

10. Linii electrice lungi (linii omogene)

Circuitele cu parametri concentrați de tip r , L , C reprezintă o aproximație cu atât mai bună cu cât frecvența de lucru este mai mică și cu cât dielectricul din jurul circuitelor este mai bun izolanț.

Regimurile staționare (cvasistaționare) neglijează curentul de deplasare dintre două conductoare vecine, curentul de conducție este uniform repartizat pe secțiunea transversală și constant în lungul unei laturi de circuit și se ramifică doar în noduri de circuit. Izolația fiind perfectă se neglijează *perditanța* izolației (inversul rezistenței de izolație dintre două conductoare).

În comunicații pe fire transmisia semnalelor și a energiei se realizează prin *linii electrice lungi*, a căror lungime fizică ℓ este mult mai mare decât lungimea de undă λ a semnalului transmis.

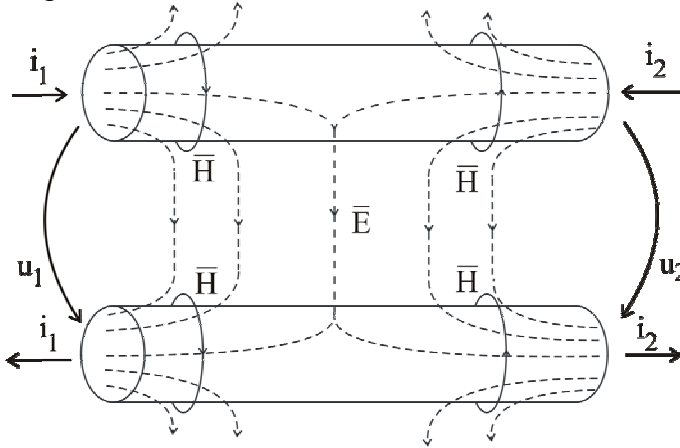


Fig. 10.1

Considerăm o linie bifilară omogenă în lungul său pentru care la frecvențe înalte nu se neglijează curentul de deplasare dintre fire și nici curentul de pierderi prin dielectricul imperfect dintre fire (fig. 10.1).

Liniile de curent se consideră închise doar dacă se ține seama și de curentul de deplasare dintre fire:

$$\bar{J}_t = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \sigma_i \bar{E} + \epsilon_i \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}. \quad (10.1)$$

Prin dielectric va exista curentul de conducție $\sigma_i \bar{E}$ și curentul de deplasare

$$\epsilon_i \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}.$$

Din cauza curenților ce se ramifică transversal între fire, în lungul firului valoarea curentului nu mai rămâne constantă ci chiar își poate schimba sensul (figura 10.1).

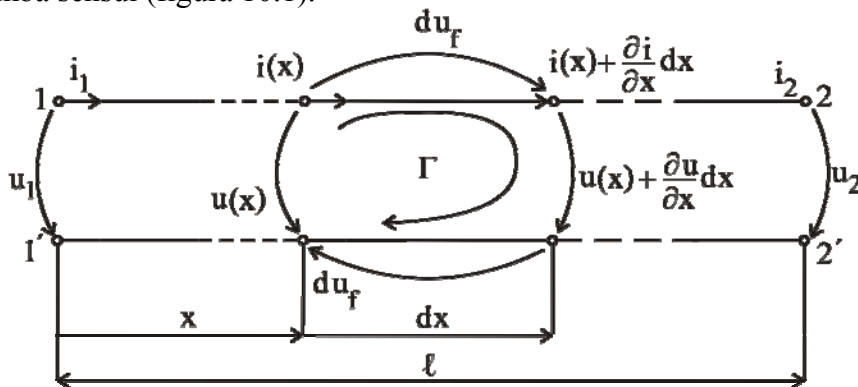


Fig. 10.2

Studiul exact al problemei, plecând de la ecuațiile lui Maxwell arată că este vorba de o propagare a unei electromagnetice în lungul liniei, propagarea fiind ghidată în spațiu de firele liniei, dar problema se poate transpune pentru a fi studiată ca o problemă de circuit electric. Neglijăm componentele longitudinale ale curenților $\sigma \bar{E}$ și $\epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ care se ramifică transversal de la un fir la altul, atunci câmpul magnetic \bar{H} în orice secțiune transversală face rotoare în jurul firului iar valoarea sa depinde de valoarea curentului în acea secțiune.

10.1 Ecuațiile liniilor electrice lungi

Considerăm o linie bifilară cu lungimea ℓ mult mai mare decât lungimea de undă a semnalului transmis pe linie $\left(\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\omega} v \right)$ și luăm un tronson infinitesimal de lungime dx așezat în secțiunea x a liniei, socotită în raport cu bornele de intrare 1-1' (figura 10.2).

Dacă $R_\ell/2$ este rezistența lineică a unui fir [Ω/m], tensiunea în lungul firului este $du_f = 1/2 R_\ell i(x) dx$.

Dacă L_ℓ este inductivitatea lineică [H/m] atunci fluxul magnetic prin suprafața tronsonului de linie (cu suprafața $ds = D dx$) este $d\Phi_{S_\Gamma} = L_\ell i(x) dx$.

Aplicăm legea inducției electromagnetice pe curba infinitesimală Γ sub forma:

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial \Phi_{S_{\Gamma}}}{\partial t}$$

$$e_{\Gamma} = du_f + (u_x + \frac{\partial u}{\partial x} dx) + du_f - u_x = -\frac{\partial}{\partial t} (L_{\ell} i_x dx)$$

$$e_{\Gamma} = \frac{1}{2} R_{\ell} i_x dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{1}{2} R_{\ell} i_x dx = -L_{\ell} \frac{\partial i}{\partial t} dx$$

$$\text{Respectiv: } -\frac{\partial u}{\partial x} = R_{\ell} i + L_{\ell} \frac{\partial i}{\partial t} \quad (10.2)$$

Ecuția (10.2) constituie prima ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi a liniilor lungi și care exprimă că: „scăderea tensiunii în lungul liniei este egală cu suma căderilor de tensiune rezistivă și inductivă pe firele liniei”.

Dacă G_{ℓ} este *perditanța lineică* [Ω^{-1}/m] a izolației dintre fire, atunci curentul de conducție care se scurge de la un fir la altul prin izolația imperfectă, pe porțiunea dx este: $di_G = G_{\ell} u(x) dx$, iar dacă C_{ℓ} este *capacitatea lineică* [F/m] dintre cele două fire, atunci porțiunea dx se va încărca cu sarcina: $dq = C_{\ell} u(x) dx$.

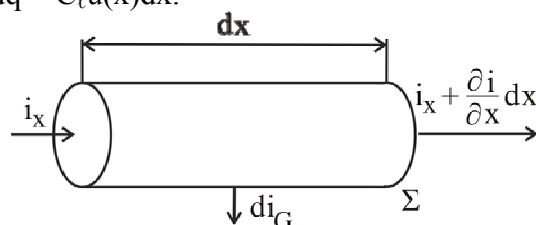


Fig. 10.3

Legea conservării sarcinii aplicată pentru suprafața închisă infinitezimală Σ (figura 10.3) ce înconjoară tronsonul de fir cu lungimea dx este:

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \leftrightarrow -i_x + (i_x + \frac{\partial i}{\partial x} dx) + G_{\ell} u_x dx = -C_{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} dx$$

$$\text{Respectiv : } -\frac{\partial i}{\partial x} = G_{\ell} u + C_{\ell} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (10.3)$$

Ecuția (10.3) constituie cea de-a doua ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi a liniilor lungi și care spune că: „scăderea curentului electric în lungul firului este egală cu suma dintre curentul de pierderi prin izolație și curentul de deplasare dintre fire, curenți ce ies prin suprafața laterală de la un fir la altul.”

Cele două ecuații (10.2) și (10.3) împreună formează un sistem de două ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, cunoscute sub numele de *ecuațiile telegrafiștilor de ordinul I*:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = R_\ell i + L_\ell \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = G_\ell u + C_\ell \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \quad (10.4)$$

Dacă mai derivăm o dată prima ecuație în raport cu x și ținem seama de cea de-a doua ecuație, se obține:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R_\ell G_\ell u + (R_\ell C_\ell + L_\ell G_\ell) \frac{\partial u}{\partial t} + L_\ell C_\ell \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (10.5)$$

și similar se obține o ecuație pentru $i(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = R_\ell G_\ell i + (R_\ell C_\ell + L_\ell G_\ell) \frac{\partial i}{\partial t} + L_\ell C_\ell \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (10.6)$$

Ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul doi (10.5) și (10.6) se numesc *ecuațiile telegrafiștilor de ordinul II*. Deși cele două ecuații sunt de aceeași formă și sunt independente (una în variabila $u(x,t)$ și alta în $i(x,t)$), soluțiile lor nu sunt independente, fiind legate prin ecuațiile (10.4). În realitate se integrează doar una dintre ele (în condiții inițiale și la limită (capete) precizate) și soluția se înlocuiește în (10.4) pentru a determina cealaltă necunoscută. Integrarea lor în regim tranzitoriu se poate face și operațional : $L[u(x,t)] = U(s,x)$.

Observație: la frecvențe joase parametrii lineici (R_ℓ , G_ℓ , L_ℓ , C_ℓ) se pot calcula ca și în regim staționar. La frecvențe înalte repartiția curentului pe secțiunea firului se modifică din cauza efectului pelicular (și de vecinătate) deci R_ℓ crește; dielectricul are și pierderi prin histerezis, deci și G_ℓ crește. Ceilalți doi parametri au valorile cunoscute pentru o linie bifilară:

$$C_\ell = \frac{\pi \epsilon}{\ln D/a} \quad [\text{F/m}] \quad ; \quad L_\ell = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{D}{a} \quad [\text{H/m}] \quad (10.7)$$

10.2 Regimul tranzitoriu al liniilor fără pierderi

Liniile se consideră fără pierderi dacă se neglijează pierderile Joule atât pe fire cât și în dielectricul dintre fire, respectiv $G_\ell = R_\ell = 0$. Ecuațiile telegrafiștilor de ordinul I și II devin de forma:

$$\begin{cases} -\frac{\partial u}{\partial x} = L_\ell \frac{\partial i}{\partial t} \\ -\frac{\partial i}{\partial x} = C_\ell \frac{\partial u}{\partial t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = L_\ell C_\ell \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_\ell C_\ell \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \end{cases} \quad (10.8)$$

Aceste ecuații sunt de același tip (ecuații cu derivate parțiale de ordinul II de tip hiperbolic) cu ecuațiile (4.24) care se referă la unda electromagnetică plană ce se propagă printr-un mediu dielectric. Deci la fel se propagă unda (semnalul) pe o linie fără pierderi ca și unda plană printr-un mediu dielectric. Soluția ecuațiilor (10.8) conține o undă directă și una inversă care se propagă în lungul liniei cu viteza $v_o = \pm \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (așa cum la unda plană era $v_o = \pm \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$; deci: $u(x,t) = u_d(x-v_o t) + u_i(x+v_o t)$. (10.9)

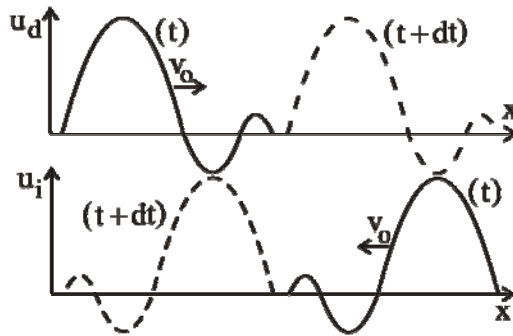


Fig. 10.4

Cele două componente se propagă în lungul axei x ca în figura 10.4. Funcțiile u_d și u_i sunt arbitrare, forma lor depinde de alimentarea liniei (semnalul transmis) dar și de condiția inițială și la limită ($x = 0$; $x = \ell$).

Cunoscând soluția $u(x,t)$, unda de curent $i(x,t)$ rezultă din ecuațiile de ordinul întâi din (10.8):

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = L_\ell \frac{\partial i}{\partial t} \Leftrightarrow -u'_d - u'_i = L_\ell \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow \begin{cases} u'_d = \frac{\partial u_d}{\partial x} = \frac{-1}{v_o} \cdot \frac{\partial u_d}{\partial t} \\ u'_i = \frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{v_o} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[L_\ell i - \frac{1}{v_o} (u_d - u_i) \right] = 0 \Rightarrow i = \frac{1}{v_o L_\ell} (u_d - u_i) + A(x) \quad (10.10)$$

Dacă $Z_o = v_o L_\ell = \frac{1}{v_o C_\ell} = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} > 0$ este *impedanța caracteristică*

a liniei fără pierderi, atunci expresia curentului devine de forma:

$$i(x,t) = \underbrace{\frac{1}{Z_o} u_d(x - v_o t)}_{i_d} - \underbrace{\frac{1}{Z_o} u_i(x + v_o t)}_{i_i} + A(x) \quad (10.11)$$

La unda plană impedanța de undă a mediului prin care avea loc propagarea pe o linie era: $Z = \mu v = \frac{1}{\varepsilon v} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \cdot Z_0$ (10.12)

Făcând o analogie între propagarea unei plane prin dielectric și propagarea pe o linie fără pierderi, se pot stabili corespondențele:

Unda plană		Linia fără pierderi
E_y	\longleftrightarrow	u
H_z	\longleftrightarrow	i
ε	\longleftrightarrow	C_ℓ
μ	\longleftrightarrow	L_ℓ
$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$	\longleftrightarrow	$v = \frac{1}{\sqrt{L_\ell C_\ell}}$
$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	\longleftrightarrow	$Z = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}}$
undă directă	\longleftrightarrow	semnal direct
undă inversă	\longleftrightarrow	semnal invers

10.3 Linii lungi în regim permanent sinusoidal

În regim permanent sinusoidal undele de tensiune $u(x,t)$ și cele de curent $i(x,t)$ sunt în fiecare punct de pe linie ($x=\text{cst}$) funcții sinusoidale de timp, de aceeași frecvență și se pot reprezenta în complex:

$$\begin{cases} u(x,t) = \sqrt{2} \sin[\omega t + \gamma_u(x)] \\ i(x,t) = \sqrt{2} \sin[\omega t + \gamma_u(x) - \varphi(x)] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{U}(x) = U(x) \angle \gamma_u(x) \\ \underline{I}(x) = I(x) \angle \gamma_u(x) - \varphi(x) \end{cases} \quad (10.13)$$

Ecuatiile telegraștilor de ordinul I și II transpuse în complex nu mai sunt ecuații cu derivate parțiale ci devin ecuații diferențiale ordinare, de forma:

$$\begin{cases} -\frac{d\underline{U}}{dx} = (R_\ell + j\omega L_\ell)\underline{I} = \underline{Z}_\ell \underline{I} \\ -\frac{d\underline{I}}{dx} = (G_\ell + j\omega C_\ell)\underline{U} = \underline{Y}_t \underline{U} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = (R_\ell + j\omega L_\ell)(G_\ell + j\omega C_\ell)\underline{U} = \underline{Z}_\ell \underline{Y}_t \underline{U} \\ \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = (R_\ell + j\omega L_\ell)(G_\ell + j\omega C_\ell)\underline{I} = \underline{Z}_\ell \underline{Y}_t \underline{I} \end{cases} \quad (10.14)$$

Notăm:

$$\begin{cases} \underline{\gamma} = \sqrt{(R_\ell + j\omega L_\ell)(G_\ell + j\omega C_\ell)} = \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t} = \alpha + j\beta \\ \underline{Z}_\ell = R_\ell + j\omega L_\ell - \text{impedanța lineică longitudinală } [\Omega / \text{m}] \\ \underline{Y}_t = G_\ell + j\omega C_\ell - \text{admitanța lineică transversală } [\Omega^{-1} / \text{m}] \\ \underline{\gamma} = \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t} - \text{constanta de propagare a liniei, pe unitatea de lungime} \\ \alpha = \text{Re}\{\underline{\gamma}\} = \sqrt{\frac{1}{2}[R_\ell G_\ell - \omega^2 L_\ell C_\ell + \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t}]} \geq 0 - \text{constanta de atenuare a liniei} \\ \beta = \text{Im}\{\underline{\gamma}\} = \sqrt{\frac{1}{2}[\omega^2 L_\ell C_\ell - R_\ell G_\ell + \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t}]} \geq 0 - \text{constanta de defazare a liniei} \\ v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2}[\omega^2 L_\ell C_\ell - R_\ell G_\ell + \sqrt{\underline{Z}_\ell \underline{Y}_t}]}} - \text{viteza de fază a undei pe linie} \end{cases} \quad (10.15)$$

Ecuatiile de ordinul doi (10.4) devin de forma:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{U} \quad ; \quad \frac{d^2 \underline{I}}{dx^2} = \underline{\gamma}^2 \underline{I} \quad (10.16)$$

Soluția ecuației în variabila \underline{U} este de forma:

$$\underline{U}(x) = \underbrace{\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x}}_{\underline{U}_d(x)} + \underbrace{\underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}}_{\underline{U}_i(x)} = \underline{U}_{d0} e^{-\underline{\gamma}x} + \underline{U}_{i0} e^{\underline{\gamma}x} \quad (10.17)$$

Curentul complex și el va avea două componente ce se propagă în lungul liniei (pe axa Ox) în sensuri contrarii cu aceeași viteză (curentul direct și invers):

$$\underline{I}(x) = \frac{-1}{\underline{Z}_\ell} \cdot \frac{d\underline{U}}{dx} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Z}_\ell} (\underline{A}_1 e^{-\underline{\gamma}x} - \underline{A}_2 e^{\underline{\gamma}x}) \quad (10.18)$$

Notăm: $\underline{Z}_c = \sqrt{\frac{R_\ell + j\omega L_\ell}{G_\ell + j\omega C_\ell}} = \frac{\underline{Z}_\ell}{\underline{\gamma}} = \frac{\underline{\gamma}}{\underline{Y}_t} = Z_c \cdot \varphi_c \quad (10.19)$

impedanța caracteristică a liniei cu pierderi. Curentul complex (10.18) se poate scrie astfel:

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{A}_1}{\underline{Z}_c} e^{-\underline{\gamma}x} + \frac{\underline{A}_2}{\underline{Z}_c} e^{\underline{\gamma}x} = \frac{\underline{U}_{d0}}{\underline{Z}_c} e^{-\underline{\gamma}x} + \left(-\frac{\underline{U}_{i0}}{\underline{Z}_c} e^{\underline{\gamma}x}\right) = \underline{I}_d(x) + \underline{I}_i(x)$$

(10.20)

Mărimile \underline{Z}_c și $\underline{\gamma}$ se mai numesc *parametri secundari* ai liniilor lungi. În funcție de aceștia, se pot scrie ecuațiile liniilor lungi în regim sinusoidal, atunci când se cunosc tensiunea și curentul la intrarea pe linie ($x=0$): \underline{U}_1 și \underline{I}_1 sau la ieșirea de pe linie ($x=\ell$): \underline{U}_2 , \underline{I}_2 .

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}(0) = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{I}(0) = \frac{\underline{A}_1 - \underline{A}_2}{\underline{Z}_c} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{A}_1 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 + \underline{Z}_c \underline{I}_1) \\ \underline{A}_2 = \frac{1}{2}(\underline{U}_1 - \underline{Z}_c \underline{I}_1) \end{cases} \quad (10.21)$$

Deci ecuațiile liniilor lungi se scriu sub formă similară cu ecuațiile pentru lanțurile de cuadripoli:

$$\begin{cases} \underline{U}(x) = \underline{U}_1 \text{ch} \underline{\gamma} x - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \text{sh} \underline{\gamma} x \\ \underline{I}(x) = \underline{I}_1 \text{ch} \underline{\gamma} x - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \text{sh} \underline{\gamma} x \end{cases} \xrightarrow{(x=\ell)} \begin{cases} \underline{U}_2(x) = \underline{U}_1 \text{ch} \underline{\gamma} \ell - \underline{Z}_c \underline{I}_1 \text{sh} \underline{\gamma} \ell \\ \underline{I}_2(x) = \underline{I}_1 \text{ch} \underline{\gamma} \ell - \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_c} \text{sh} \underline{\gamma} \ell \end{cases} \quad (10.22)$$

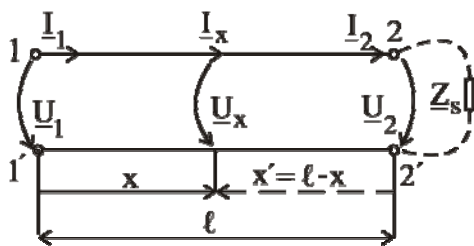


Fig. 10.5

Dacă raportarea se face față de bornele de ieșire ale liniei ($x'=\ell-x$, figura 10.5) atunci:

$$\begin{cases} \underline{U}_{x'} = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} x' + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \text{sh} \underline{\gamma} x' \\ \underline{I}_{x'} = \underline{I}_2 \text{ch} \underline{\gamma} x' + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh} \underline{\gamma} x' \end{cases} \xrightarrow{(x'=\ell)} \begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 \text{ch} \underline{\gamma} \ell + \underline{Z}_c \underline{I}_2 \text{sh} \underline{\gamma} \ell \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 \text{ch} \underline{\gamma} \ell + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_c} \text{sh} \underline{\gamma} \ell \end{cases} \quad (10.23)$$

Impedanța de sarcină \underline{Z}_s conectată la ieșirea liniei are expresia:

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \Big|_{\underline{I}_1 \text{ch} \underline{\gamma} \ell} = \frac{\underline{Z}_i - \underline{Z}_c \text{th} \underline{\gamma} \ell}{1 - \frac{\underline{Z}_i}{\underline{Z}_c} \text{th} \underline{\gamma} \ell} = \underline{Z}_c \frac{\underline{Z}_i - \underline{Z}_c \text{th} \underline{\gamma} \ell}{\underline{Z}_c - \underline{Z}_i \text{th} \underline{\gamma} \ell} \quad (10.24)$$

Coeficientul de reflexie al undelor, la joncțiunea dintre linie și \underline{Z}_s

$$\text{este: } \underline{K}_{\text{rf}} = \frac{\underline{U}_{2i}}{\underline{U}_{2d}} = -\frac{\underline{I}_{2i}}{\underline{I}_{2d}} = \frac{\underline{U}_2 - \underline{Z}_c \underline{I}_2}{\underline{U}_2 + \underline{Z}_c \underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_s - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_c} \quad (10.25)$$

Dacă linia funcționează *adaptat* ($(Z_s = Z_c)$) nu va exista reflexie de semnal, $K_{rf} = 0$ și $\underline{U} = \underline{U}_d$; $\underline{I} = \underline{I}_d$. Pentru o linie fără pierderi ($R_\ell = G_\ell = 0$) expresiile (10.15) devin:

$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega \sqrt{L_\ell C_\ell}; \quad \gamma = j\beta; \quad Z_c = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} \quad \text{și} \quad v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L_\ell C_\ell}} \quad (10.26).$$

Cum v nu depinde de frecvența ω înseamnă că toate armonicile unui semnal se propagă de-a lungul liniei cu aceeași viteză, ele ajung simultan la capătul 2-2' al liniei și se reface forma semnalului de la intrare. Se spune că liniile fără pierderi nu distorsionează semnalul, ele se numesc *linii fără dispersie*.

Pentru linia cu pierderi, *viteza de fază* (cea pentru care faza inițială $(\omega t - \beta x)$ rămâne constantă) a unui semnal sinusoidal este:

$$v(\omega) = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{1}{2}(\omega^2 L_\ell C_\ell - R_\ell G_\ell + \sqrt{Z_\ell Y_t})}} = f(\omega) \quad (10.27)$$

Cum viteza v depinde de frecvență, nu toate armonicile unui semnal se propagă cu aceeași viteză în lungul liniei, armonicile înalte au viteză mai mare și ajung mai repede la capătul 2-2' și se suprapun peste armonicile joase ale unui semnal precedent, linia prezintă distorsiuni ale semnalelor; linia cu pierderi este o *linie cu dispersie*.

Linia cu pierderi poate deveni linie fără distorsiuni dacă parametrii săi îndeplinesc *condiția Heavisaid*: $\frac{R_\ell}{L_\ell} = \frac{G_\ell}{C_\ell}$. (10.28)

În acest caz: $v = \frac{1}{\sqrt{L_\ell C_\ell}} = \text{ct.}$ și se elimină distorsiunea liniei.

$$\text{Dar: } \alpha = R_\ell \sqrt{\frac{C_\ell}{L_\ell}} = G_\ell \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} \neq 0; \quad Z_c = \sqrt{\frac{L_\ell}{C_\ell}} = Z_o; \quad \varphi_c = 0. \quad (10.29)$$

Satisfacerea condiției Heavisaid (10.28) la cablurile telefonice este mai greu de îndeplinit, datorită capacității lor C_ℓ mari și L_ℓ mică. Deci este nevoie a se mări artificial inductivitatea lineică L_ℓ . Prin *procedeul Krarup* se înfășoară cablul cu o bandă feromagnetică măbind astfel L_ℓ până se satisface (10.28).

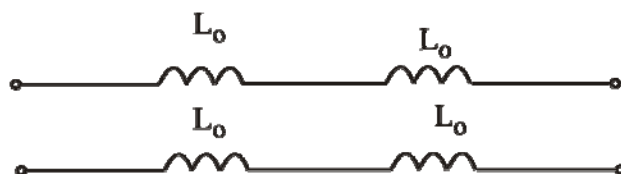


Fig. 10.6

Procedeul Pupin presupune a secționa cablul și la intervale egale (mai mici decât λ) se introduc bobine cu inductivitatea L_0 (figura 10.6) care să îndeplinească (10.28). Aceste bobine vor întârzia armonicile înalte sosite primele până se reface semnalul inițial și ultima refacere este la bornele de ieșire 2-2' (*pupinizarea cablului*).

Aplicație

Să se determine impedanța de intrare \underline{Z}_i a unei linii omogene de lungime ℓ având parametrii \underline{Z}_c și $\underline{\gamma}$ când este închisă pe impedanța de sarcină \underline{Z}_s . Să se particularizeze expresia lui \underline{Z}_i în următoarele cazuri:

a₁) $\underline{Z}_s = \underline{Z}_c$; a₂) $\underline{Z}_s = 0$ (mers în scurt); a₃) $\underline{Z}_s \rightarrow \infty$ (mers în gol).

b) pentru linia fără pierderi ($R_\ell = G_\ell = 0$; $\alpha = 0$).

c) pentru linia de lungime egală cu un număr par (impar) de sferturi de lungime de undă ($\lambda/4$).

d) pentru linia infinit lungă ($\ell \rightarrow \infty$).

Plecând de la ecuațiile (10.23) ale liniei lungi putem scrie:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{U}_2 (\text{ch} \underline{\gamma} \ell + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_s} \text{sh} \underline{\gamma} \ell) \\ \underline{I}_1 = \underline{I}_2 (\text{ch} \underline{\gamma} \ell + \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_c} \text{sh} \underline{\gamma} \ell) \end{cases} \quad (10.30)$$

Impedanța de intrare se scrie succesiv sub forma:

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_s \frac{\text{ch} \underline{\gamma} \ell + \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_s} \text{sh} \underline{\gamma} \ell}{\text{ch} \underline{\gamma} \ell + \frac{\underline{Z}_s}{\underline{Z}_c} \text{sh} \underline{\gamma} \ell} = \underline{Z}_c \frac{1 + \frac{\underline{Z}_s - \underline{Z}_c}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_c} e^{-2\underline{\gamma} \ell}}{1 + \frac{\underline{Z}_c - \underline{Z}_s}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_c} e^{-2\underline{\gamma} \ell}}$$

a₁) Dacă $\underline{Z}_s = \underline{Z}_c \Rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c$ - linia funcționează adaptat.

a₂) Dacă $\underline{Z}_s = 0 \Rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c \frac{1 - e^{-2\underline{\gamma} \ell}}{1 + e^{-2\underline{\gamma} \ell}} = \underline{Z}_c \text{th} \underline{\gamma} \ell$ - linia merge în scurt.

a₃) Dacă $\underline{Z}_s \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c \text{cth} \underline{\gamma} \ell$ - linia merge în gol.

b) Pentru o linie fără pierderi: $\underline{\gamma} = j\beta$; $\underline{Z}_c = Z_c \rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c \frac{1 + j \frac{Z_c}{Z_s} \operatorname{tg} \beta \ell}{1 + j \frac{Z_s}{Z_c} \operatorname{tg} \beta \ell}$

deci linia funcționează ca un transformator de impedanțe.

c) Dacă lungimea liniei este $\ell = k \frac{\lambda}{4}$; $k=\text{par}$ (impar), atunci:

$$\beta \ell = \frac{2\pi}{\lambda} k \frac{\lambda}{4} = k \frac{\pi}{2} ; e^{-2\gamma \ell} = e^{-2\alpha \ell} e^{-j2\beta \ell} = e^{-2\alpha \ell} e^{-jk \frac{\pi}{2}} = (-1)^k e^{-2\alpha \ell} .$$

$$\underline{Z}_i = \underline{Z}_c \frac{(\underline{Z}_s + \underline{Z}_c) + (\underline{Z}_s - \underline{Z}_c) e^{-2\gamma \ell}}{(\underline{Z}_s + \underline{Z}_c) - (\underline{Z}_s - \underline{Z}_c) e^{-2\gamma \ell}} = \underline{Z}_c \frac{(\underline{Z}_s + \underline{Z}_c) + (-1)^k (\underline{Z}_s - \underline{Z}_c)}{(\underline{Z}_s + \underline{Z}_c) - (-1)^k (\underline{Z}_s - \underline{Z}_c)} .$$

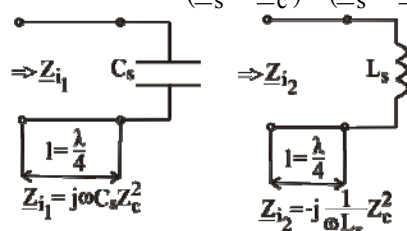


Fig. 10.7

Dacă $\alpha = 0$ (linie fără pierderi) atunci:

$$\begin{cases} \underline{Z}_i = \underline{Z}_s & \text{pentru } k=\text{par} - \text{linie sfert lungime de undă, adaptat} \\ \underline{Z}_i = \frac{Z_c^2}{\underline{Z}_s} & \text{pentru } k=\text{impar} - \text{linie jumătate lungime de undă și în acest caz} \\ & \text{linia se comportă ca un girator, schimbând caracterul de sarcină} \\ & \underline{Z}_s \text{ ca în figura 10.7.} \end{cases}$$

d) Pentru linia de lungime infinită: $\lim_{\ell \rightarrow \infty} e^{-2\gamma \ell} = 0 \rightarrow \underline{Z}_i = \underline{Z}_c$, valoarea sa este independentă de valoarea lui \underline{Z}_s .