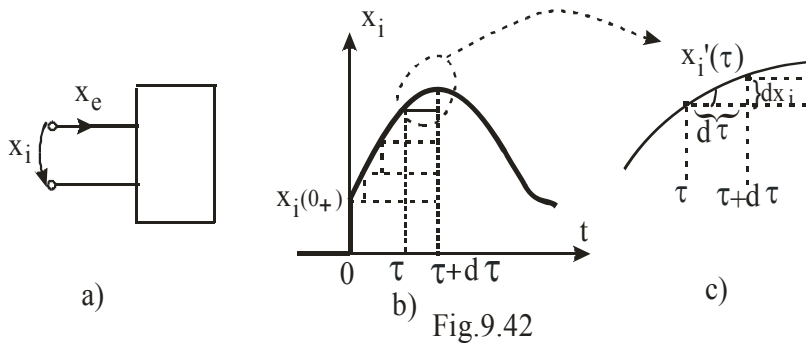
Metodele de analiză în domeniul timp se aplică circuitelor liniare, pasive și aflate în condiții inițiale nule, atunci când la intrare se aplică un semnal $x_i(t)$ nu prea complicat ca formă sau îl pot aproxima prin suprapunerea unor semnale cu variație simplă.

9.6.1 Răspunsul unui circuit la o excitație dată în funcție de răspunsul circuitului la o treaptă unitate (metoda integralei Duhamel)

Semnalul de intrare $x_i(t)$ îl descompunem într-o succesiune de trepte retardate cu câte $d\tau$ și de înălțime dx_i (ca în figura 9.42-b,c) în care :

$$dx_i = x_i'(\tau)d\tau$$

iar prima treaptă: $x_i(0_+) \cdot \gamma(t)$ este dată de valoarea semnalului de intrare x_i în momentul $t = 0$.



Semnalul de intrare $x_i(t)$ se scrie ca o superpoziție a acestor trepte retardate.

$$x_i(t) = x_i(0_+) \gamma(t) + \int_0^t x_i'(\tau) \cdot \gamma(t - \tau) d\tau \quad (9.96)$$

Dacă se cunoaște răspunsul circuitului dat $f(t)$ la semnalul treaptă unitate aplicat la intrare $\gamma(t)$, atunci putem determina răspunsul la orice semnal aproximabil prin trepte. Funcția $f(t)$ care reprezintă răspunsul la treapta unitate se numește *răspuns tranzitoriu (funcție indicială)* și poate fi calculată pentru un circuit dat prin orice altă metodă.

$\gamma(t) \rightarrow f(t)$ -răspunsul la treapta unitate

$A\gamma(t) \rightarrow Af(t)$ -răspunsul la treapta de înălțime (valoarea) A .

$x_i'(\tau) \gamma(t - \tau) \rightarrow x_i'(\tau) f(t - \tau)$ -răspunsul la treapta translatată cu τ și de valoare $x_i'(\tau)$.

Atunci, aplicând teorema superpoziției, răspunsul la semnalul $x_i(t)$ aproximabil prin trepte sub forma (9.96) va fi:

$$x_e(t) = x_i(0_+) f(t) + \int_0^t x_i'(\tau) f(t - \tau) d\tau \quad (9.97)$$

Printr-o schimbare de variabilă, produsul de convoluție din (9.97) se scrie

$$\text{sub forma: } x_e(t) = x_i(0_+) f(t) + \int_0^t x_i'(t-\tau) f(\tau) d\tau \quad (9.98)$$

iar integrând prin părți în (9.97) și (9.98) se obțin formele duale:

$$x_e(t) = x_i(t) f(0_+) + \int_0^t x_i(\tau) f'(t-\tau) d\tau \quad (9.99)$$

$$x_e(t) = x_i(t) f(0_+) + \int_0^t x_i(t-\tau) f'(\tau) d\tau \quad (9.100)$$

Formele (9.99) și (9.100) se pot aplica și când semnalul $x_i(t)$ are discontinuități de prima speță întrucât nu apare derivata sa. Deasemenea se preferă una dintre cele patru forme de calcul a răspunsului (9.97, 9.98, 9.99, 9.100) în funcție de forma lui $x_i(t)$ și funcția indicială $f(t)$, respectiv care dintre aceste relații duc la un volum minim de calcul.

Observații:

Dacă $F_1(s)$ și $F_2(s)$ sunt transformatele Laplace ale funcțiilor $f_1(t)$ și $f_2(t)$ atunci imaginii $F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$ îi corespunde (conform teoremei lui Borell) originalul $f(t)$ dat de un produs de convoluție:

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \quad (9.101)$$

iar funcției imagine : $F(s) = s F_1(s) \cdot F_2(s)$, conform teoremei lui Duhamel, îi corespunde

$$\text{originalul: } f(t) = \frac{d}{dt} \cdot \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t-\tau) d\tau \quad (9.102)$$

Expresia (9.102) dezvoltată duce la formele (9.97)...(9.100).

Dacă la intrarea unui circuit aflat în repaus se aplică la momentul $t = 0$ o treaptă de tensiune $\gamma(t)$, atunci la ieșire apare curentul $f(t)$. În acest caz răspunsul tranzitoriu al circuitului $f(t)$ reprezintă o *admitanță indicială*. Aplicând o treaptă de curent, la ieșire apare tensiunea $f_1(t)$, care este în acest caz o *impedanță indicială*. Dacă la intrare se aplică o treaptă de tensiune și răspunsul este tot tensiune $f_2(t)$, atunci $f_2(t)$ este *funcție de transfer tranzitorie*.

Dacă imaginea treptei unitate este $\frac{1}{s}$ iar $F(s)$ este imaginea lui $f(t)$,

atunci când se aplică $u(t)$ și răspunsul este $i(t)$, putem scrie : $I(s) = U(s)Y(s)$.

Răspunsul tranzitoriu scris cu Laplace este : $F(s) = \frac{1}{s} Y(s) = \frac{1}{s} \frac{I(s)}{U(s)}$,

respectiv răspunsul $i(t)$ este de forma (9.102).

$$I(s) = sF(s)U(s) \rightarrow i(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t u(\tau)f(t-\tau)d\tau = \frac{d}{dt} \int_0^t f(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (9.103)$$

Dezvoltând (9.103) se obțin chiar expresiile (9.97), (9.98), (9.99) și (9.100).

Metoda integralei Duhamel este utilă mai ales atunci când se cunoaște expresia funcției indiciale (răspunsul tranzitoriu) $f(t)$. Logica metodei s-ar prezenta sub forma : ” Vrei să știi cum răspunde circuitul la un semnal $x_i(t)$? Spune-mi cum răspunde circuitul la o treaptă unitate (adică cine este $f(t)$) , c-apoi îți spun eu cum răspunde la orice semnal $x_i(t)$ aproximabil prin trepte translate ”.

Circuitul RC: Dacă se conectează la o sursă de tensiune continuă de valoare E^V atunci $u(t) = E \gamma(t)$ iar răspunsul în curent i și în tensiune u_C este de forma: (9.26) și (9.27):

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad u_C = E(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (9.104)$$

Când se aplică o treaptă unitate ($E = 1V$) atunci : $u = \gamma(t)$ și răspunsul tranzitoriu va fi de forma:

$$f_i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad ; \quad f_u(t) = 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \quad (9.105)$$

Circuitul RL : Cuplarea circuitului la o tensiune continuă : $u = E \cdot \gamma(t)$, are răspunsul de forma: (9.16), (9.18):

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad ; \quad u_L = L \frac{di}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t} \quad (9.106)$$

A aplica o treaptă unitate de tensiune este echivalent cu a cupla circuitul la o sursă cu $E = 1V$, răspunsul tranzitoriu în curent $f_i(t)$ și în tensiune $f_u(t)$ vor fi:

$$f_i(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t}) \quad ; \quad f_u(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \quad (9.107)$$

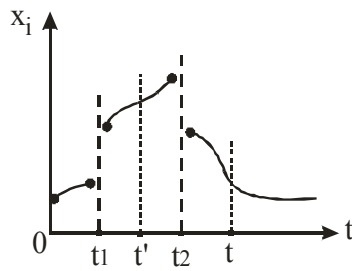


Fig.9.43

Dacă semnalul de intrare $x_i(t)$ prezintă discontinuități ca în figura 9.43, atunci răspunsul circuitului calculat cu integrala Duhamel este de forma :

$$\begin{aligned}
 x_e(t) = & \left[x_i(0)f(t) + \int_0^{t_1} x_i'(\tau) f(t-\tau) d\tau \right] + \\
 & + \left\{ [x_i(t_{1+}) - x_i(t_{1-})] f(t-t_1) \gamma(t-t_1) + \int_{t_1}^{t_2} x_i'(\tau) f(t-\tau) d\tau \right\} \quad (9.108) \\
 & + \left\{ [x_i(t_{2+}) - x_i(t_{2-})] f(t-t_2) \gamma(t-t_2) + \int_{t_2}^t x_i'(\tau) f(t-\tau) d\tau \right\}
 \end{aligned}$$

Expresia (9.108) este adevărată dacă ne interesează răspunsul la un moment $t > t_2$ iar dacă ne interesează pentru $t' \in (t_1, t_2)$ atunci ultimul termen din (9.108) va lipsi iar la termenul al doilea limita superioară a integralei este t' și nu t_2 .

O discontinuitate cu salt (+) ca în momentul t_1 , este privită ca o treaptă pozitivă, de valoare egală saltul funcției care apare în momentul t_1 iar un salt (-), ca în momentul t_2 , este privită ca o treaptă negativă ce apare în acel moment. (tratarea discontinuităților de speță I).

9.6.2 Răspunsul unui circuit la un semnal dat în funcție de răspunsul circuitului la un impuls unitate

Impulsul unitate $\delta(t)$ permite exprimarea oricărei funcții $y(t)$, în punctele ei de continuitate, prin integrala:

$$y(t) = \int_0^t y(\tau) \delta(t-\tau) d\tau \quad (9.109)$$

Aceasta se poate interpreta ca o descompunere a funcției $y(t)$ într-o succesiune de componente $(y(\tau)d\tau) \cdot \delta(t - \tau)$ reprezentând fiecare câte un impuls de arie (valoare) „ $y(\tau)d\tau$ ” care apare în momentul $t = \tau$, deoarece această componentă este nulă pentru $\tau \neq t$ și egală cu $y(t)$ pentru $\tau = t$, deci o succesiune infinită de impulsuri așezate alături, fiecare egal cu valoarea funcției în acel punct. Deci o mărime de intrare $x_i(t)$ se poate descompune într-o succesiune de impulsuri finite și retardate sub forma:

$$x_i(t) = \int_0^t x_i(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (9.110)$$

Dacă $v(t)$ este răspunsul unui circuit cu condiții inițiale nule la un semnal impuls unitate $\delta(t)$, numit *răspuns tranzitoriu la impuls unitate*, atunci, ținând seama de caracterul liniar al circuitului, considerăm că:

$\delta(t) \rightarrow v(t)$ - răspunsul la impulsul unitate ce apare în momentul $t = 0$

$A\delta(t - \tau) \rightarrow Av(t - \tau)$ -răspunsul la impulsul de arie A ce apare translatat cu τ

$x_i(\tau) \delta(t - \tau) \rightarrow x_i(\tau) v(t - \tau)$ - răspunsul la impulsul de valoare $x_i(\tau)$ ce apare translatat cu τ .

Cu teorema superpoziției, răspunsul la o infinitate de impulsuri translate cu câte $d\tau$, sub forma(9.110) se scrie astfel:

$$x_e(t) = \int_0^t v(t - \tau) x_i(\tau) d\tau \quad ; \quad x_e(t) = \int_0^t v(\tau) x_i(t - \tau) d\tau \quad (9.111)$$

Aceste relații (9.111) se pot aplica numai dacă în intervalul $(0 - t)$ funcția de intrare (excitația) $x_i(t)$ este continuă. Dacă $x_i(t)$ conține un număr finit de puncte de discontinuitate, acestea se separă și răspunsul la acestea (privite ca trepte de tensiune) se calculează separat.

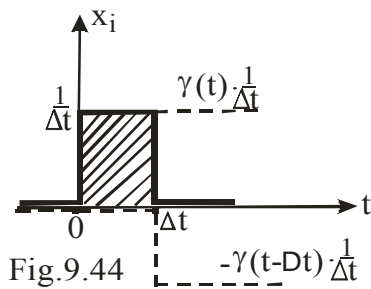


Fig.9.44

Un impuls unitate (aria=1 și durată $\Delta t \ll$) din figura 9.44 poate fi privit ca o superpoziție de două trepte:

$$x_i(t) = \frac{1}{\Delta t} [\gamma(t) - \gamma(t - \Delta t)] = \gamma'(t) \quad (9.112)$$

iar răspunsul $v(t)$ la acest impuls va fi:

$$v(t) = \frac{1}{\Delta t} [f(t) - f(t - \Delta t)] = f'(t) \quad (9.113)$$

Deci răspunsul la impulsul unitate $v(t)$ este derivata funcției indiciale $f(t)$ (răspunsul la treapta unitate) : $v(t) = f'(t)$.

9.6.3 Răspunsul unui circuit la un semnal dat în funcție de răspunsul la un semnal rampă unitate

Semnalul rampă unitate $r(t)$ (de pantă: $\text{tg} \frac{\pi}{4} = 1$), rampă oarecare (de pantă $k = \text{tg} \alpha$) și rampă traslatată, se definesc cum se indică în figura 9.45:

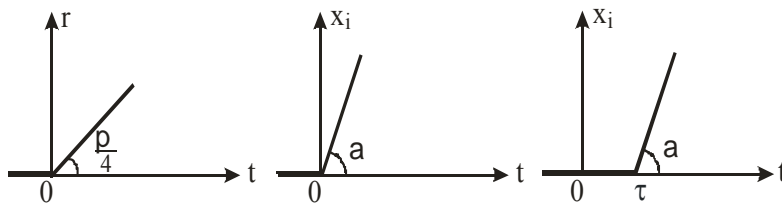


Fig.9.45

$$r(t) = t \cdot \gamma(t)$$

$$x_i = k \cdot t \cdot \gamma(t)$$

$$x_i = k \cdot (t - \tau) \cdot \gamma(t - \tau)$$

$$k = \text{tg} \alpha$$

$$k = \text{tg} \alpha$$

Dacă se cunoaște răspunsul unui circuit liniar, cu condiții inițiale nule, la semnalul rampă unitate $r(t)$ ca fiind $g(t)$, atunci semnalul continuu $x_i(t)$ se poate descompune într-un număr finit (n) de rampe traslatate (ca o aproximare a unei funcții prin segmente, pe porțiuni):

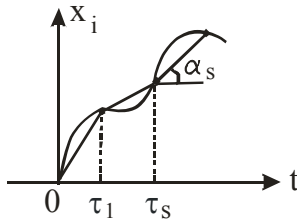


Fig.9.46

$$x_i(t) = \sum_{s=0}^n k_s \cdot (t - \tau_s) \cdot \gamma(t - \tau_s) \quad (9.114)$$

- τ_s = traslatarea rampei
- $k_s = \text{tg} \alpha_s$ – panta rampei (valoarea sa)
- n = numarul de intervale de aproximare

Răspunsul circuitului la acest semnal (9.114) va fi o superpoziție de forma:

$$x_e(t) = \sum_{s=0}^n k_s \cdot g(t - \tau_s) \cdot \gamma(t - \tau_s) \quad (9.115)$$

soluții care trebuie racordate între ele pe fiecare interval de aproximare.

Cum între impuls, treaptă și rampă unitate există legătura:

$$\delta(t) = \gamma'(t) = r''(t) \quad (9.116)$$

atunci între răspunsurile tranzitorii la aceste semnale va fi legătura:

$$v(t) = f'(t) = g''(t) \quad (9.117)$$

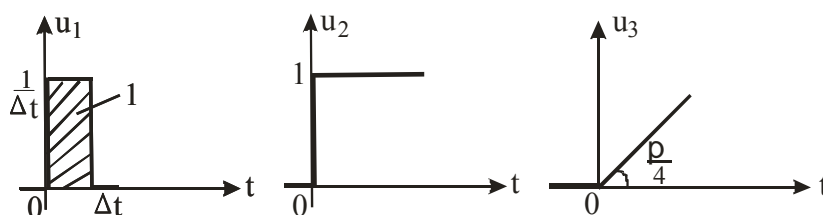
deci este suficient dacă-l cunosc pe unul dintre cele trei răspunsuri tranzitorii pentru un circuit dat.

Observații:

- Problema se poate generaliza, când pe cele n intervale aproximarea nu se face prin rampe (segmente de dreaptă) ci prin polinoame de gradul m . Dacă aproximăm prima derivată a lui $x_i(t)$ prin segmente (înseamnă a aproxima funcția $x_i(t)$ prin arce parabolice) eroarea de aproximare se reduce de 5 ori față de aproximarea directă a funcției.
- În metode directe mărimile $\tau = RC$ și $\tau = \frac{L}{R}$ reprezintă *constantă de timp* a circuitului RC sau RL serie iar în metodele de analiză în domeniul timp, τ este *variabila de integrare* și τ_0 sau T_0 sunt utilizate ca notații pentru constanta de timp.

9.7 Aplicații

1. Pentru câteva „semnale tip” desenate (date sub formă grafică), să se scrie expresia lor $u(t)$ și expresia transformatei Laplace a lor $U(s)$.

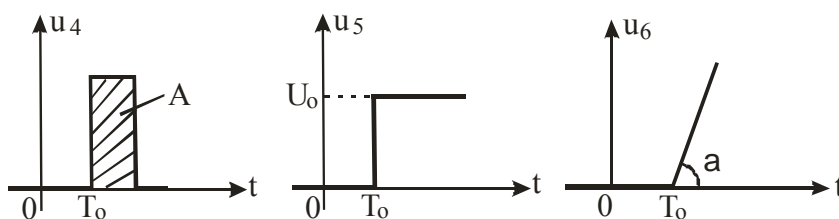


(impuls unitate)

(treptă unitate)

(rampă unitate)

$$u_1 = \delta(t) \rightarrow U_1 = 1 ; \quad u_2 = \gamma(t) \rightarrow U_2 = \frac{1}{s} ; \quad u_3 = r(t) = t \cdot \gamma(t) \rightarrow U_3 = \frac{1}{s^2}$$



(impuls translatat cu T_0)

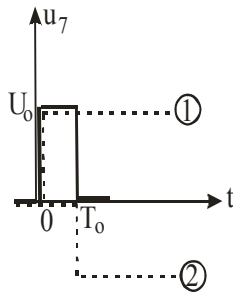
(treptă translatată)

(rampă translatată)

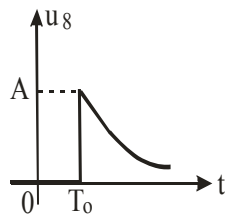
(impuls translatat cu T_0) $\begin{cases} u_4 = A \cdot \delta(t - T_0) \\ U_4 = A e^{-sT_0} \end{cases}$

(treptă translatată) $\begin{cases} u_5 = U_0 \cdot \gamma(t - T_0) \\ U_5 = \frac{U_0}{s} e^{-sT_0} \end{cases}$

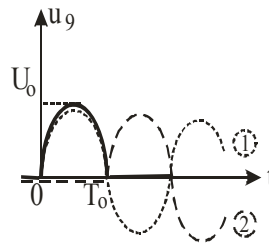
(rampă translatată) $\begin{cases} u_6 = r(t - T_0) \cdot \text{tg} \alpha = (t - T_0) \text{tg} \alpha \cdot \gamma(t - T_0) \\ U_6 = \frac{1}{s^2} e^{-sT_0} \text{tg} \alpha \end{cases}$



(impuls de durată)



(impuls exponențial)

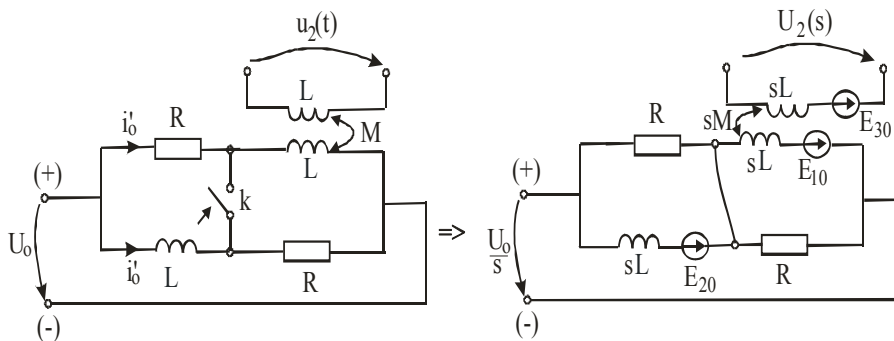


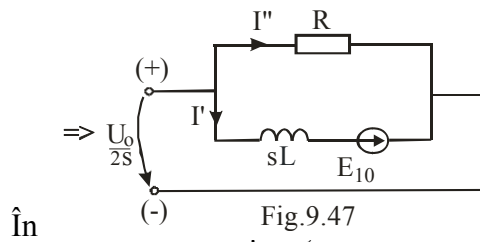
(impuls sinusoidal)

$$\begin{cases} u_7 = U_0 [\gamma(t) - \gamma(t - T_0)] \\ U_7 = \frac{U_0}{s} (1 - e^{-sT_0}) \end{cases} \quad \begin{cases} u_8 = A e^{-\alpha(t-T_0)} \cdot \gamma(t - T_0) \\ U_8 = \frac{A}{s + \alpha} e^{-sT_0} \end{cases}$$

(impuls sinusoidal) $\begin{cases} u_9 = U_0 [\gamma(t) \sin \omega t + \gamma(t - T_0) \sin \omega(t - T_0)] \\ U_9 = U_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} (1 + e^{-sT_0}); \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2T_0} \end{cases}$

2. La momentul $t = 0$ se închide k din figura 9.47. Se cere expresia tranzitorie pentru $u_2(t)$.





$$\begin{cases} U_o = 10V ; R = 1\Omega \\ L = 1H ; M = 0,1H \end{cases}$$

În le fictive au valorile:
 $E_{10} = E_{20} = L i'_{o'} = L \frac{U_o}{R} = 10V$ și $E_{30} = M i'_{o'} = 1V$. Curentul $I'(s)$ și

tensiunea $U_2(s)$ au expresiile:

$$I'(s) = \frac{\frac{U_o}{2s} + E_{10}}{sL} = \frac{\frac{5}{s} + 10}{s}$$

$$U_2(s) = s M I'(s) - E_{30} = 0,1s \left(\frac{5}{s^2} + \frac{10}{s} \right) - 1 = \frac{0,5}{s} \rightarrow u_2(t) = 0,5 \cdot \gamma(t)$$

3. Circuitul din figura 9.4.8 funcționează în regim permanent. La momentul $t = 0$ se deschide contactul k . Se cer expresiile curenților i_1 și i_2 .

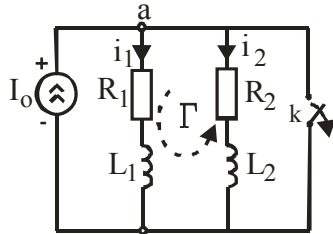


Fig. 9.48

$$\begin{cases} R_1 = 2R_2 = 2\Omega \\ L_1 = 2L_2 = 2mH \\ I_o = 3A \end{cases}$$

În nodul (a) concură o sursă de curent și laturi cu bobine, deci va apare o

comutație forțată: $i_1(0-) = i_2(0-) = 0$, bobinele erau șuntate de k , iar

$i_1(0+) + i_2(0+) = I_o$, deci are loc o comutație forțată, cei doi curenți i_1 și i_2 vor avea un salt în momentul $t = 0$.

Aplicăm (9.74) pe curba Γ :

$$\underbrace{L_1 i_{10-} - L_2 i_{20-}}_{\Phi_{\Gamma}(0-)} = \underbrace{L_1 i_{10+} - L_2 i_{20+}}_{\Phi_{\Gamma}(0+)}$$

$$\begin{cases} i_1 + i_2 = I_o \rightarrow \frac{di_2}{dt} = -\frac{di_1}{dt} \\ R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt}; (i_2 = I_o - i_1) \end{cases}$$

$$\text{Sau: } \begin{cases} (L_1 + L_2) \frac{di_1}{dt} + (R_1 + R_2) i_1 = R_2 I_0 \\ \tau_0 = \frac{L_1 + L_2}{R_1 + R_2} = 1 \text{ ms} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_1 = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2} + A e^{-t/\tau_0} \\ i_2 = I_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} - A e^{-t/\tau_0} \end{cases}$$

$$\Phi_{\Gamma}(0_-) = \Phi_{\Gamma}(0_+) \rightarrow 0 = L_1 \left(A + \frac{R_2 I_0}{R_1 + R_2} \right) - L_2 \left(\frac{R_1 I_0}{R_1 + R_2} - A \right)$$

$$\Rightarrow A = I_0 \frac{L_2 R_1 - L_1 R_2}{(R_1 + R_2)(L_1 + L_2)} = 1$$

Dacă $\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2} (\tau_1 = \tau_2) \Rightarrow$ circuitul nu va trece prin regim tranzitoriu ($A = 0$).

În cazul nostru cei doi curenți sunt: $\begin{cases} i_1 = 1 + e^{-1000t} \\ i_2 = 2 - e^{-1000t} \end{cases}$ a căror reprezentare

este în figura 9.49

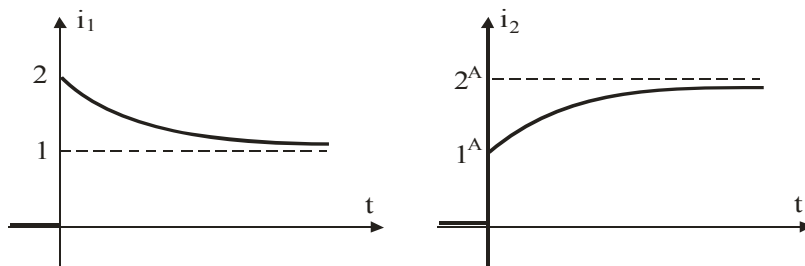


Fig 9.49

4. Circuitul din figura 9.50 funcționează în regim permanent iar la momentul $t = 0$ se închide contactul k . Se cere expresia tranzitorie $u_g(t)$ a tensiunii la bornele sursei de curent din schemă.

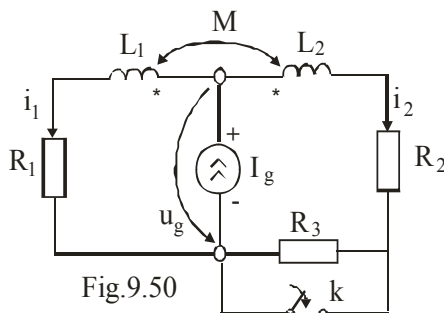
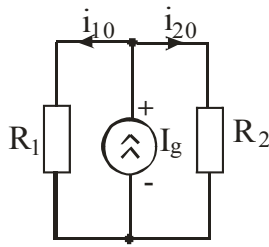


Fig.9.50

$$\begin{cases} R_1 = 2\Omega \\ R_2 = R_3 = 4\Omega \\ L_1 = 2H \\ L_2 = M = 1H \\ I_g = 10A \end{cases}$$



Condițiile inițiale ale celor doi curenți sunt:

$$\begin{cases} i_{10} = I_g \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 8A \\ i_{20} = I_g \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} = 2A \end{cases}$$

Sursele fictive care se introduc în schema operațională au valorile:

$$\begin{cases} E_{10} = \Phi_{10} = L_1 i_{10} + M i_{20} = 18 \text{Wb} \rightarrow E_{10} = 18V \\ E_{20} = \Phi_{20} = L_2 i_{20} + M i_{10} = 10 \text{Wb} \rightarrow E_{20} = 10V \end{cases}$$

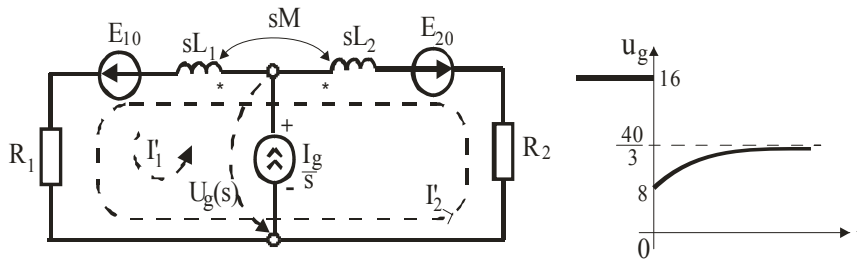


Fig 9.51

Schema operațională din figura 9.51 o rezolvăm prin metoda curenților ciclici; alegem latura cu sursă ideală de curent drept coardă,

deci: $I_1' = \frac{I_g}{s} = \frac{10}{s}$ iar ecuația pentru ochiul al doilea este:

$$\begin{aligned} I_2' [(R_1 + R_2) + s(L_1 + L_2 - 2M)] + I_1' (R_1 + sL_1 - sM) &= E_{10} - E_{20} \\ \rightarrow I_2' &= \frac{2(s+10)}{s(s+6)} \end{aligned}$$

Tensiunea $U_g(s)$, scrisă pe latura din stânga are expresia:

$$(R_1 + sL_1)I_1' + sMI_2' - U_g = E_{10} \rightarrow U_g(s) = \frac{8s + 80}{s(s+6)} \rightarrow$$

$$\rightarrow u_g(t) = \frac{80}{6} + \frac{32}{-6} e^{-6t} = \frac{1}{3} (40 - 16e^{-6t}) \cdot \gamma(t)$$

a cărei expresie $u_g(t)$ este reprezentată în figura 9.51.

5. În circuitul din figura 9.52 se închide k iar după stabilizarea regimului permanent se deschide din nou k. Se cer expresiile tranzitorii ale curenților în cele două regimuri tranzitorii.

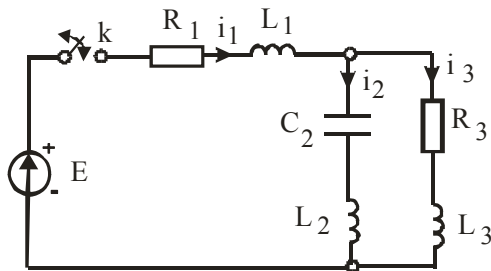


Fig 9.52

$$\begin{cases} R_1 = R_3 = 100\Omega \\ L_1 = L_3 = 0,1H \\ C_2 = 250\mu F \\ L_2 = 0,05H \\ E = 100V \end{cases}$$

a) Pentru primul regim tranzitoriu, condițiile inițiale înainte de a închide k sunt nule:

$$E_{L_0} = Li_0 = 0 \quad ; \quad E_{C_0} = \frac{q_0}{sC} = 0$$

Impedanța operațională în raport cu bornele sursei (circuit operațional pasiv, toate elementele aveau condiții inițiale nule) este:

$$Z(s) = (R_1 + sL_1) + \frac{(R_3 + sL_3) \left(sL_2 + \frac{1}{sC_2} \right)}{R_3 + s(L_2 + L_3) + \frac{1}{sC_2}} = \frac{(100 + 0,1s)(0,2s^2 + 100s + 8000)}{0,15s^2 + 100s + 4000}$$

Curentul tranzitoriu debitat de sursă (operațional) are expresia:

$$I_1(s) = \frac{E(s)}{Z(s)} = \frac{100/s}{Z(s)} = \frac{0,5}{s} + \frac{-0,5}{s+1000} + \frac{0,83}{s+400} + \frac{0,83}{s+100}$$

iar originalul său este de forma:

$$i_1(t) = 0,5 - 0,5e^{-1000t} + 0,83(e^{-400t} + e^{-100t})$$

În regim permanent ($t \rightarrow \infty$) se vor stabiliza curenții:

$$i_{1p} = i_{3p} = 0,5A \quad ; \quad i_{2p} = 0 \quad ; \quad u_{Cp} = R_3 i_{3p} = 50V$$

b) Pentru al doilea regim tranzitoriu (se deschide k) condițiile inițiale sunt date de valorile de regim permanent ale regimului precedent :

$$i_{30-} = 0,5A \quad ; \quad i_{20-} = 0 \quad ; \quad u_{C0-} = 50V \quad ; \quad \Phi_{30} = L_3 i_{30} = 0,05Wb$$

După deschiderea lui k, în schema operațională rămân doar laturile 2 și 3 ca în figura 9.53.

Curentul operațional este: ($E_{20} = L_2 i_{20-} = 0$):

$$I_3(s) = \frac{sE_{30} + u_{C0}}{s^2(L_2 + L_3) + sR_3 + \frac{1}{C_2}} = \frac{0,05s + 50}{0,15s^2 + 100s + 4000};$$

$$I_3(s) = \frac{0,549}{s + 42,7} - \frac{0,216}{s + 624}$$

$$i_3(t) = (0,549e^{-42,7t} - 0,216e^{-624t}) \cdot \gamma(t)$$

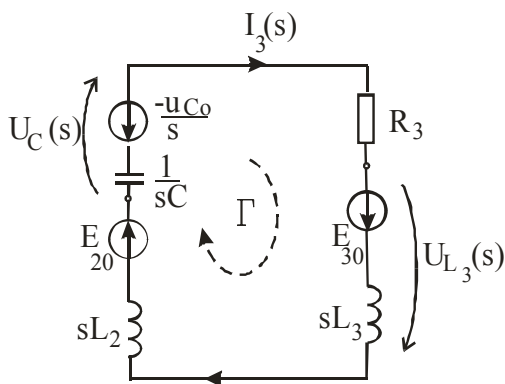


Fig.9.53

Valoarea curentului $i_3(t)$ la momentul 0_- era:

$i_3(0_-) = 0,5A$ iar la momentul 0_+ este:

$$i_3(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sI_3(s) = 0,333 = \frac{1}{3}$$

deci bobina L_3 va suferi o comutație forțată (L_2 și L_3 cu condiție diferită la 0_- au ajuns în serie, figura 9.53). Aplicăm teorema condiției inițiale (9.76) pentru curba Γ :

$$\Phi_{\Gamma}(0_-) = \Phi_{\Gamma}(0_+) \rightarrow L_2 i_{20-} + L_3 i_{30-} = L_2 i_{20+} + L_3 i_{30+};$$

$$i_{30+} = i_{20+} = 0,333A = \frac{1}{3}$$

$$0 + \underbrace{0,1 \cdot 0,5}_{0,05} = \underbrace{(0,05 + 0,1)}_{0,05} \cdot \frac{1}{3}$$

Deci se verifică teorema condițiilor inițiale pentru comutația forțată a lui L_2 și L_3 .

6. Să se arate în ce condiții un circuit de derivare (integrare) operează corect.

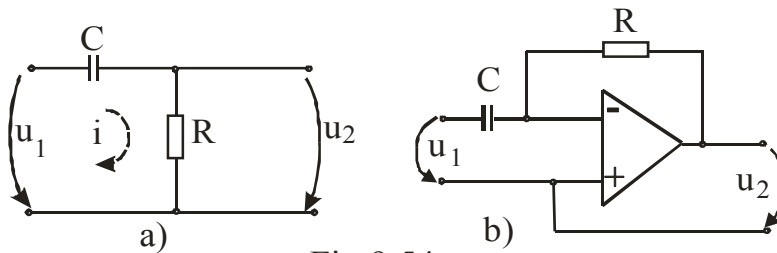


Fig.9.54

Pentru *circuitul de derivare* din figura 9.54-a, dacă $R \ll$, se poate scrie:

$$u_1 \approx \frac{1}{C} \int i \, dt \rightarrow i = C \frac{du_1}{dt}$$

$$u_2 = R i = RC \frac{du_1}{dt} = \tau_o \frac{du_1}{dt}$$

Deci tensiunea de ieșire u_2 este proporțională cu derivata tensiunii de intrare.

Dar u_2 este de valoare foarte mică și trebuie amplificată ca în figura 9.54-b

Cu transformata Fourier putem scrie:

$$\underline{U}_2(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \underline{U}_1(\omega) = \frac{j\omega\tau_o}{1 + j\omega\tau_o} \underline{U}_1(\omega)$$

Funcțiile de transfer ale circuitului sunt:

$$\underline{H}_{\text{ideal}} = j\omega\tau_o \quad ; \quad \underline{H}_{\text{real}} = \frac{j\omega\tau_o}{1 + j\omega\tau_o}$$

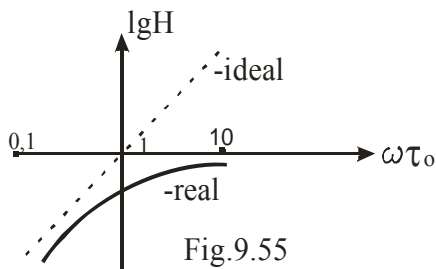


Fig.9.55

În figura 9.55 se vede că circuitul de derivare real se apropie de cel ideal pentru $\omega\tau_o \ll 1$, respectiv dacă

$R \ll \frac{1}{\omega C}$, condiție ca să realizăm o bună derivare.

Pentru *circuitul de integrare* din figura 9.56-a dacă $R \gg$, se poate scrie:

$$u_1 \cong R i \rightarrow u_2 = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{RC} \int u_1 dt = \frac{1}{\tau_o} \int u_1 dt$$

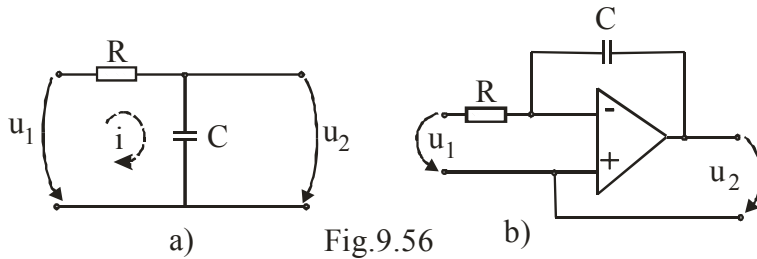


Fig. 9.56

Tensiunea u_2 este integrala lui $u_1(t)$ dar este foarte mică și trebuie amplificată ca în figura 9.56-b.

Cu transformata Fourier putem scrie:

$$\underline{U}_2(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} \underline{U}_1(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau_o} \underline{U}_1(\omega)$$

Funcția de transfer pentru circuitul de integrare este:

$$\underline{H}_{ideal} = \frac{1}{j\omega\tau_o} ; \quad \underline{H}_{real} = \frac{1}{1 + j\omega\tau_o}$$

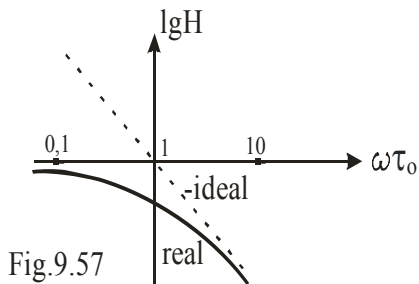


Fig. 9.57

Cele două funcții se apropie ca în figura 9.57 dacă:

$\omega\tau_o \gg 1 \leftrightarrow \omega RC \gg 1 \rightarrow R \gg \frac{1}{\omega C}$,
care este ipoteza pentru a se realiza o bună integrare.

7. Unui circuit RL i se aplică un impuls triunghiular ca în figura 9.58-b. Se cere răspunsul $i(t)$.

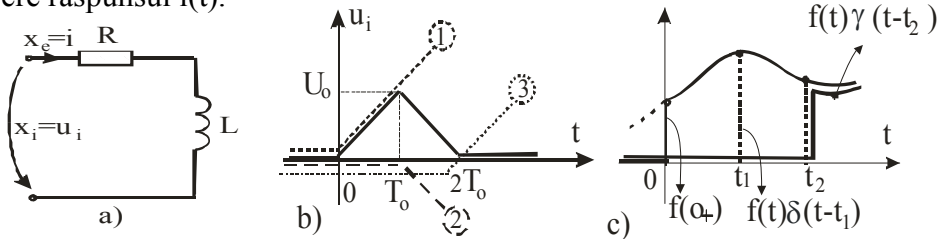


Fig. 9.58

Semnalul $u_i(t)$ de forma unui impuls triunghiular se consideră că provine din suprapunerea a trei semnale rampă, ca în figura 9.58-b, (unde $\operatorname{tg} \alpha = \frac{U_o}{T_o}$):

$$u_i(t) = \frac{U_o}{T_o} [t \cdot \gamma(t) - 2(t - T_o) \cdot \gamma(t - T_o) + (t - 2T_o) \cdot \gamma(t - 2T_o)]$$

semnal care admite transformata Laplace: $U_i(s) = \frac{U_o}{T_o} \cdot \frac{1}{s^2} (1 - e^{-sT_o})^2$

Funcția indicială (răspunsul tranzitoriu, răspunsul la treapta unitate) pentru circuitul RL este de forma (9.107):

$$f(t) = \frac{1}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_o}} \right); \left(\tau_o = \frac{L}{R} \right); f(0) = 0; f'(\tau) = \frac{1}{L} e^{-\frac{\tau}{\tau_o}}$$

Atunci răspunsul calculat cu (9.100) se scrie sub forma:

$$\begin{aligned} x_e(t) = i(t) = & \underbrace{\frac{U_o}{LT_o} \int_0^t (t - \tau) e^{-\frac{\tau}{\tau_o}} \cdot \gamma(t - \tau) d\tau}_{i_1} - \\ & \underbrace{\frac{2U_o}{LT_o} \int_0^t (t - \tau - T_o) e^{-\frac{\tau}{\tau_o}} \cdot \gamma(t - \tau - T_o) d\tau}_{i_2} + \\ & \underbrace{\frac{U_o}{LT_o} \int_0^t (t - \tau - 2T_o) e^{-\frac{\tau}{\tau_o}} \cdot \gamma(t - \tau - 2T_o) d\tau}_{i_3}; \end{aligned}$$

unde :

$$\begin{cases} t < T_o : i_2 = i_3 = 0 \\ t \in (T_o, 2T_o) : i_3 = 0 \\ t > 2T_o : i = i_1 + i_2 + i_3 \end{cases}$$

Efectuând integralele Duhamel din expresia precedentă se obține expresia finală a răspunsului:

$$\begin{aligned} i(t) = & \frac{U_o \tau_o}{LT_o} \left[\left(t - \tau_o + \tau_o e^{-\frac{t}{\tau_o}} \right) \cdot \gamma(t) + 2 \left(\tau_o + T_o - t - \tau_o e^{-\frac{t-T_o}{\tau_o}} \right) \gamma(t - T_o) + \right. \\ & \left. + \left(t - \tau_o - 2T_o + \tau_o e^{-\frac{t-2T_o}{\tau_o}} \right) \cdot \gamma(t - 2T_o) \right]; \end{aligned}$$

Cu transformata Laplace calculul curentului ar fi presupus:

$I(s) = \frac{U_i(s)}{Z(s)} = \frac{U_o}{T_o} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{R + sL} (1 - e^{-sT_o})^2 \rightarrow i(t)$ ca având aceeași expresie ca și prin metoda precedentă.

8. Circuitului din figura 9.59 i se aplică un impuls exponențial de tensiune la poarta de intrare. Se cere răspunsul circuitului, tensiunea la poarta de ieșire $u_e(t)$, calculată prin trei metode.

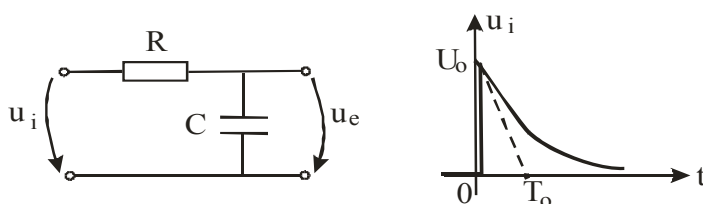


Fig.9.59

$$\left. \begin{array}{l} R = 1k\Omega \\ C = 100\mu F \end{array} \right\} T = RC = 0,1 \text{ sec} - \text{este constanta de timp a circuitului.}$$

$$\left. \begin{array}{l} T_o = 0,02 \text{ sec} \\ U_o = 10V \end{array} \right\} u_i = U_o e^{-t/T_o} - \text{expresia semnalului de intrare}$$

a) În domeniul timp, cu integrala Duhamel, se evaluează succesiv:

→ funcția indicială: $f(t) = 1 - e^{-t/RC} = 1 - e^{-t/T}$; $f(0) = 0$; $f'(\tau) = \frac{1}{T} e^{-\tau/T}$

→ răspunsul scris cu (9.100) este:

$$u_e(t) = u_i(t) \cdot f(0_+) + \int_0^t u_i(t-\tau) f'(\tau) d\tau = \int_0^t U_o e^{-\frac{t-\tau}{T_o}} \cdot \frac{1}{T} e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau =$$

$$= \frac{U_o}{T} e^{-t/T_o} \int_0^t e^{-\tau \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_o} \right)} d\tau = \frac{U_o T_o}{T_o - T} \left(e^{-t/T_o} - e^{-t/T} \right);$$

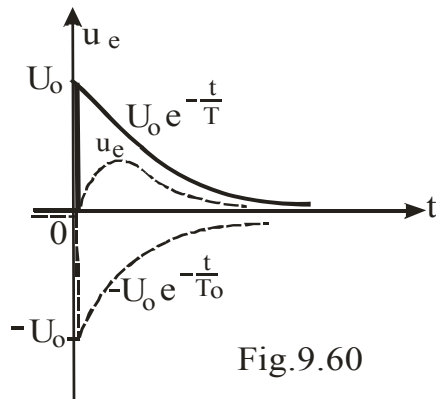


Fig. 9.60

Numeric se obține expresia:

$$u_e(t) = 2,5(e^{-10t} - e^{-50t});$$

funcție care este reprezentată în figura 9.60.

Dacă $T = T_0$ atunci:

$$u_e(t) = \frac{U_0}{T} e^{-t/T_0} \int_0^t e^0 d\tau = \frac{U_0}{T} t \cdot e^{-t/T}$$

b) Aceeași problemă rezolvată operațional cu Laplace, presupune:

$$I(s) = \frac{U_i(s)}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{U_0}{\left(s + \frac{1}{T_0}\right)\left(R + \frac{1}{sC}\right)} = \frac{sCU_0}{\left(s + \frac{1}{T_0}\right)(sRC + 1)} = \frac{s \frac{U_0}{R}}{\left(s + \frac{1}{T_0}\right)\left(s + \frac{1}{RC}\right)}$$

Tensiunea de ieșire scrisă operațional este:

$$U_e(s) = \frac{1}{sC} I(s) = \frac{U_0}{RC} \cdot \frac{1}{\left(s + \frac{1}{T_0}\right)\left(s + \frac{1}{T}\right)} = \frac{U_0}{T} \cdot \frac{TT_0}{T_0 - T} \left(\frac{1}{s + \frac{1}{T_0}} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right);$$

și revenind în timp:
$$u_e(t) = \frac{U_0 T_0}{T_0 - T} \left(e^{-t/T_0} - e^{-t/T} \right)$$

c) Se poate aplica și transformata Fourier, semnalul de intrare admite transformata Fourier ($\lim_{t \rightarrow \infty} u_i(t) = 0$; $u_i(0-) = 0 \rightarrow$ transformata Fourier unilaterală).

$$\underline{I}(j\omega) = \frac{\underline{U}_i(j\omega)}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{U_0}{\left(j\omega + \frac{1}{T_0}\right)\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right)}; \quad \underline{U}_e(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \underline{I}(j\omega);$$

Deși calculul seamănă cu regimul permanent sinusoidal, revenirea însă în domeniul timp se face altfel. Putem folosi fie tabelele de corespondență de la transformata Laplace pentru $s = j\omega$, fie transformata Fourier inversă:

$$u_e(t) = \frac{1}{2\pi j} \underbrace{\int_{-j\infty}^{j\infty} \underline{U}_e(j\omega) e^{-j\omega t} d\omega}_{2\pi j \sum \text{reziduri}} = \frac{U_o T_o}{T_o - T} \left(e^{-t/T_o} - e^{-t/T} \right);$$

9. Circuitului din figura 9.61 i se aplică la intrare tensiunea: $u_i(t) = 100(1 - e^{-2t})$. Se cer expresiile curenților $i_1(t)$ și $i_2(t)$.

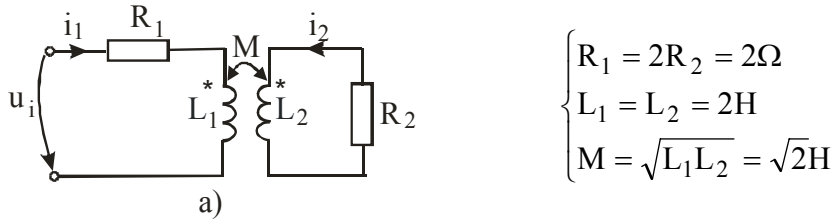


Fig.9.61

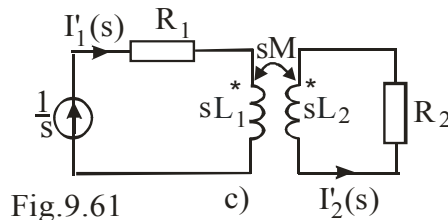
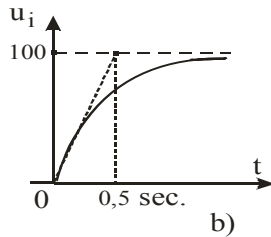


Fig.9.61

Pentru a calcula funcția indicială $f(t)$ presupunem că la intrare aplicăm în loc de $u_i(t)$, funcția treaptă unitate $\gamma(t)$ pentru care imaginea Laplace este $\frac{1}{s}$ și schema operațională este cea din figura 9.61-c.

$$\begin{cases} (R_1 + sL_1)I'_1 + sMI'_2 = \frac{1}{s} \\ sMI'_1 + (R_2 + sL_2)I'_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow I'_1 = \frac{s+1}{4s\left(s+\frac{1}{2}\right)} \rightarrow i'_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-t/2} = f(t)$$

Soluția obținută: $i'_1(t) = f(t)$ este răspunsul tranzitoriu al circuitului. Atunci în domeniul timp, cu integrala Duhamel vom scrie succesiv:

$$x_i(t) = u_i(t) = 100(1 - e^{-2t}); \quad x'_i(t) = 200 \cdot e^{-2t}$$

$$i(t) = x_e(t) = x_i(0)f(t) + \int_0^t x_i'(\tau)f(t-\tau)d\tau;$$

$$i_1(t) = 0 + \int_0^t 200 \cdot e^{-2\tau} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} \right) d\tau = \left[50(1 - e^{-2t}) - \frac{500}{3} e^{-2t} + \frac{100}{3} e^{-t} \right] \cdot \gamma(t)$$

Curentul în secundar se poate evalua operațional:

$$I_2(s) = \frac{sM}{R_2 + sL_2} I_1(s) = \frac{s\sqrt{2}}{1+s} I_1(s) \rightarrow i_2(t) = L^{-1}[I_2(s)]$$