

### 3. Legile fenomenelor electromagnetice

Studiul fenomenelor electromagnetice este mai dificil decât al altor fenomene fizice (mecanică, căldură, optică, acustică) deoarece omul nu este înzestrat cu simțuri speciale pentru perceperea directă a acestor fenomene (doar undele electromagnetice cu  $\lambda=(0.4-0.6) \mu\text{m}$  sunt perceptibile sub forma undelor luminoase). Studiul fenomenelor electromagnetice se face indirect, determinând câmpul să se manifeste prin forțe, cupluri, reacții chimice, etc pe care să le percepem și să le putem măsura.

Fenomenul electromagnetic va fi privit unitar din punct de vedere macroscopic când toate acțiunile pe care le mijlocește câmpul electromagnetic se transmit cu viteză finită, prin contiguitate (din aproape în aproape, în timp și spațiu). Toate acțiunile transmise prin câmp sunt întârziate, având nevoie de timp pentru a se propaga.

Această teorie despre câmpul electromagnetic a fost inițiată de Faraday, a fost desăvârșită de Maxwell pentru corpuri imobile și a fost completată de Hertz pentru corpuri mobile. Este o teorie fenomenologică – *teoria macroscopică clasică* – care consideră mediile corporale ca fiind continuie și nu abordează sistemele fizice la scară atomică (doar anumitor aspecte le vom da o explicație microscopică pentru a le înțelege mai bine semnificația).

Între mărimile fizice ale unui domeniu al științei se pot stabili relații de legătură de două feluri:

*legi* – acele relații care exprimă cele mai generale cunoștințe despre fenomenele unui domeniu al științei, stabilite pe cale experimentală pe baza cercetării domeniului și care nu se pot deduce logic din alte cunoștințe mai generale; numărul lor este fix în orice domeniu al științei.

*teoreme* – acele relații care se pot deduce logic plecând de la legi. Ele vizează aspecte particulare și servesc la soluționarea unor probleme practice, pentru a nu fi nevoiți să apelăm la legi de fiecare dată.

Legile teoriei macroscopice a fenomenelor electromagnetice sunt:

*legi generale*: valabile în orice sistem fizic; ele nu conțin în expresia lor decât constante universale.

*legi de material*: în expresia lor apar constante (coeficienți) care au valori specifice pentru fiecare material ce intră în componența corpurilor ce alcătuiesc sistemul.

Legile au *forme integrale* (valabile pe un anumit domeniu) și *forme locale* (valabile într-un punct din domeniu).

### 3.1 Legea fluxului electric

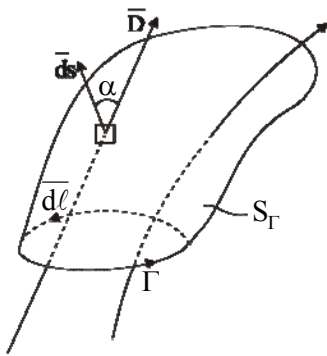


Fig 3.1

Fluxul electric este o mărime electrică derivată, asociată cu inducția electrică  $\vec{D}$ . Fluxul electric printr-o suprafață deschisă  $S_\Gamma$  (care se sprijină pe curba  $\Gamma$ ) este definit prin:

$$\Psi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int D ds \cos \alpha \quad (3.1)$$

Orientarea lui  $d\vec{s}$  (deci a suprafeței  $S_\Gamma$ ) depinde de orientarea elementului  $d\vec{\ell}$  al curbei  $\Gamma$  (figura 3.1).

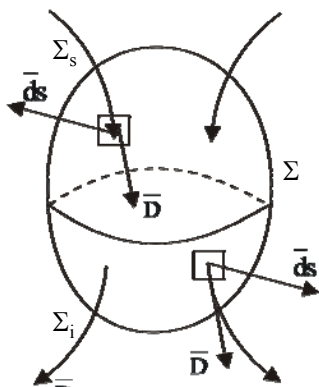


Fig 3.2

Fluxul printr-o suprafață închisă  $\Sigma$  (figura 3.2) pe care o considerăm întotdeauna orientată după normala sa exterioară, se poate descompune în fluxul prin emisfera superioară  $\Sigma_s$  și fluxul prin emisfera inferioară  $\Sigma_i$ , cele două emisfere fiind separate prin planul ecuatorial.

$$\Psi_\Sigma = \int_{\Sigma_s} \vec{D} \cdot d\vec{s} + \int_{\Sigma_i} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \Psi_s^- + \Psi_i^+ \quad (3.2)$$

În emisfera superioară intră liniile lui  $\vec{D}$ , unghiul dintre  $\vec{D}$  și  $d\vec{s}$  este obtuz și

$$\Psi_s = \int_{\Sigma_s} \vec{D} \cdot d\vec{s} < 0 \text{ iar prin emisfera inferioară ies}$$

liniile lui  $\vec{D}$ , unghiul dintre  $\vec{D}$  și  $d\vec{s}$  este ascuțit și  $\Psi_i = \int_{\Sigma_i} \vec{D} \cdot d\vec{s} > 0$ . Cum

fluxul  $\Psi_\Sigma$  este suma de doi termeni unul (+) și altul (−) vom avea:

$$\Psi_\Sigma = \Psi_s^- + \Psi_i^+ = \begin{cases} + & \text{dacă } \Psi_i > |\Psi_s|, \text{ ies mai multe linii ale lui } \vec{D} \text{ decât intră} \\ 0 & \text{dacă } \Psi_i = |\Psi_s|, \text{ atâtea ies pe jos câte linii au intrat pe sus} \\ - & \text{dacă } \Psi_i < |\Psi_s|, \text{ ies mai puține linii decât au intrat} \end{cases}$$

Dintr-o suprafață închisă  $\Sigma$  pot să iasă mai multe linii de câmp decât au intrat numai dacă în volumul limitat de  $\Sigma$  ( $v_\Sigma$ ) există surse pozitive care generează noi linii de câmp. Ies mai puține linii de câmp numai dacă în  $v_\Sigma$

există surse negative (puțuri) care absorb liniile de câmp, respectiv ies atâtea linii câte au intrat dacă în  $v_\Sigma$  nu există nici o sursă sau productivitatea surselor (+) este egală cu productivitatea surselor (-).

Deci între fluxul electric printr-o suprafață închisă  $\Sigma$  și distribuția surselor în interiorul suprafeței  $\Sigma$  există o legătură. Dar sursele unui câmp electric sunt sarcinile electrice. Legea fluxului electric face legătura dintre fluxul electric prin  $\Sigma$  și sarcinile conținute în interiorul acestei suprafețe:

$$\int_{\Sigma} \bar{D} \, d\bar{s} = q_{\Sigma} \quad (3.3)$$

Expresia (3.3) reprezintă *forma integrală* a legii fluxului electric și spune că „fluxul electric printr-o suprafață închisă  $\Sigma$ , oarecare, este egal numeric cu sarcina electrică conținută în interiorul lui  $\Sigma$ ”.

Expresia legii (3.3) este valabilă în orice sistem și în orice regim de funcționare, deci este o lege generală. Valoarea sarcinii  $q_{\Sigma}$  conține doar sarcinile interioare  $q_i$ , al căror câmp  $\bar{D}_1$  produce flux prin  $\Sigma$ . O sarcină exterioară  $q_e$  (figura 3.3) creează câmpul  $\bar{D}_2$  care nu contribuie la fluxul  $\Psi_{\Sigma}$  (unele linii înțepă suprafața  $\Sigma$  de două ori, cu (-) la intrare și cu (+) la ieșire iar altele nu o înțepă niciodată).

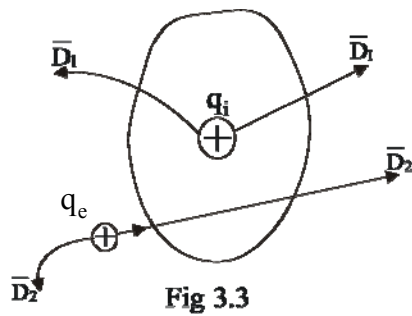


Fig. 3.3

Considerând sarcina  $q_{\Sigma}$  repartizată în interiorul volumului  $v_{\Sigma}$  cu densitatea  $\rho_v$ , astfel încât  $\rho_v \neq 0$  în regiunile unde există efectiv corpuri încărcate cu sarcină și  $\rho_v = 0$  în spațiul dintre corpuri, atunci:

$$\left. \begin{aligned} q_{\Sigma} &= \int_{v_{\Sigma}} \rho_v \, dv \\ \int_{\Sigma} \bar{D} \, d\bar{s} &= \int_{v_{\Sigma}} \operatorname{div} \bar{D} \, dv \end{aligned} \right\} \xrightarrow{v_{\Sigma} = \text{arbitrar}} \operatorname{div} \bar{D} = \rho_v \quad (3.4)$$

Relația (3.4) constituie *forma locală* a legii fluxului electric. Cum divergența unui câmp indică sursele acelui câmp, legea (3.4) arată că sursele câmpului  $\bar{D}$  sunt distribuțiile de sarcină  $\rho_v$ : liniile lui  $\bar{D}$  încep pe sarcinile (+) și se termină pe sarcinile (-). Cartezian expresia (3.4) se scrie sub forma:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho_v(x, y, z) \quad (3.5)$$

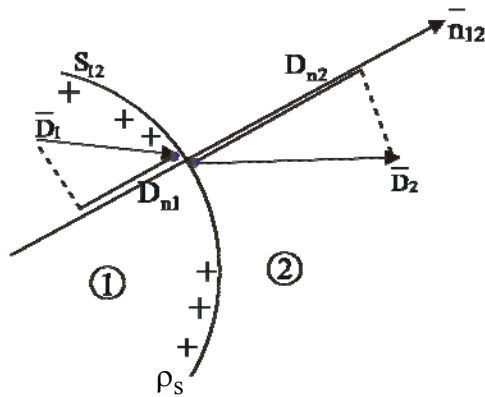


Fig. 3.4

În domeniile neîncărcate cu sarcină unde  $\rho_v = 0$ , liniile lui  $\bar{D}$  trec continuu, nici nu apar nici nu dispar linii ale câmpului  $\bar{D}$ .

Dacă suprafața de trecere  $S_{12}$  dintre mediile ① și ② (deci  $S_{12}$  este o discontinuitate) este încărcată cu distribuția superficială de sarcină  $\rho_s$  (*discontinuitate activă*), atunci aplicând (3.4) în punctele din jurul discontinuității vom avea:

$$\text{div}_s \bar{D} = \rho_s \rightarrow \bar{n}_{12} \cdot (\bar{D}_2 - \bar{D}_1) = \rho_s \rightarrow D_{n2} - D_{n1} = \rho_s \quad (3.6)$$

Cum  $\rho_s > 0 \rightarrow D_{n2} > D_{n1}$ , ca în figura 3.4.

Dacă  $S_{12}$  este o *discontinuitate pasivă* ( $\rho_s = 0$ ) atunci:

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (3.7)$$

respectiv la trecerea printr-o joncțiune pasivă ( $\rho_s = 0$ ) liniile lui  $\bar{D}$  astfel se refractă încât se conservă componenta normală a lui  $\bar{D}$ .

Relațiile (3.4), (3.6) și (3.7) sunt formele locale ale legii în domenii de continuitate sau de discontinuitate.

*Observații:*

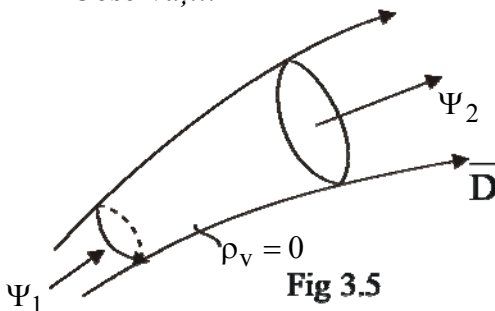


Fig. 3.5

- Liniile lui  $\bar{D}$  care trec printr-o suprafață limitată de un contur (figura 3.5) formează un *tub de flux electric*. Cum în interiorul tubului nu există sarcini  $\rho_v = 0$ , rezultă că  $\Psi_1 = \Psi_2$ , deci printr-un tub de flux, fluxul este *conservativ*.

„*Tub unitate*” este acela a căruia suprafață este străbătută de unitatea de flux. Fiecare tub unitate este înlocuit cu o linie a câmpului  $\bar{D}$  care coincide cu axa tubului, obținând astfel *spectrul liniilor* lui  $\bar{D}$ . Din acest motiv fluxul printr-o suprafață este

definit ca *numărul liniilor de câmp care străbat suprafața* respectivă, fiecare linie ține loc de un tub unitar de flux. Când liniile nu înțepă o suprafață, fluxul este zero.

- Din relația (3.3)  $\psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{D} \, ds = q_{\Sigma}$  rezultă dimensional:

$$\begin{cases} [\Psi_{\Sigma}] = [q_{\Sigma}] = C \\ [D] = \frac{[q_{\Sigma}]}{[S]} = \frac{C}{m^2} \end{cases} \quad (3.8)$$

- *Formele integrale* ale unei legi (valabile pe un domeniu) se pot verifica experimental iar *formele locale* (valabile într-un punct din domeniu) stau la baza algoritmilor de calcul a unui câmp.

- Dacă suprafața  $\Sigma$  trece doar prin mediu continuu cu  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$  (unde  $\overline{D} = \varepsilon \overline{E}$ ), atunci legea se scrie succesiv:

$$\int_{\Sigma} \overline{D} \, ds = \int_{\Sigma} \varepsilon \overline{E} \, ds = \varepsilon \int_{\Sigma} \overline{E} \, ds = q_{\Sigma} \Rightarrow \int_{\Sigma} \overline{E} \, ds = \frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon} \quad (3.9)$$

Forma particulară (3.9) a legii fluxului electric, pentru domenii de continuitate este cunoscută sub numele de *teorema lui Gauss*. Forma locală asociată expresiei (3.9) este:

$$\operatorname{div} \overline{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \quad (3.10)$$

Dacă mediul cu  $\varepsilon$  a fost înlocuit prin sarcinile de polarizație echivalente ( $\rho_{vp} = -\operatorname{div} \overline{P}$ ), atunci din legea legăturii (2.19) se obține:

$$\operatorname{div} \overline{E} = \frac{\operatorname{div} \overline{D} - \operatorname{div} \overline{P}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_v + \rho_{vp}}{\varepsilon_0} \quad (3.11)$$

Deci în vid ( $\varepsilon_0$ ), sursele câmpului  $\overline{E}$  sunt atât sarcinile reale  $\rho_v$  cât și sarcinile de polarizație  $\rho_{vp}$ .

- Plecând de la formele integrale (3.3) și (3.10) se pot stabili algoritmi de calcul pentru câmpul  $\overline{D}$  (respectiv  $\overline{E}$ ) dacă intuiesc apriori forma liniilor lui  $\overline{D}$  (respectiv  $\overline{E}$ ) și aleg suprafața  $\Sigma$  în concordanță cu geometria liniilor de câmp.

Suprafața  $\Sigma$  se alege astfel:

a) să fie ortogonală câmpului  $\overline{D}$  (respectiv  $\overline{E}$ ):

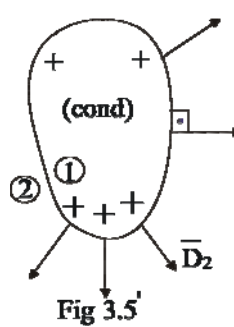
$$\overline{D} \, ds = D \, ds ; \quad (\overline{E} \, ds = E \, ds) \quad (3.12)$$

b) să fie o suprafață de câmp constant:  $D|_{\Sigma} = ct$ ;  $(E|_{\Sigma} = ct)$  (3.13)

În ipotezele (3.12) și (3.13) calculul integralei de flux din (3.3) se simplifică astfel:

$$\int_{\Sigma} \overline{D} \, d\overline{s} = \int_{\Sigma} \underset{(a)}{D} d\underset{(b)}{s} = D \int_{\Sigma} ds = D \cdot A_{\Sigma} = q_{\Sigma} \Rightarrow D = \frac{q_{\Sigma}}{A_{\Sigma}}; \left( E = \frac{q_{\Sigma}}{\varepsilon A_{\Sigma}} \right) \quad (3.14)$$

• Pentru o piesă conductoare încărcată superficial cu distribuția de sarcină  $\rho_s$ , în interiorul său nu există câmp ( $\overline{D}_1 = 0$ ) iar în exterior câmpul este



$D_2 = D_{n_2}$ , normală la suprafața conductorului, atunci forma locală (3.6) aplicată pe suprafața unei piese conductoare devine:

$$D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \xrightarrow{D_{n_1}=0} D_2 = D_{n_2} = \rho_s \quad (3.15)$$

Valoarea inducției electrice  $\overline{D}$  lângă un corp conductor este egală cu valoarea locală a lui  $\rho_s$  iar ca vector este  $\perp$  pe suprafața corpului conductor.

### Aplicații:

1. O sarcină punctiformă  $q$  este situată în vid (figura 3.6). Se cere expresia câmpului electric creat în jurul său.

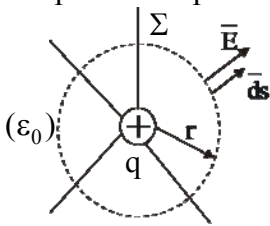


Fig 3.6

Câmpul electric este *radial* (liniile lui  $\overline{E}$  în lungul vectorului de poziție  $\vec{r}$ ) cu simetrie sferică (simetria unui câmp este dată de forma suprafețelor sale echipotențiale). Aplicând legea fluxului electric sub forma (3.14) pe suprafață  $\Sigma$  sferă de rază  $r$  obținem:

$$\int_{\Sigma} \overline{D} \, d\overline{s} = q_{\Sigma} \Leftrightarrow D \cdot 4\pi r^2 = q \rightarrow D = \frac{q}{4\pi r^2} \rightarrow \overline{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overline{E} = \frac{\overline{D}}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}$$

2. O sferă dielectrică de rază  $a$  și permitivitate  $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  este încărcată uniform cu sarcina  $q$  ( $\rho_v = \frac{q}{V} = \frac{3q}{4\pi a^3}$ ) și plasată în vid. Se cere expresia câmpului creat.

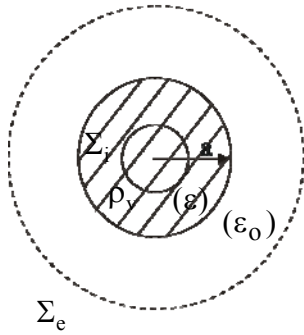


Fig 3.7

Atât în interiorul sferei ( $r < a$ ) cât și în exteriorul său, câmpul electric este radial cu simetrie sferică; deci vom alege suprafețe  $\Sigma$  sfere atât pentru interior ( $\Sigma_i$ ) cât și pentru exterior ( $\Sigma_e$ ) de forma unor sfere (ortogonale pe liniile de câmp) ca în figura 3.7

→ Pe domeniul interior ( $r < a$ ) rezultă:

$$\int_{\Sigma_i} \bar{D}_i \cdot d\bar{s} = q_{\Sigma_i} \quad \leftrightarrow \quad D_i 4\pi r^2 = \rho_v \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$\rightarrow D_i = \frac{1}{3} \rho_v r \quad \rightarrow \quad \bar{D}_i = \frac{1}{3} \rho_v \bar{r} \quad \rightarrow \quad \bar{E}_i = \frac{\rho_v}{3\epsilon} \bar{r}$$

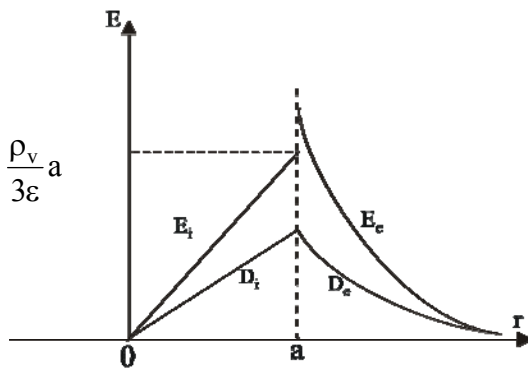


Fig 3.8

→ Pe domeniul exterior ( $r \geq a$ ) vom avea:

$$\int_{\Sigma_e} \bar{D}_e \cdot d\bar{s} = q_{\Sigma_e} \quad \leftrightarrow \quad D_e 4\pi r^2 = \rho_v \frac{4\pi a^3}{3} \rightarrow D_e = \frac{\rho_v a^3}{3} \frac{1}{r^2} \rightarrow$$

$$\bar{D}_e = \frac{\rho_v a^3}{3} \frac{\bar{r}}{r^3} \rightarrow \bar{E}_e = \frac{\rho_v a^3}{3\epsilon_0} \frac{\bar{r}}{r^3}$$

Suprafața sferei de rază  $a$  este o discontinuitate (în interior este  $\epsilon$  și în exterior  $\epsilon_0$ ) deci valoarea lui  $E$  suferă un salt. În schimb:

$$(D_i)_{r=a} = \frac{\rho_v}{3} a = (D_e)_{r=a}$$

deci valorile câmpului  $D$  nu sunt afectate de discontinuitatea mediului, ca în figura 3.8.

**3.** Un fir rectiliniu foarte lung este încărcat uniform cu densitatea liniară  $\rho_\ell [C/m]$ . Se cere expresia câmpului electric creat.

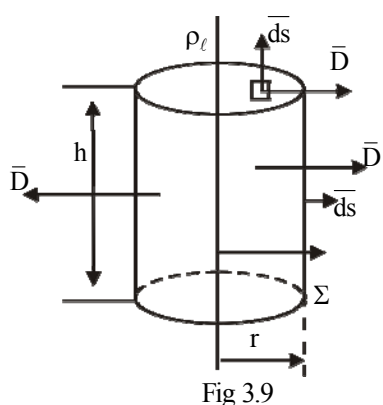


Fig 3.9

Câmpurile  $\vec{D}$  și  $\vec{E}$  sunt radiale cu simetrie cilindrică, deci și suprafața  $\Sigma$  o alegem un cilindru de rază  $r$  și lungime  $h$  (figura 3.9).

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} &= \int_{\Sigma_{lat}} \vec{D} \cdot d\vec{s} + 2 \int_{\Sigma_{bază}} \underbrace{\vec{D} \cdot d\vec{s}}_{=0} = \\ &= D \cdot 2\pi r h = q_{\Sigma} = \rho_{\ell} h \Rightarrow D = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi} \frac{1}{r} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\vec{D} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi} \frac{\vec{r}}{r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\ell}}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

4. Un cilindru dielectric foarte lung și de rază  $a$  este încărcat uniform cu sarcină având densitatea  $\rho_v$ . Se cere expresia câmpului creat în interiorul și exteriorul său (figura 3.10).

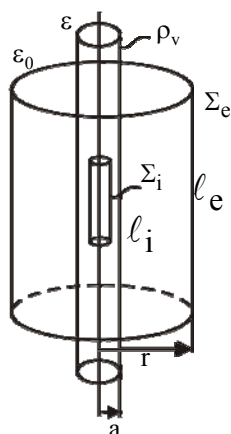


Fig 3.10

Câmpurile  $\vec{D}$  și  $\vec{E}$  sunt radiale cu simetrie cilindrică:

→ Pentru interiorul cilindrului  $r < a$ :

$$\int_{\Sigma_i} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q_{\Sigma_i} \Leftrightarrow D_i 2\pi r \ell_i = \rho_v \pi r^2 \ell_i$$

$$\rightarrow D_i = \frac{\rho_v}{2} r \rightarrow \vec{D}_i = \frac{\rho_v}{2} \vec{r} \rightarrow \vec{E}_i = \frac{\rho_v}{2\epsilon} \vec{r}$$

→ Pentru exteriorul cilindrului ( $r \geq a$ ) rezultă succesiv:

$$\int_{\Sigma_e} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q_{\Sigma_e} \Leftrightarrow D_e 2\pi r \ell_e = \rho_v \pi a^2 \ell_e$$

$$\rightarrow D_e = \frac{\rho_v a^2}{2} \frac{1}{r} \rightarrow \vec{D}_e = \frac{\rho_v a^2}{2} \frac{\vec{r}}{r^2} \rightarrow \vec{E}_e = \frac{\rho_v a^2}{2\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^2}$$

5. O sferă conductoare de rază  $a$  este încărcată superficial cu sarcina  $q$  și este situată jumătate într-un mediu cu  $\epsilon_1$  iar cealaltă jumătate într-un mediu cu  $\epsilon_2$ . Se cer expresiile câmpului electric creat și densitățile de sarcină pe cele două emisfere.



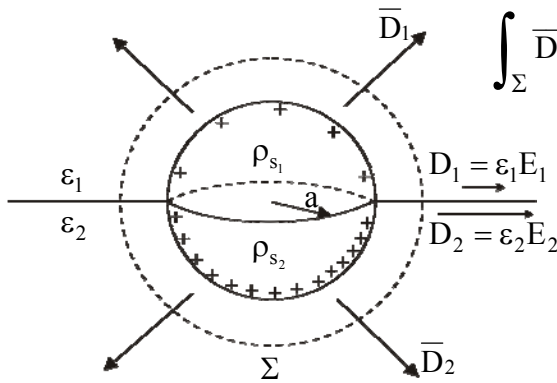


Fig 3.11

$$\int_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = q_{\Sigma} \leftrightarrow (D_1 + D_2)2\pi r^2 = q$$

În plan ecuatorial este discontinuitate, unde se conservă componenta tangențială a lui  $\vec{E}$ :

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{D_2}{\epsilon_2}$$

$$D_1 2\pi r^2 \left(1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right) = q \rightarrow D_1 = q \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{2\pi r^2} \rightarrow E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1}$$

$$D_2 = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} D_1 = q \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{2\pi r^2} \rightarrow E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_2}$$

Distribuția sarcinii pe cele două emisfere conform relației (3.15) va fi:

$$\begin{cases} \rho_{s_1} = (D_1)_{r=a} = q \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{2\pi a^2} \\ \rho_{s_2} = (D_2)_{r=a} = q \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{2\pi a^2} \end{cases} \Rightarrow (\rho_{s_1} + \rho_{s_2})2\pi a^2 = q$$

### 3.2 Legea fluxului magnetic

Sub formă integrală legea spune că: „fluxul magnetic printr-o suprafață închisă  $\Sigma$  este nul în orice regim de funcționare, indiferent ce formă are  $\Sigma$ ”.

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \quad (3.16)$$

Forma integrală (3.16) a legii pune în evidență caracterul conservativ al fluxului magnetic; fluxul care intră printr-o parte a suprafeței închise  $\Sigma$  este egal cu fluxul care iese prin altă parte, iar fluxul printr-o suprafață deschisă  $S_{\Gamma}$  depinde doar de forma curbei  $\Gamma$ .

În domenii de continuitate a câmpului  $\vec{B}$  se poate scrie, cu teorema lui Gauss:

$$\int_{\Sigma} \bar{\mathbf{B}} \, d\bar{\mathbf{s}} = \int_{v_{\Sigma}} \operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} \, dv = 0 \quad \xrightarrow{v_{\Sigma}=\text{arbitrar}} \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad (3.17)$$

Expresia (3.17) reprezintă *forma locală* a legii fluxului magnetic. Cum în orice punct din spațiu  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0$ , înseamnă că liniile inducției magnetice  $\bar{\mathbf{B}}$  sunt întotdeauna *linii închise* (sau sunt un fascicul paralel de linii de câmp). Deci câmpul  $\bar{\mathbf{B}}$  este un câmp fără surse (nu există *sarcini magnetice* care ar produce câmpul magnetic) și este numit *câmp solenoidal*.

Dacă  $\operatorname{div} \bar{\mathbf{B}} = 0$  înseamnă că funcția vectorială  $\bar{\mathbf{B}}$  provine prin intermediul rotorului dintr-un *potențial magnetic vector*  $\bar{\mathbf{A}}$  (conform relației 1.15):

$$\bar{\mathbf{B}} = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}} \quad (3.18)$$

Potențialul vector  $\bar{\mathbf{A}}$  este o mărime vectorială *de calcul*, nu are o semnificație fizică; el se folosește doar pentru a crea algoritmi de calcul ai câmpului magnetic mult mai simpli. Ca orice funcție vectorială, potențialul  $\bar{\mathbf{A}}$  este univoc determinat dacă alături de rotorul său (3.18) se cunoaște și divergența sa (numită *condiția de etalonare*). În regim staționar și cvasistaționar se adoptă o condiție de etalonare *de tip Coulomb*:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{A}} = 0 \quad (3.19)$$

Cu ajutorul potențialului  $\bar{\mathbf{A}}$ , fluxul magnetic printr-o suprafață deschisă  $S_{\Gamma}$  care se sprijină pe curba închisă  $\Gamma$  se poate exprima astfel:

$$\Phi_{S_{\Gamma}} = \int_{S_{\Gamma}} \bar{\mathbf{B}} \, d\bar{\mathbf{s}} = \int_{S_{\Gamma}} \operatorname{rot} \bar{\mathbf{A}} \, d\bar{\mathbf{s}} = \oint_{\Gamma} \bar{\mathbf{A}} \, d\bar{\ell} \quad (3.20)$$

Deci pentru a calcula un flux magnetic  $\Phi_{S_{\Gamma}}$  trebuie cunoscute fie valorile lui  $\bar{\mathbf{B}}$  în toate punctele suprafeței  $S_{\Gamma}$ , fie valorile potențialului  $\bar{\mathbf{A}}$  doar în punctele conturului  $\Gamma$ , problemă mult mai simplă; deci fluxul  $\Phi_{S_{\Gamma}}$  depinde doar de forma curbei  $\Gamma$ . Forma locală (3.17) este valabilă doar în domenii de continuitate ale mediului, deci ale câmpului magnetic. În jurul unei suprafețe de discontinuitate forma (3.17) devine:

$$\operatorname{div}_s \bar{\mathbf{B}} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{n}}_{12} \cdot (\bar{\mathbf{B}}_2 - \bar{\mathbf{B}}_1) = 0 \quad \rightarrow \quad B_{n_1} = B_{n_2} \quad (3.21)$$

respectiv la trecerea printr-o discontinuitate liniile câmpului  $\bar{\mathbf{B}}$  astfel se refractă încât se conservă componenta normală a inducției magnetice.

Dimensional  $[\Phi] = \text{Wb}$  (Weber) iar din expresia (3.16) rezultă:

$$[B] = \frac{\Phi}{S} = \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \text{T} \quad (\text{tesla}) \quad (3.22)$$

Totodată, din

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \xrightarrow{B = \frac{\partial A}{\partial r}} [A] = [B] \cdot [r] = \frac{N}{A \cdot m} \cdot m = \frac{N}{A} = T \cdot m \quad (3.23)$$

*Observații:*

- Într-un câmp magnetic uniform fluxul magnetic prin suprafața  $S_r$

este:  $\Phi_{S_r} = \vec{B} \cdot \vec{S}_r$  iar într-un câmp neuniform el este  $\Phi_{S_r} = \int_{S_r} \vec{B} \cdot d\vec{s}$ .

- Legea legăturii în câmp magnetic (2.53) precizează legătura dintre inducția magnetică  $\vec{B}$ , intensitatea câmpului magnetic  $\vec{H}$  și magnetizația  $\vec{M}$ :  $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ , unde  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$  este *permeabilitatea vidului*,

iar  $\nu_0 = \frac{1}{\mu_0} = \frac{10^7}{4\pi}$  și este *reluctivitatea vidului*. Legea legăturii se poate

scrie sub forma:

$$\vec{H} = \nu_0 \vec{B} - \vec{M} \quad (3.25)$$

Legea legăturii în câmp electric (2.19) este de forma:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.26)$$

Comparând cele două expresii (3.25) și (3.26) se poate stabili o *analogie între câmpul electric și câmpul magnetic*:

**câmp electric      câmp magnetic**

$\vec{E} \longleftrightarrow \vec{B}$	$\rightarrow \vec{E}$ și $\vec{B}$ sunt <i>vectorii de bază</i> în cele două câmpuri; în funcție de ei se exprimă efectele motoare, forțe, energii, etc.
$\vec{D} \longleftrightarrow \vec{H}$	$\rightarrow \vec{D}$ și $\vec{H}$ sunt <i>vectorii auxiliari</i> ai celor două câmpuri
$\epsilon_0 \longleftrightarrow \nu_0 = \frac{1}{\mu_0}$	$\rightarrow$ <i>corespondența factorilor de mediu</i>
$(\epsilon) \longleftrightarrow (\frac{1}{\mu})$	
$\vec{P} \longleftrightarrow -\vec{M}$	$\rightarrow$ mărimea $\vec{P}_m = -\vec{M}$ este <i>polarizația magnetică</i>

### 3.3 Legea circuitului magnetic (legea curentului total)

#### 3.3.1 Formele integrale ale legii

„Tensiunea magnetomotoare (t.m.m)  $u_{mm_\Gamma}$  de-a lungul oricărei curbe închise  $\Gamma$  este egală cu suma dintre solenația  $\theta_{S_\Gamma}$  corespunzătoare unei suprafețe  $S_\Gamma$  ce se sprijină pe curba închisă  $\Gamma$  și curentul hertzian  $i_{H_\Gamma}$  prin suprafața  $S_\Gamma$ ”. Matematic aceasta se scrie sub forma:

$$u_{mm_\Gamma} = \theta_{S_\Gamma} + \underbrace{\frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}}_{i_{H_\Gamma}} \quad (3.27)$$

Expresia (3.27) este *forma integrală* a legii, unde:

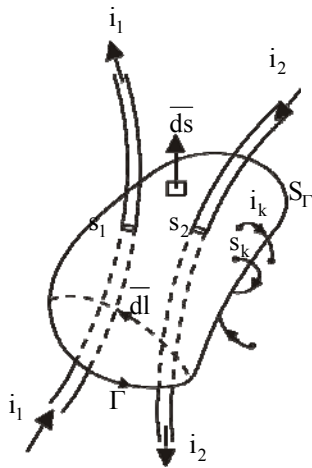


Fig 3.12

- $u_{mm_\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$  – este *t.m.m.* de-a lungul curbei  $\Gamma$  iar  $u_{m_{12}} = \int_1^2 \vec{H} \cdot d\vec{\ell}$  este *tensiunea magnetică* între punctele 1 și 2 din câmpul  $\vec{H}$
- $\theta_{S_\Gamma}$  – este *solenația* (curentul de

*conducție total*) care străbate suprafața  $S_\Gamma$ . Așa cum intensitatea curentului caracterizează curentul printr-un conductor, solenația generalizează „curentul printr-un conductor” la „curentul printr-o suprafață oarecare  $S_\Gamma$ ”, care poate fi străbătută de mai multe conductoare sau

de același conductor care trece de mai multe ori prin  $S_\Gamma$  (figura 3.12). Admitem o densitate de curent  $\vec{J}$  prin suprafața  $S_\Gamma$  definită astfel încât să fie nulă în toate punctele suprafeței  $S_\Gamma$  cu excepția suprafețelor  $S_1, S_2, \dots, S_k$  efectiv parcurse de curent.

$$J = \begin{cases} \neq 0 & \text{pentru } \bigcup_{k=1}^n S_k \\ = 0 & \text{pentru } S_\Gamma - \bigcup_{k=1}^n S_k \end{cases} \quad (3.28)$$

În funcție de această densitate de curent (3.28), solenația se scrie sub forma:

$$\theta_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{J} \, d\bar{s} \quad (3.29)$$

• *curentul hertzian* prin suprafața  $S_\Gamma$  este :  $i_{H_\Gamma} = \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}$  (3.30)

unde:  $\psi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \bar{D} \, d\bar{s}$  este fluxul electric prin suprafața  $S_\Gamma$ . Fluxul electric

din (3.8) are dimensiune:  $[\psi] = [q] = C$  iar  $i_{H_\Gamma}$  va avea dimensiunea:

$$i_{H_\Gamma} = \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt} \rightarrow [i_{H_\Gamma}] = \frac{[d\psi_{S_\Gamma}]}{[dt]} = \frac{C}{s} = A \quad (3.31)$$

În expresia (3.30) avem o *derivată substanțială de flux*: un flux printr-o suprafață  $S_\Gamma$  poate fi variabil fie din cauza variației câmpului  $\bar{D}$ , respectiv  $\bar{D}(t)$  și suprafața este fixă în spațiu, fie câmpul nu este variabil în timp  $\bar{D} \neq \bar{D}(t)$  dar suprafața  $S_\Gamma$  se mișcă în spațiu cu viteza  $\bar{v}$  dinspre un câmp slab spre unul intens (derivata este (+)) sau invers (derivata este (-)). Matematic aceasta înseamnă:

$$i_{H_\Gamma} = \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S_\Gamma} \bar{D} \, d\bar{s} = \left[ \int_{S_\Gamma=\text{fixă}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \, d\bar{s} \right]_{\bar{D}=\bar{D}(t)} + \left[ \int_{S_\Gamma=\text{mobilă}} \left( \bar{v} \operatorname{div} \bar{D} + \operatorname{rot}(\bar{D} \times \bar{v}) \right) d\bar{s} \right]_{\bar{D} \neq \bar{D}(t)} \quad (3.32)$$

Ținând seama de (3.4) expresia (3.32) se scrie sub forma:

$$i_{H_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \, d\bar{s} + \int_{S_\Gamma} \rho_v \bar{v} \, d\bar{s} + \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot}(\bar{D} \times \bar{v}) \, d\bar{s} \quad (3.33)$$

Înlocuind în (3.27) expresiile lui  $u_{mm_\Gamma}$ ,  $\theta_{S_\Gamma}$  și  $i_{H_\Gamma}$  se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \, d\bar{\ell} = \underbrace{\int_{S_\Gamma} \bar{J} \, d\bar{s}}_{i_c} + \underbrace{\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \, d\bar{s}}_{i_d} + \underbrace{\int_{S_\Gamma} \rho_v \bar{v} \, d\bar{s}}_{i_T} + \underbrace{\int_{S_\Gamma} \operatorname{rot}(\bar{D} \times \bar{v}) \, d\bar{s}}_{i_R} \quad (3.34)$$

Expresia (3.34) este *forma integrală dezvoltată* a legii iar integralele din membrul drept reprezintă:

$i_c$  – intensitatea curentului de conducție prin  $S_\Gamma$  ( $\bar{J}$  este densitatea sa)

$i_d$  – intensitatea curentului de deplasare prin  $S_\Gamma$  ( $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$  este densitatea sa)

$i_T$  – intensitatea curentului de convecție (transport) prin  $S_\Gamma$  ( $\rho_v \bar{v}$  este densitatea sa)

$i_R$  – intensitatea curentului Röntgen prin  $S_\Gamma$  ( $\text{rot}(\bar{D} \times \bar{v})$  este densitatea sa)

*Observație:*

$\bar{J}_R = \text{rot}(\bar{D} \times \bar{v})$  este densitatea curentului Röntgen teoretic iar  $\text{rot}(\bar{P} \times \bar{v})$  este densitatea curentului Röntgen practic, verificat experimental, diferență care în formulare macroscopică nu afectează calculele tehnice; deosebirea are o justificare doar în electrodinamica relativistă.

În membrul stâng al legii (3.34) sunt numai mărimi magnetice iar în membrul drept sunt numai mărimi electrice. Deci legea circuitului magnetic *face legătura dintre aspectul electric și cel magnetic* al câmpului electromagnetic, respectiv legea spune că „un câmp magnetic este creat de către curenți electrici (indiferent de natura lor fizică: conducție, deplasare, convecție, Röntgen)”.

Aceasta este singura proprietate comună a celor patru genuri de curenți electrici, de unde și numele acestei legi de *legea curentului total*. Afirmția că: „*orice curent electric produce un câmp magnetic în jurul său*” admite și reciproca: „*nu pot exista linii de câmp magnetic fără ca ele să înconjoare linii de curent*”.

În *medii fixe* (fără corpuri în mișcare  $\bar{v} = 0$ ) expresia (3.34) se reduce la forma:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\ell = \theta_{S_\Gamma} + \int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \cdot \bar{ds} \quad (3.35)$$

respectiv câmpul magnetic  $\bar{H}$  este creat doar de curenți de conducție (solenajie) și de curenți de deplasare (câmpuri electrice variabile  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \neq 0$ ).

Regimul cvasistaționar este un regim variabil de frecvență mică

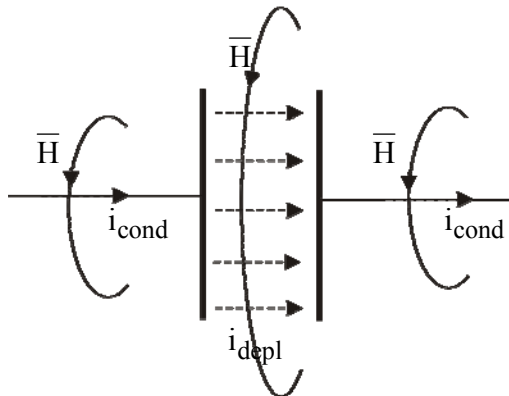


Fig 3.13

(medie) în care  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \ll$ , deci se poate neglija curentul de deplasare, respectiv câmpul magnetic creat de el, peste tot, cu excepția dielectricului dintre armăturile unui condensator (altfel nu se asigură continuitatea liniilor de curent prin condensator), vezi figura 3.13.

Deci în regim cvasistaționar un câmp magnetic este produs numai de către

curenți de conducție (solenajie) la fel ca și în regim staționar (curent

continuu):

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{\ell} = \theta_{S_{\Gamma}} \quad (3.36)$$

Această formă particulară a legii (3.36) valabilă în regim staționar și cvasistaționar este cunoscută și sub numele de *teorema lui Ampère*.

În *vid* unde nu există corpuri conductoare (deci  $\bar{J} = 0$ ,  $\theta_{S_{\Gamma}} = 0$ ) dar nici corpuri în mișcare ( $\bar{v} = 0$ ), din expresia (3.34) mai rămâne:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{\ell} = \int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \bar{ds} \quad (3.37)$$

care pune în evidență faptul că în lipsa corpurilor (în particular în *vid*), un câmp magnetic  $\bar{H}$  este produs doar de către curenții de deplasare, respectiv este produs de către câmpuri electrice variabile  $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \neq 0$ .

### 3.3.2 Formele locale ale legii

În domenii de continuitate a proprietăților fizice, respectiv de continuitate a câmpului magnetic, aplicând teorema lui Stokes în membrul stâng din (3.34) se obține:

$$\int_{S_{\Gamma}} \text{rot } \bar{H} \bar{ds} = \int_{S_{\Gamma}} \left[ \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \rho_v \bar{v} + \text{rot} \left( \bar{D} \times \bar{v} \right) \right] \bar{ds} \quad (3.38)$$

Cum suprafața  $S_{\Gamma}$  are o formă arbitrar aleasă, rezultă că:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \rho_v \vec{v} + \text{rot}(\vec{D} \times \vec{v}) \quad (3.39)$$

Expresia (3.39) reprezintă *forma locală* (valabilă în orice punct din domeniu) a legii circuitului magnetic, respectiv „liniile câmpului  $\vec{H}$  fac rotoare drepte în jurul tuturor liniilor de curent care l-au creat; liniile lui  $\vec{H}$  sunt conținute în plane  $\perp$  pe liniile de curent”.

- În *medii fixe*, fără corpuri în mișcare ( $\vec{v} = 0$ ) forma locală este:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.40)$$

Această formă locală a legii este cunoscută și sub denumirea de *prima ecuație a lui Maxwell* și ea face parte dintr-un sistem de ecuații cu derivate parțiale.

- În *regim cvasistaționar* ( $\frac{\partial}{\partial t} \ll ; \vec{v} = 0$ ) forma locală a legii este:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (3.41)$$

liniile lui  $\vec{H}$  fac *rotoare drepte* (regula burghiului drept) în jurul curentului  $\vec{J}$  din fire conductoare. Cum  $\text{rot } \vec{H} = \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$  rezultă că liniile lui  $\vec{H}$  și cele ale lui  $\vec{J}$  sunt conținute în plane ortogonale; aceasta ne ajută să intuim geometria liniilor lui  $\vec{H}$  atunci când cunoaștem geometria liniilor lui  $\vec{J}$  ca în figura 3.14.

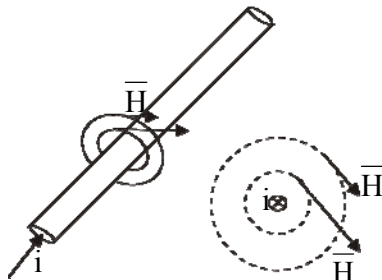


Fig 3.14

- În *vid* forma locală a legii este:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.42)$$

respectiv liniile unui câmp magnetic produs de un câmp electric variabil (figura 3.15) sunt conținute în plane perpendiculare pe liniile câmpului electric iar ca sens fac rotoare drepte, dacă  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} > 0$  sau

rotoare stângi, dacă  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} < 0$ .

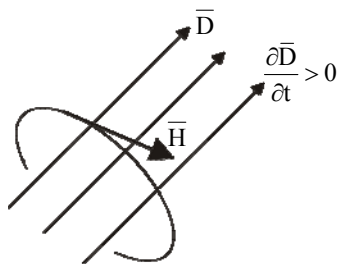


Fig 3.15

Expresiile (3.39), (3.40), (3.41), (3.42) deduse prin aplicarea teoremei lui Stokes sunt valabile doar în domeniile de continuitate.



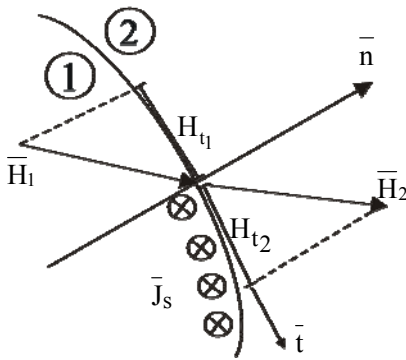


Fig 3.16

Dacă  $S_{12}$  este o *suprafață de discontinuitate* care separă domeniile ① și ② și presupunem că este o *discontinuitate activă* (conține o *pânză de curent*  $\bar{J}_s$ ), atunci forma (3.41) aplicată în vecinătatea lui  $S_{12}$  devine:

$$\text{rot}_s \bar{H} = \bar{J}_s \quad \leftrightarrow \quad \bar{n} \times (\bar{H}_2 - \bar{H}_1) = \bar{J}_s \quad \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bar{H}_{t2} - \bar{H}_{t1} = \bar{J}_s \quad (3.43)$$

unde  $\bar{n}$  și  $\bar{t}$  sunt versorii normal și tangent în orice punct al discontinuității  $S_{12}$  (vezi figura 3.16).

Dacă discontinuitatea  $S_{12}$  este o *discontinuitate pasivă*, o îmbinare între două medii cu  $\mu_1$  și  $\mu_2$  fără a conține o pânză de curent ( $\bar{J}_s = 0$ ) atunci:

$$\text{rot}_s \bar{H} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \bar{H}_{t2} = \bar{H}_{t1} \quad \leftrightarrow \quad H_{t2} = H_{t1} \quad (3.44)$$

La trecerea printr-o discontinuitate pasivă liniile lui  $\bar{H}$  astfel se refractă încât se conservă componenta tangențială a lui  $\bar{H}$ .

*Observație:*

Forma integrală (3.36) a legii poate constitui suport pentru a crea un algoritm de calcul a unui câmp magnetic creat de curenți de conducție:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \cdot d\bar{\ell} = \theta_{S_r} \quad (3.36)$$

Expresia (3.36) este adevărată pentru orice curbă închisă  $\Gamma$ , respectiv orice suprafață care se sprijină pe curba  $\Gamma$ . Calculul circulației din membrul stâng se simplifică dacă aleg curba  $\Gamma$  în concordanță cu geometria liniilor câmpului  $\bar{H}$ :

a-) dacă intuim apriori forma liniilor lui  $\bar{H}$ , alegem drept curbă  $\Gamma$  o linie de câmp, atunci  $\bar{H}$  și  $d\bar{\ell}$  vor fi tangente la curba  $\Gamma$ , respectiv:

$$\bar{H} \cdot d\bar{\ell} = H \cdot d\ell \quad (3.37)$$

b-) dacă geometria liniilor de câmp este astfel ca în lungul liniei de câmp modulul câmpului să rămână constant, atunci:

$$\oint_{\Gamma} H d\ell = H \oint_{\Gamma} d\ell = H \cdot \ell_{\Gamma} \quad (3.38)$$

această ipoteză este valabilă doar dacă liniile lui  $\vec{H}$  sunt echidistante (sau în particular paralele) ca în figura 3.17 și evaluăm lungimea liniei de câmp  $\ell_\Gamma$  și solenația  $\theta_{S_\Gamma}$  prin suprafața curbei  $\Gamma$ .

Deci dacă sunt îndeplinite ipotezele (3.37) și (3.38) atunci:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \theta_{S_\Gamma} \Leftrightarrow \begin{cases} \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} \underset{(a)}{=} \oint_{\Gamma} H d\ell \underset{(b)}{=} H \ell_\Gamma \\ \theta_{S_\Gamma} = \text{suma algebrică a curenților prin suprafața } S_\Gamma \end{cases}$$

$$H_\Gamma \cdot \ell_\Gamma = \theta_{S_\Gamma} \rightarrow H_\Gamma = \frac{\theta_{S_\Gamma}}{\ell_\Gamma} \quad (3.39)$$

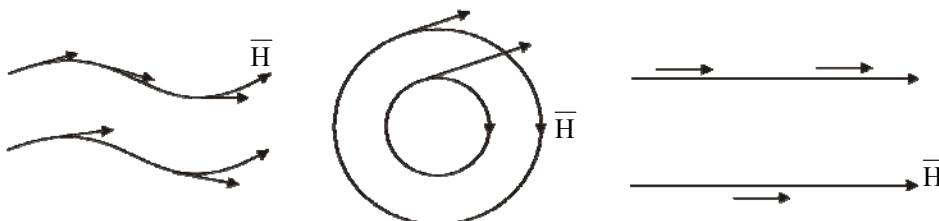


Fig 3.17

### Aplicații

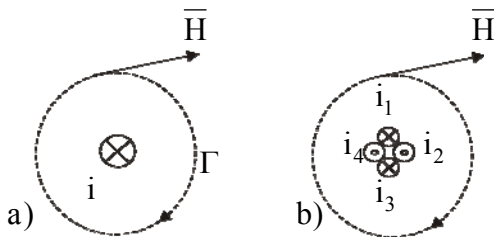


Fig 3.18

1. Un fir rectiliniu parcurs de curentul  $i$  sau un mănunchi de fire parcurse de curenții  $i_1, i_2, i_3$  și  $i_4$  este situat într-un mediu omogen (figura 3.18). Să se determine expresia câmpului magnetic creat.

În ambele situații liniile lui  $\vec{H}$  sunt cercuri de rază  $r$  situate în plane  $\perp$  pe firele parcurse de curenți. Cercurile fac parte din categoria liniilor echidistante, deci putem aplica (3.39):

$$a) \quad \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = i \Leftrightarrow H \cdot 2\pi r = i \rightarrow H = \frac{i}{2\pi r} \quad (3.40)$$

Ca vector liniile lui  $\vec{H}$  sunt tangente la cerc, deci sunt dirijate după

coordonata  $\varphi$  a sistemului cilindric:  $\vec{H} = H \vec{u}_\varphi = \frac{i}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$ ;  $\vec{u}_\varphi$  - versorul axei  $\varphi$ .

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \theta_{S_{\Gamma}} \quad \leftrightarrow \quad H \cdot 2\pi r = i_1 - i_2 + i_3 - i_4 \quad \rightarrow \\
 \rightarrow \quad H &= \frac{i_1 - i_2 + i_3 - i_4}{2\pi r} \quad \rightarrow \quad \vec{H} = H \cdot \vec{u}_{\varphi} \quad (3.41)
 \end{aligned}$$

2. O bobină cilindrică lungă (lungimea  $\ell$  a bobinei este mult mai mare decât diametrul spirelor) numită și *solenoid* are  $N$  spire parcurse de curentul  $i$  ca în figura 3.19. Se cere expresia câmpului  $\vec{H}$  creat.

Liniile lui  $\vec{H}$  sunt fascicul paralel și  $H \neq 0$  doar în interiorul solenoidului, deci putem aplica (3.39):

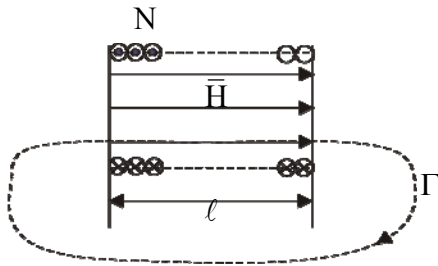


Fig 3.19

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= \theta_{S_{\Gamma}} \quad \leftrightarrow \quad H \cdot \ell = N \cdot i \quad \rightarrow \\
 \rightarrow \quad H &= \frac{N \cdot i}{\ell} \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Care este un câmp magnetic uniform (valoare constantă în interiorul bobinei).

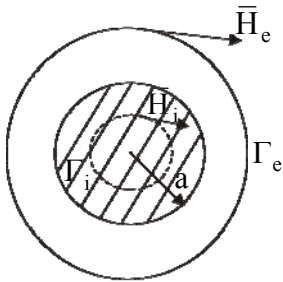


Fig 3.20

3. Un fir rectiliniu de rază  $a$  (figura 3.20) este parcurs de curentul conducție  $i$ , repartizat uniform pe secțiunea firului cu densitatea:  $J = \frac{i}{\pi a^2}$ . Se cere  $\vec{H}_i$  și  $\vec{H}_e$  și să se arate că  $\vec{B}_e = \mu \vec{H}_e$  satisface legea fluxului magnetic.

Liniile lui  $\vec{H}$  sunt cercuri atât în interiorul conductorului cât și în exteriorul său.

a) pentru interior ( $r < a$ ) alegem o linie de câmp  $\Gamma_i$  – cerc de rază  $r$  și aplicăm (3.39):

$$\oint_{\Gamma_i} \vec{H}_i \cdot d\vec{\ell} = \theta_{S_{\Gamma_i}} \quad \leftrightarrow \quad H_i \cdot 2\pi r = J \pi r^2 \quad \rightarrow \quad H_i = \frac{1}{2} J r = \frac{i}{2\pi a^2} r$$

Ca vector  $\vec{H}_i$  este tangent la curba  $\Gamma_i$ , deci are versorul  $\vec{u}_{\varphi}$ :

$$\vec{H}_i = H_i \cdot \vec{u}_{\varphi} \quad \text{sau} \quad \vec{H}_i = \frac{1}{2} J r \vec{u}_{\varphi} = \frac{1}{2} (\vec{J} \times \vec{r}) \quad (3.43)$$

b) pentru exteriorul conductorului ( $r \geq a$ ) alegem o linie de câmp  $\Gamma_e$ :

$$\oint_{\Gamma_e} \vec{H}_e \cdot d\vec{\ell} = \theta_{S_{\Gamma_e}} \leftrightarrow H_e \cdot 2\pi r = i \rightarrow H_e = \frac{i}{2\pi r}; \vec{H}_e = \frac{i}{2\pi r} \vec{u}_\varphi \quad (3.44)$$

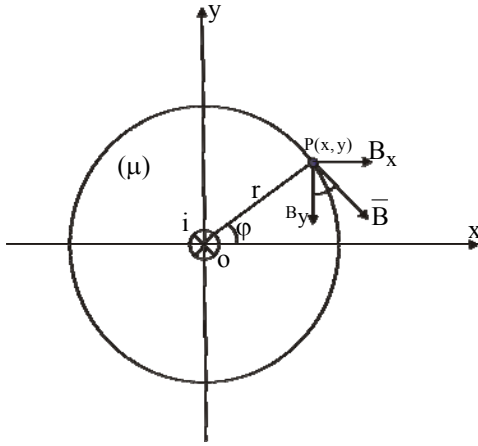


Fig 3.20'

Inducția magnetică în exteriorul firului este:  $B = B_e = \frac{\mu i}{2\pi r}$ . Componentele

acestui câmp se scriu sub forma:

$$\begin{cases} B_x = B \sin \varphi = B \frac{y}{r} = \frac{\mu i}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \\ B_y = -B \cos \varphi = -B \frac{x}{r} = \frac{\mu i}{2\pi} \frac{-x}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (3.44')$$

Înlocuite în forma locală (3.17) a legii fluxului magnetic ele o verifică sub forma:

$$\text{div} \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\mu i}{2\pi} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-x}{x^2 + y^2} \right) \right] = 0$$

### 3.4 Legea inducției electromagnetice

#### 3.4.1 Fenomenul de inducției electromagnetice

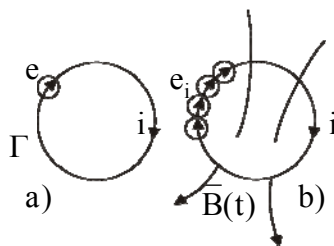


Fig 3.21

Experimental se constată că într-o spirală conductoare  $\Gamma$  există curent  $i$  dacă spira conține o sursă cu t.e.m.  $e$  (figura 3.21-a) care produce curentul  $i$  sau dacă prin suprafața spirei trece un câmp magnetic variabil în timp  $\vec{B}(t)$  ca în figura 3.21-b care induce în spirală t.e.m. indusă  $e_i$  și care la rândul său va produce un curent indus  $i$ . Deosebirea este că sursa „ $e$ ” este concentrată local pe spira  $\Gamma$  iar t.e.m. indusă  $e_i$  apare ca o sursă uniform

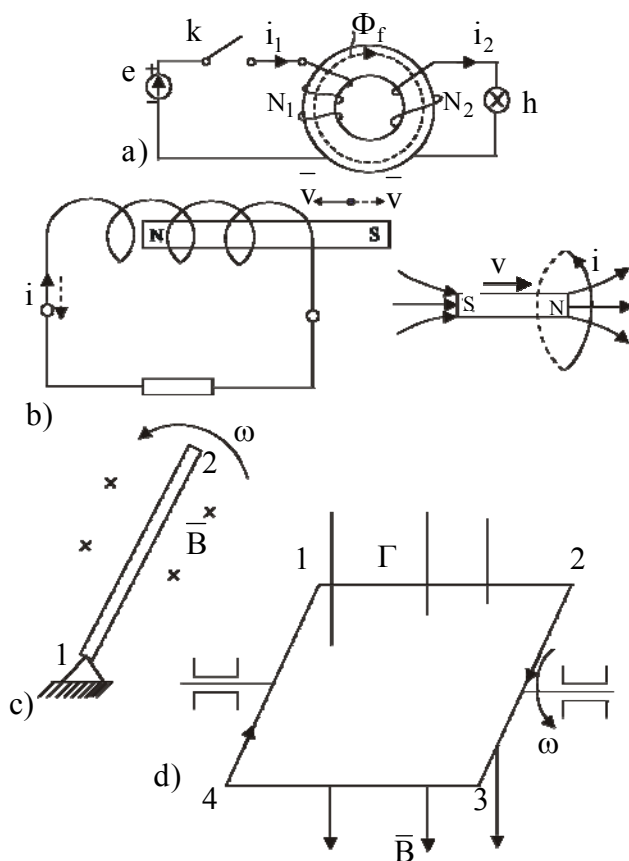


Fig 3.22

distribuită de-a lungul spirei  $\Gamma$ , efectul însă, curentul  $i$ , este același. Situațiile ilustrate în figura 3.22 pun în evidență că:

a) Există curent în secundar ( $i_2 \neq 0$ ) și lampa  $h$  arde numai dacă fluxul magnetic din miez  $\Phi_f$  este variabil în timp (la închiderea și deschiderea contactului  $k$ ). În secundar se induce o *t.e.m statică* (*t.e.m de transformare*).

b) la apropierea magnetului de spiră (sau de bobină) fluxul magnetic prin aceasta crește, se induce curent  $i$  într-un anumit sens iar la îndepărtare se schimbă sensul curentului indus. Totul este invers când magnetul se apropie (sau

îndepărtează) cu polul sud. Deci sensul curentului indus depinde și de sensul de variație a fluxului inductor.

c) dacă o bară se mișcă (taie linii de câmp) într-un câmp  $\vec{B}$ , între capetele ei (1,2) se va induce o *t.e.m*  $e_{21}$  chiar dacă circuitul este deschis (bara nu închide o suprafață, deci nu avem flux magnetic inductor), dar va apare o *t.e.m de mișcare* în bara mobilă.

d) o spiră  $\Gamma$  dreptunghiulară se poate roti cu viteza unghiulară  $\omega$  într-un câmp magnetic exterior  $\vec{B}$ .

– dacă  $\omega = 0$  și  $\vec{B}(t)$  în spiră se va induce o *t.e.m statică* „ $e_t$ ”

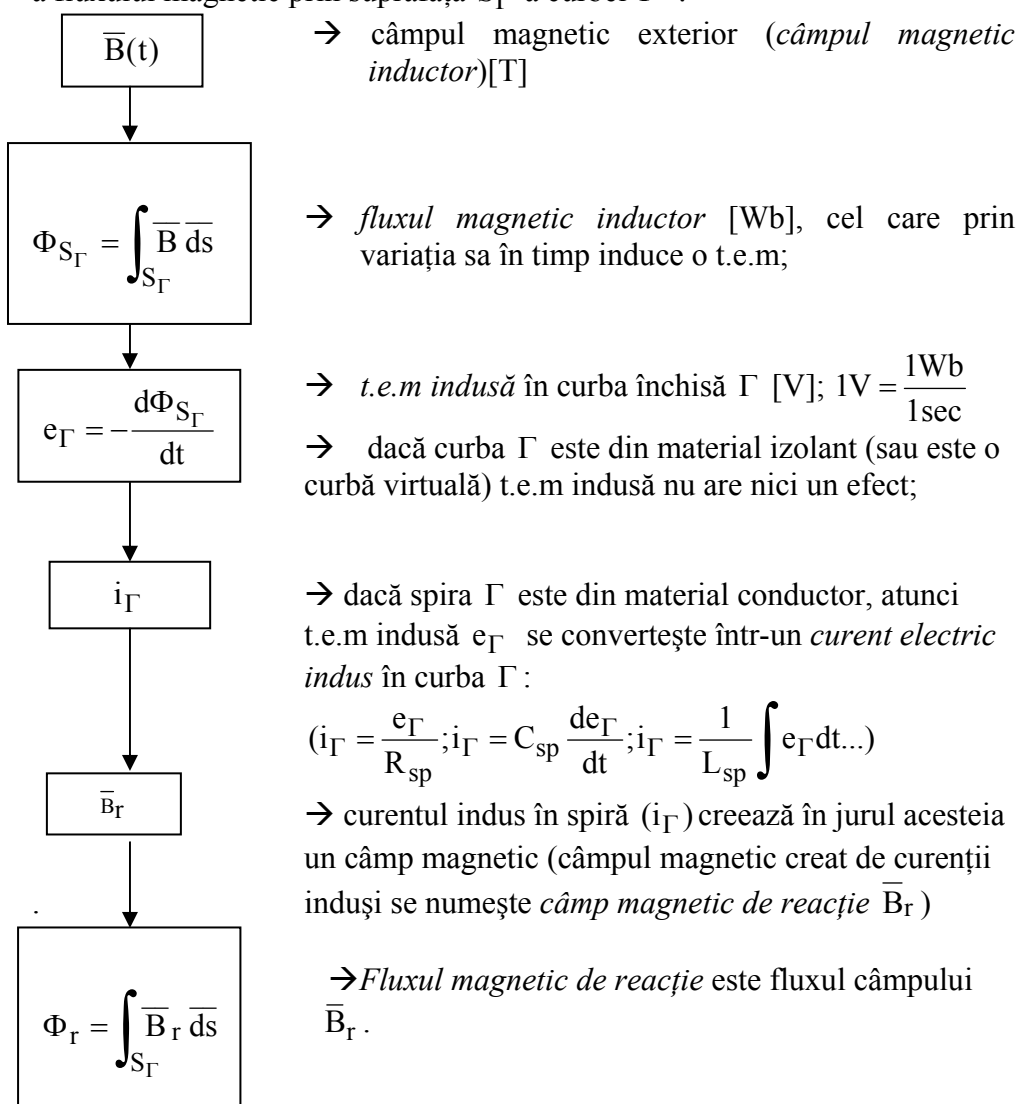
– dacă  $\omega \neq 0$  și  $\vec{B} \neq \vec{B}(t)$  în spiră se induce o *t.e.m de mișcare* „ $e_m$ ” care de fapt se induce doar pe laturile 1-2 și 3-4 care în mișcare lor taie liniile câmpului  $\vec{B}$ .

– dacă  $\omega \neq 0$  și  $\vec{B} = \vec{B}(t)$  în spira  $\Gamma$  se induce atât *t.e.m de mișcare* cât și *de transformare*:  $e_\Gamma = e_t + e_m$ .

*Inducția electromagnetică* este fenomenul prin care se induce o t.e.m într-un circuit (o spiră  $\Gamma$ , în general) datorită variației în timp a fluxului magnetic  $\Phi_{S_\Gamma}$  care străbate suprafața curbei  $\Gamma$ . Sensul t.e.m induse este astfel încât prin toate efectele sale să se opună cauzei inductoare (regula lui Lenz).

### 3.4.2 Formele integrale ale legii

Sub formă integrală legea spune că „t.e.m  $e_\Gamma$  indusă prin inducție electromagnetică în lungul curbei  $\Gamma$  este egală numeric cu viteza de scădere a fluxului magnetic prin suprafața  $S_\Gamma$  a curbei  $\Gamma$ ”.



$$e_{\Gamma} = -\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} \quad (3.45)$$

Relația (3.45) este *forma integrală compactă* a legii.

În general  $\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt}$  este viteza de creștere a fluxului  $\Phi_{S_{\Gamma}}$  iar  $-\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt}$  este viteza de scădere în timp.

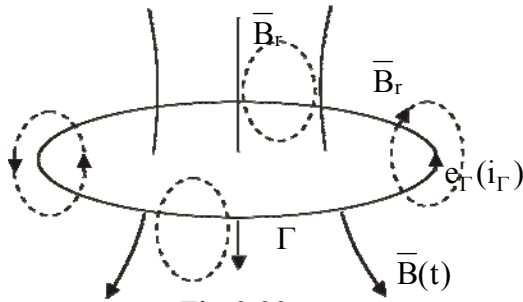


Fig 3.23

Prin toate efectele sale, fluxul magnetic de reacție se opune efectelor fluxului magnetic inductor  $\Phi_{S_{\Gamma}}$ .

În particular,  $\Phi_r$  se opune variației în timp a fluxului inductor  $\Phi_{S_{\Gamma}}$ : la creșterea lui  $\Phi_{S_{\Gamma}}$

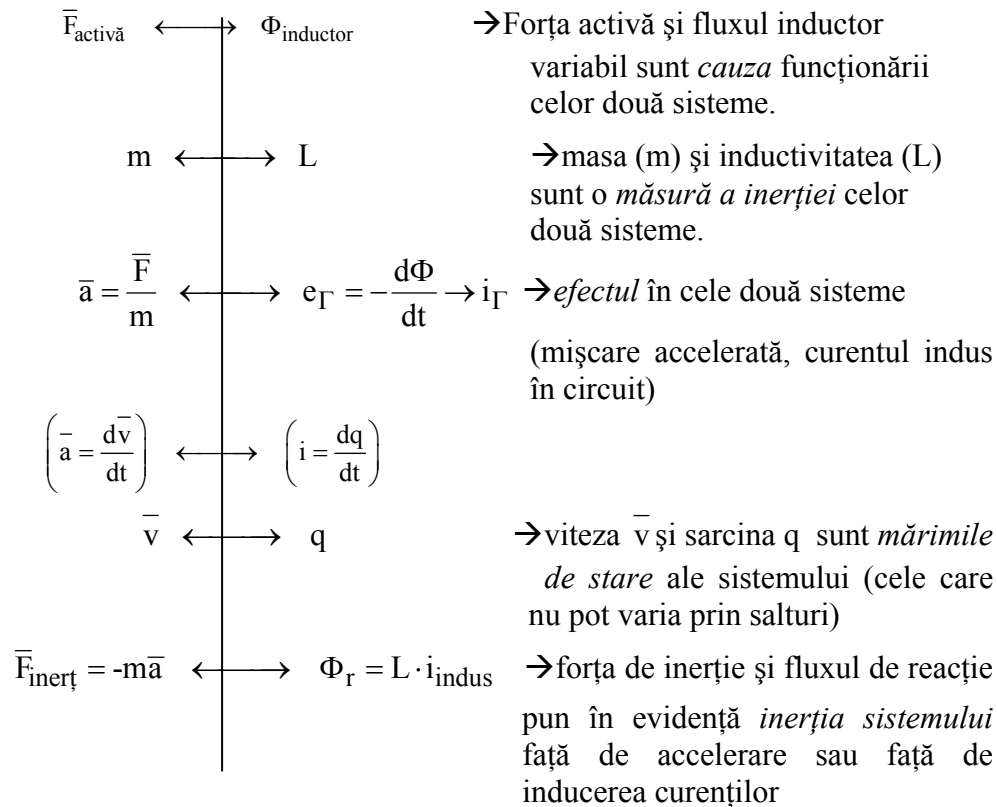
( $\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} > 0$ ),  $\Phi_r$  are sens contrar

cu  $\Phi_{S_{\Gamma}}$  ca în figura 3.23 și se opune creșterii, iar la scăderea lui  $\Phi_{S_{\Gamma}}$

( $\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} < 0$ ), fluxul de reacție își schimbă sensul și are același sens cu

$\Phi_{S_{\Gamma}}$  opunându-se astfel scăderii lui. Datorită existenței fluxului magnetic de reacție  $\Phi_r$ , se spune că *circuitele prezintă inerție față de variația fluxului magnetic inductor* prin suprafața lor.

Din acest punct de vedere fluxul magnetic de reacție  $\Phi_r$  are în sistemele electrice același rol pe care îl are forța de inerție  $\vec{F}_i$  în sistemele mecanice. De altfel, între cele două clase de probleme se poate stabili o analogie:

sisteme  
mecanicesisteme  
electromagnetice

T.e.m indusă  $e_{\Gamma}$  se poate exprima în funcție de *câmpul electric indus*  $\vec{E}$  sub forma:

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (3.46)$$

Deci mai general, un câmp magnetic variabil  $\vec{B}(t)$  induce în jurul său un *câmp electric indus*  $\vec{E}$  care există în orice condiții. Dacă în câmpul indus  $\vec{E}$  considerăm curba  $\Gamma$ , vom evalua *t.e.m indusă*  $e_{\Gamma}$  cu (3.46) iar dacă  $\Gamma$  este o spiră conductoare atunci va apare *curentul indus*  $i_{\Gamma}$ .



Derivata fluxului magnetic inductor  $\left(-\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}\right)$  o exprimăm cu (3.32)

$$\text{astfel: } -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bar{ds} - \int_{S_\Gamma} \left[ \bar{v} \underbrace{\operatorname{div} \bar{B}}_{=0} + \operatorname{rot} \left( \bar{B} \times \bar{v} \right) \right] \bar{ds} \quad (3.47)$$

deoarece curba  $\Gamma$  poate, în principiu, să treacă prin conductori, izolanti, vid și ea este atașată corpurilor mobile în mișcarea lor cu viteza  $\bar{v}$ . Înlocuind în expresia (3.45) se obține:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \bar{d\ell} = \int_{S_\Gamma} -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bar{ds} - \int_{S_\Gamma} \operatorname{rot} \left( \bar{B} \times \bar{v} \right) \bar{ds} \quad (3.48)$$

care reprezintă *forma integrală dezvoltată* a legii inducției electromagnetice.

În membrul stâng sunt mărimi electrice ( $\bar{E}$ ) iar în membrul drept sunt numai mărimi magnetice, deci și legea inducției electromagnetice este o lege generală care face legătura dintre aspectul electric și aspectul magnetic al câmpului electromagnetic.

Aplicând teorema lui Stokes în ultimul termen din (3.48) se obține:

$$e_\Gamma = \oint_{\Gamma} \bar{E} \bar{d\ell} = - \underbrace{\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bar{ds}}_{e_t} + \underbrace{\oint_{\Gamma} (\bar{v} \times \bar{B}) \bar{d\ell}}_{e_m} \quad (3.49)$$

- $e_t = -\int_{S_\Gamma} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \bar{ds}$  – este *t.e.m de transformare* (statică) care se induce

în circuite fixe prin suprafața cărora trece un câmp magnetic variabil

$$\left( \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \neq 0 \right)$$

- $e_m = \oint_{\Gamma} (\bar{v} \times \bar{B}) \bar{d\ell}$  – este *t.e.m de mișcare* (dinamică) care se

induce într-o curbă  $\Gamma$  care se mișcă în câmpul  $\bar{B}$  cu viteza  $\bar{v}$ .

Mărima  $(\bar{v} \times \bar{B}) \bar{d\ell}$  fiind un produs mixt, va fi nul când două dintre cele trei mărimi sunt paralele (și în acest caz  $e_m = 0$ ):

$\bar{v} \parallel \bar{d\ell}$  – conductorul se mișcă în lungul său

$\vec{v} \parallel \vec{B}$  – mișcarea conductorului are loc în lungul liniilor de câmp  $\vec{B}$

$\vec{B} \parallel d\vec{\ell}$  – conductorul rămâne pe timpul mișcării paralel cu liniile lui  $\vec{B}$

Se induce t.e.m de mișcare  $e_m$  numai dacă în mișcarea sa, conductorul *taie linii de câmp*  $\vec{B}$  (constant sau variabil în timp). Dacă

$\vec{v}$ ,  $\vec{B}$  și  $d\vec{\ell}$  formează un triedru drept, t.e.m de mișcare este

$e_m = \pm B \ell v$ ; semnul ( $\pm$ ) după cum vectorul ( $\vec{v} \times \vec{B}$ ) se asociază ( $\pm$ ) cu sensul lui  $d\vec{\ell}$  de pe curba  $\Gamma$ .

T.e.m se calculează ca o circulație:  $e_\Gamma = \oint_\Gamma \vec{E} d\vec{\ell}$  iar fluxul magnetic ca o integrală de

$$\text{flux: } \Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \vec{B} d\vec{s}.$$

Dacă sensul de integrare pe curba  $\Gamma$  ( $d\vec{\ell}$ ) se asociază corect cu orientarea lui  $S_\Gamma$  ( $d\vec{s}$ ), în acest caz t.e.m  $e_\Gamma$  are expresia (3.45). Când nu

se asociază corect  $d\vec{\ell}$  cu  $d\vec{s}$ , atunci:  $e_\Gamma = \frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt}$ . Să ilustrăm acest lucru:

$$\rightarrow \Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \vec{B} d\vec{s} > 0 \text{ cu sensul ales incorect pentru } d\vec{s} \text{ la } S_\Gamma \text{ (figura 3.24)}$$

$\rightarrow$  presupunând  $\Delta\Phi > 0$ , fluxul în creștere prin valori pozitive  $\left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right) > 0$ . În

acest caz:  $e_\Gamma = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0$ ; o t.e.m  $e_\Gamma > 0$  înseamnă că se induce în sensul în care am orientat curba  $\Gamma$  (figura 3.24).

Pentru orientarea lui  $d\vec{s}$  din figura 3.25 rezultă:

$$\rightarrow \Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \vec{B} d\vec{s} < 0; \quad d\vec{s} \uparrow \downarrow \vec{B}$$

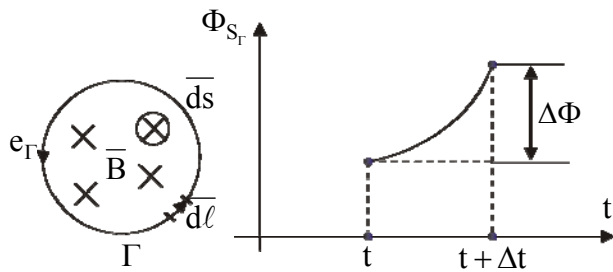


Fig 3.24

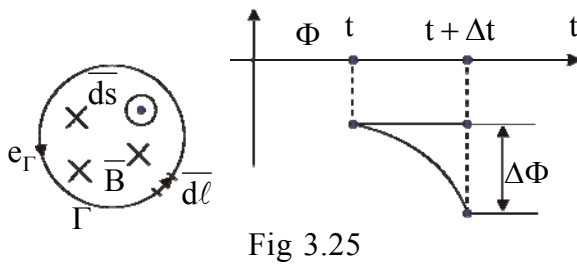


Fig. 3.25

→ fluxul negativ îl presupunem în scădere

$$\Delta\Phi < 0, \text{ deci } \left(\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right) < 0.$$

Cum  $\overline{d\ell}$  și  $\overline{ds}$  se asociază corect, t.e.m indusă va fi:

$$e_{\Gamma} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} > 0, \text{ deci } e_{\Gamma} \text{ se}$$

induce în sensul lui  $\overline{d\ell}$  (când  $e_{\Gamma} < 0$ , ea se induce invers cu orientarea curbei  $\Gamma$ ).

În ambele cazuri avem aceeași problemă fizică: prin  $S_{\Gamma}$  trece un flux magnetic în creștere doar cu valori (+) sau (-). Numai alegerea orientării prealabile a curbei  $\Gamma$  a diferit, rezultatul însă nu depinde de aceasta. A rezultat același sens pentru  $e_{\Gamma}$ .

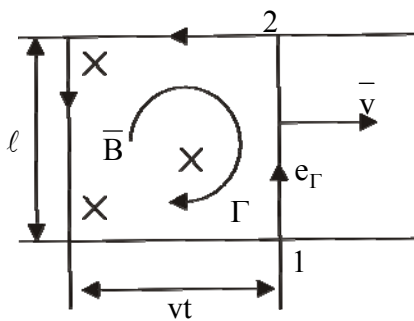
*Observație:*

Calculul t.e.m induse  $e_{\Gamma}$  prin cele două modalități trebuie înțeleasă astfel: -) „ $\frac{d\Phi}{dt}$ ”

este operația de derivare a fluxului  $\Phi(t)$ , iar „ $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ” este operația de împărțire dintre creșterea fluxului  $\Phi$  (creșterea funcției) și creșterea timpului (creșterea argumentului).

$$a) \quad \overline{B}(t) \rightarrow \Phi_{S_{\Gamma}}^{\pm} = \int_{S_{\Gamma}} \overline{B} \cdot \overline{ds} \rightarrow e_{\Gamma} = -\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} \quad (3.50)$$

$$b) \quad \overline{B}(t) \xrightarrow{\text{câmp uniform}} \Phi_{S_{\Gamma}}^{\pm} = \overline{B} \cdot \overline{S_{\Gamma}} \rightarrow \Delta\Phi = \Phi_{t+\Delta t} - \Phi_t \rightarrow e_{\Gamma} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$



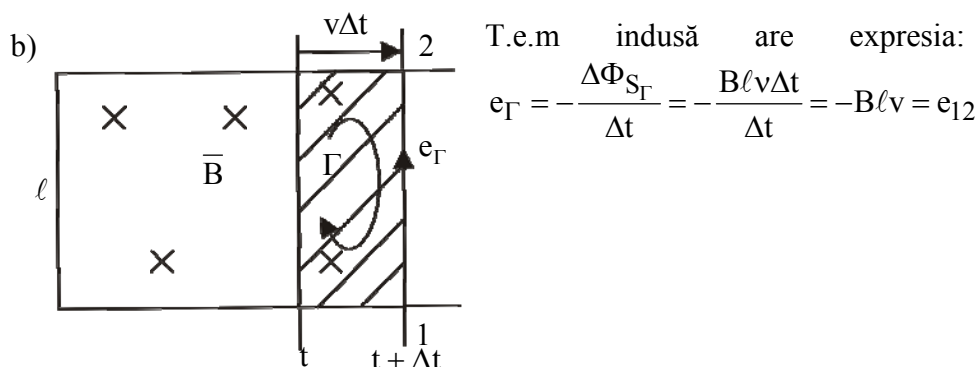
Exemplificăm cu o bară care alunecă, în contact cu un cadru, într-un câmp magnetic  $\overline{B}$ . Suprafața  $S_{\Gamma} = \ell vt$  este variabilă în timp, deci și fluxul magnetic va fi variabil.

$$\Phi_{S_{\Gamma}} = \pm B S_{\Gamma} = B(\ell vt) \rightarrow \text{Sau, în timpul } \Delta t$$

$$\rightarrow e_{\Gamma} = -\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} = -B\ell v = e_{12}$$

suprafața crește cu  $\Delta S_{\Gamma}$ :  $\Delta S_{\Gamma} = \ell v \Delta t$  (figura b) iar fluxul are o variație:

$$\Delta\Phi_{S_{\Gamma}} = B\Delta S_{\Gamma} = B\ell v \Delta t.$$



### 3.4.3 Formele locale ale legii

În domenii de continuitate a mediului (deci și a câmpului  $\vec{B}$ ) putem aplica teorema lui Stokes asupra membrului stâng din (3.48) și se obține:

$$\int_{S_{\Gamma}} \text{rot } \vec{E} \, d\vec{s} = - \int_{S_{\Gamma}} \left[ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \text{rot} \left( \vec{B} \times \vec{v} \right) \right] d\vec{s} \quad (3.51)$$

Suprafața  $S_{\Gamma}$  fiind aleasă în mod arbitrar, rezultă că:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot} (\vec{B} \times \vec{v}) \quad (3.52)$$

Expresia (3.52) reprezintă *forma locală* a legii inducției electromagnetice. Pentru *medii fixe* (fără corpuri în mișcare,  $\vec{v} = 0$ ) în forma integrală nu există decât  $e_t$  iar sub formă locală rămâne:

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.53)$$

care pune în evidență faptul că liniile de câmp electric indus ( $\vec{E}$ ) fac rotoare stângi ( $\text{rot } \vec{E} < 0$ ) în jurul liniilor unui câmp magnetic inductor, fiind situate în plane  $\perp$  pe liniile lui  $\vec{B}$ . Totodată forma locală (3.53) face parte din pachetul de ecuații ale câmpului electromagnetic, cunoscută sub numele de *ecuația a doua a lui Maxwell*.

În general câmpul electric indus:  $\vec{E}_{\text{indus}} = \vec{E}$  are două componente:  $\vec{E}_{\text{transf}} = \vec{E}_t$  și  $\vec{E}_{\text{mișc}} = \vec{E}_m$ , care au semnificațiile:

$$\vec{E} = \vec{E}_t + \vec{E}_m \quad (3.54)$$

$$\begin{cases} \text{rot } \bar{E} = \text{rot } \bar{E}_t + \text{rot } \bar{E}_m \\ \text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} + \text{rot}(\bar{v} \times \bar{B}) = -\text{rot}\left(\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) + \text{rot}(\bar{v} \times \bar{B}) \end{cases} \quad (3.55)$$

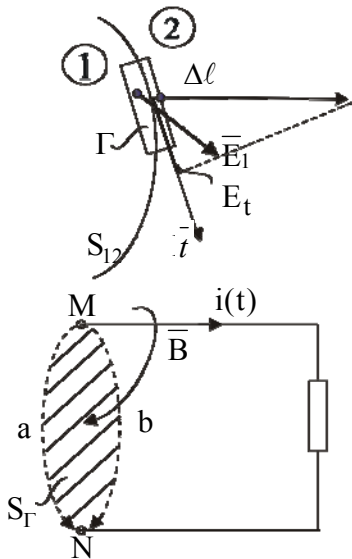
Prin identificare rezultă cele două componente ale câmpului electric indus:

$$\begin{cases} \bar{E}_t = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{câmp electric indus static (câmp de tip Neumann)} \\ \bar{E}_m = \bar{v} \times \bar{B} - \text{câmp electric indus prin mișcare} \end{cases} \quad (3.56)$$

$$\text{Dimensional} \quad \begin{cases} [A] = [E] \cdot [t] = \frac{V}{m} \cdot \text{sec} = \frac{Wb}{m} = Tm \\ [E_m] = [v] \cdot [B] = \frac{m}{\text{sec}} \cdot \frac{V \text{ sec}}{m^2} = \frac{V}{m} \end{cases} \quad (3.57)$$

Observații:

- Curba plată  $\Gamma$  având  $S_\Gamma \ll$ , deci  $\Phi_{S_\Gamma} \approx 0$ , înconjoară o discontinuitate  $S_{12}$ :



$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \bar{E}_2 \cdot \bar{t} \Delta\ell - \bar{E}_1 \cdot \bar{t} \Delta\ell = 0 \rightarrow E_{t2} = E_{t1}$$

La trecerea printr-o discontinuitate liniile câmpului  $\bar{E}$  astfel se refractă încât se conservă componenta sa tangențială:

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (3.58)$$

-) Tensiunea între punctele M și N în regim variabil depinde de drumul de integrare:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} \cdot d\bar{\ell} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \leftrightarrow \underbrace{\int_{MaN} \bar{E} \cdot d\bar{\ell}}_{u_{MaN}} + \underbrace{\int_{NbM} \bar{E} \cdot d\bar{\ell}}_{-u_{MbN}} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \rightarrow u_{MaN} \neq u_{MbN}$$

Numai în regim staționar există noțiunea de *potențial electric* și

atunci cele două tensiuni ar fi egale cu „diferența de potențial” dintre M și N noțiune care în regim variabil nu există.

- Formele locale valabile în vid:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \quad ; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \quad (3.59)$$

arată că un câmp electric variabil  $\left(\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right)$  produce în jurul său câmp

magnetic iar un câmp magnetic variabil  $\left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\right)$  induce în jurul său un câmp

electric. Unda electrică este  $\perp$  în spațiu pe cea magnetică, ele se autogenerază reciproc și în vid (în lipsa altor sisteme) și se propagă cu viteză finită.

- Prin cele N spire ale unei bobine trece *fluxul magnetic fascicular*  $\Phi_f$  care va induce în fiecare spirală o t.e.m „e'” iar t.e.m indusă la bornele bobinei este:

$$e = Ne' = -N \frac{d\Phi_f}{dt} = -\frac{d\Phi_t}{dt} \quad (3.60)$$

$\Phi_f$  – este *fluxul fascicular*, un *flux mediu* același prin toate spirele bobinei

$\Phi_t = N\Phi_f$  este *fluxul magnetic total* al unei bobine;

### 3.5 Teoremele de refracție a liniilor de câmp

#### I. Câmp electric

Dacă  $S_{12}$  este o joncțiune între două medii cu proprietăți diferite

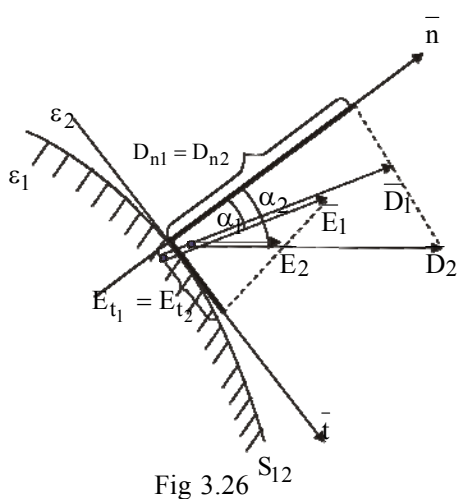


Fig 3.26  $S_{12}$

(permisivități  $\epsilon_1$  și  $\epsilon_2$ ) și este o suprafață de discontinuitate pasivă (neîncărcată cu sarcină,  $\rho_s = 0$ ), atunci la trecerea liniilor de câmp electric printr-o astfel de discontinuitate se conservă componenta normală a lui  $\bar{D}$  (relația 3.57) și componenta tangențială a lui  $\bar{E}$  (relația 3.58):  $E_{t1} = E_{t2}$  ;  $D_{n1} = D_{n2}$ . Unghiurile cu normala  $\bar{n}$  la discontinuitate se numesc:  $\alpha_1 = \angle$  de incidență;  $\alpha_2 = \angle$  de refracție

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{D_{t1}}{D_{n1}} = \frac{\varepsilon_1 E_{t1}}{D_{n1}} ; \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{D_{t2}}{D_{n2}} = \frac{\varepsilon_2 E_{t2}}{D_{n2}} \rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (3.61)$$

Relația (3.61) este *teorema de refracție a liniilor de câmp electric*. Evident că am admis că cele două regiuni sunt cu proprietăți liniare și sunt izotrope (liniile lui  $\vec{E}$  și  $\vec{D}$  sunt pe aceeași direcție.)

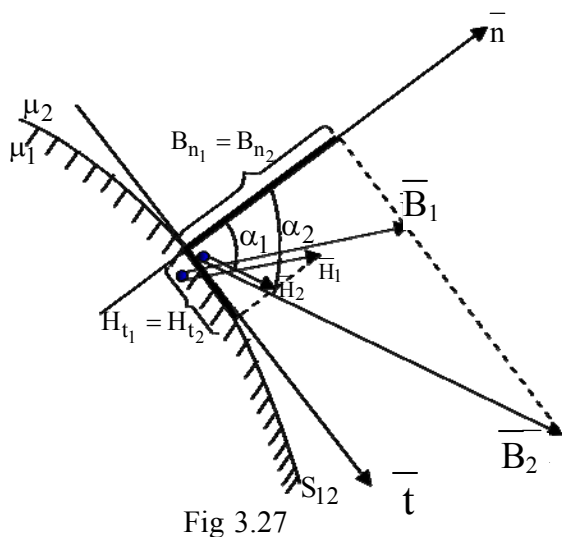


Fig 3.27

## II. Câmp magnetic

Dacă există o suprafață de discontinuitate  $S_{12}$  pasivă (fără pânză de curent,  $\vec{J}_s = 0$ ) care separă două subdomenii liniare și izotrope cu permeabilitățile  $\mu_1$  și  $\mu_2$ , (figura 3.27) atunci ținând seama de formele locale ale legilor (3.21) și (3.44) valabile în punctele din jurul unei discontinuități, putem scrie:

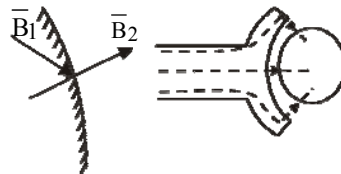
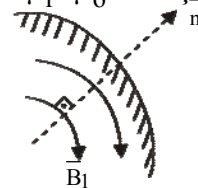
$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B_{t1}}{B_{n1}} = \frac{\mu_1 H_{t1}}{B_{n2}} \\ \operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{B_{t2}}{B_{n2}} = \frac{\mu_2 H_{t2}}{B_{n2}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \quad (3.62)$$

Relația (3.62) este expresia *teoremei de refracție a liniilor de câmp magnetic* la trecerea lor printr-o discontinuitate.

Dacă subdomeniul ① este feromagnetic atunci  $\mu_1 = \mu_{Fe} = \mu_r \cdot \mu_o \approx \infty$  și din (3.62) rezultă:

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} = \infty \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bullet) \alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \text{ dar în acest caz nu mai există refracție} \\ \bullet) \alpha_2 = 0, \text{ deci liniile de câmp magnetic ies și intră } \perp \text{ pe suprafețele pieselor feromagnetice} \end{array} \right.$$

(Această proprietate ne ajută să construim spectrul liniilor lui  $\vec{B}$  atunci când sistemul conține piese feromagnetice)



### 3.6 Legea conservării sarcinii electrice

#### 3.6.1 Formele integrale ale legii

→ Dacă o suprafață  $\Sigma$  trece numai prin medii izolante (dielectrice) atunci suma algebrică a sarcinilor conținute în interiorul lui  $\Sigma$  este constantă indiferent de fenomenele (regimul de funcționare) care au loc în interior.

$$q_{\Sigma} = \sum q_k^{\pm} = ct \quad (3.63)$$

→ Dacă suprafața  $\Sigma$  este intersectată de fire conductoare parcurse de curenți de conducție (figura 3.28), atunci intensitatea curenților de conducție care ies din  $\Sigma$  (după normala exterioară) este egal numeric cu viteza de scădere a sarcinilor conținute în interiorul suprafeței  $\Sigma$ :

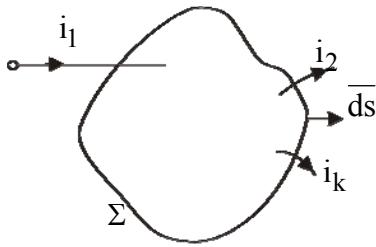


Fig 3.28

$$i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt} \quad (3.64)$$

În forma integrală (3.64)  $i_{\Sigma}$  este suma algebrică a curenților care ies prin firele conductoare ( $i_{\Sigma} = -i_1 + i_2 + \dots + i_k + \dots$ ). Relațiile

(3.63) și (3.64) reprezintă *formele integrale compacte* ale legii.

Scriind curentul  $i_{\Sigma}$  în funcție de densitatea sa  $\bar{J}$  și sarcina  $q_{\Sigma}$  pe care o admitem repartizată în volumul  $v_{\Sigma}$  cu densitatea  $\rho_v$ , atunci:

$$\int_{\Sigma} \bar{J} \cdot \bar{ds} = -\frac{d}{dt} \int_{v_{\Sigma}} \rho_v dv \quad (3.65)$$

Suprafața  $\Sigma$  este, în general, mobilă cu viteza  $\bar{v}$ , odată cu corpurile încărcate, deci în membrul drept din (3.65) avem o derivată substanțială de volum:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{v_{\Sigma}} \rho_v dv &= \int_{v_{\Sigma_{\text{fix}}}} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv + \int_{v_{\Sigma_{\text{mobil}}}} \text{div}(\rho_v \bar{v}) dv = \\ &= \int_{v_{\Sigma}} \frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv + \int_{\Sigma} \bar{v} \cdot \bar{\rho}_v ds \end{aligned} \quad (3.66)$$

Înlocuind în (3.65) se obține:

$$\int_{\Sigma} \left( \bar{J} + \rho_v \bar{v} \right) \cdot \bar{ds} = \int_{v_{\Sigma}} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \leftrightarrow i_{\text{cond}_{\Sigma}} + i_{\text{conv}_{\Sigma}} = \int_{v_{\Sigma_{\text{fix}}}} -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} dv \quad (3.67)$$

Relația (3.67) este *forma integrală dezvoltată* a legii. Conform



acestei legi sarcina electrică din volumul  $v_\Sigma$ , considerat fix în raport cu sistemul de referință, scade datorită curentului de conducție ( $\bar{J}$ ) și datorită curentului de convecție ( $\rho_v \bar{v}$ ) care ies din suprafața  $\Sigma$ .

Transformând cu teorema lui Gauss membrul stâng (3.67) în integrală de volum, se obține:

$$\text{div}(\bar{J} + \rho_v \bar{v}) = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (3.68)$$

relație care reprezintă *forma locală* a legii conservării sarcinii electrice, valabilă în domenii de continuitate a mediului. Dacă nu există corpuri în mișcare, forma locală devine:

$$\text{div } \bar{J} = -\frac{\partial \rho_v}{\partial t} \quad (3.69)$$

iar în *regim staționar* (curent continuu, când  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) rezultă:

$$i_\Sigma = 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{div } \bar{J} = 0 \quad (3.70)$$

relație cunoscută și sub numele de *teorema continuității liniilor de curent*; liniile unui curent continuu sunt întotdeauna linii închise ( $\text{div } \bar{J} = 0$ ).

În jurul suprafețelor de discontinuitate  $S_{12}$ , care separă două medii cu conductivități diferite  $\sigma_1$  și  $\sigma_2$  (și eventual încărcată discontinuitatea cu  $\rho_s$ , majoritatea joncțiunilor parcurse de curent, au  $\rho_s \neq 0$ ) forma locală

$$(3.69) \text{ devine: } \text{div}_s \bar{J} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad \leftrightarrow \quad J_{n_2} - J_{n_1} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (3.71)$$

Dacă sistemul funcționează în curent continuu  $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$  sau este o joncțiune pasivă ( $\rho_s = 0$ ) atunci:

$$J_{n_1} = J_{n_2} \quad (3.72)$$

deci la refracția liniilor de curent se conservă componenta normală a lui  $\bar{J}$ .

*Observații:*

- Prima teoremă a lui Kirchhoff este o consecință a acestei legi. Dacă suprafața  $\Sigma$  înconjură un nod de circuit, sarcina acumulată într-un nod fiind nulă, rezultă că  $i_\Sigma = 0$ .

- O suprafață  $\Sigma$  poate fi traversată atât de fire parcurse de *curent de conducție*, cât și de corpuri încărcate cu sarcină – *curent de convecție* – sau liniile unui câmp electric variabil în timp – *curent de deplasare* –. Liniile de curent se pot considera închise în orice regim de funcționare (nu

numai în curent continuu) doar dacă se ține seama de toate formele fizice de curenți electrice posibili:

$$(i_{\text{cond}} + i_{\text{conv}} + i_{\text{depl}})_{\Sigma} = 0 \quad (3.73)$$

De exemplu, în figura 3.29  $i_1$  este curentul de *încărcare* a unui condensator

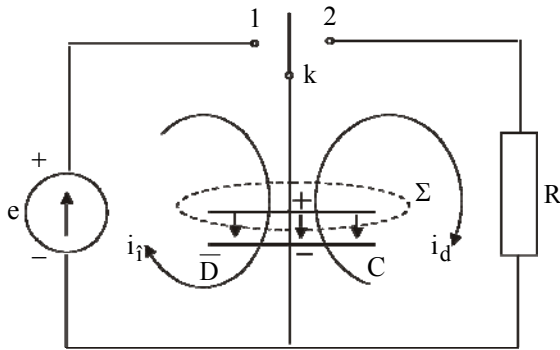


Fig 3.29

( $k$  – pe poziția 1). Până la armătura condensatorului el este curent de conducție prin fire. La încărcare sarcina din suprafața  $\Sigma$  crește, deci va crește și câmpul dintre armături ( $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} > 0$ ), respectiv curentul de deplasare care iese din  $\Sigma$  este egal cu curentul de conducție care intră. La descărcare ( $k$  – pe poziția 2), sarcina pe armături

scade ( $\frac{dq_{\Sigma}}{dt} < 0$ ), scade și câmpul ( $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} < 0$ ) ceea ce înseamnă că și curentul de deplasare din dielectric își va schimba sensul iar curentul de *descărcare*  $i_d$  este curent de deplasare și în continuare este curent de conducție.

• Ecuațiile scrise în jurul punctelor de discontinuitate se mai numesc *ecuații de trecere*:

$$\begin{cases} D_{n_2} - D_{n_1} = \rho_s \\ E_{t_1} = E_{t_2} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{H}_{t_2} - \bar{H}_{t_1} = \bar{J}_s \\ B_{n_1} = B_{n_2} \end{cases} \quad J_{n_2} - J_{n_1} = -\frac{\partial \rho_s}{\partial t} \quad (3.74)$$

Ele pun în evidență că doar componenta tangențială a lui  $\bar{E}$  și componenta normală a lui  $\bar{B}$  se conservă necondiționat la trecerea lor (refracția) printr-o suprafață de discontinuitate. Celelalte componente  $D_n$ ,  $H_t$  și  $J_n$  se conservă doar condiționat, așa cum au precizat legile câmpului.

### 3.7 Legea conducției electrice

- La scară microscopică asupra unei particule libere dintr-un mediu conductor încărcată cu sarcina  $q'$  se exercită o forță electrică  $\vec{F}_{el} = q' \vec{E}$  de către câmpul electric  $\vec{E}$

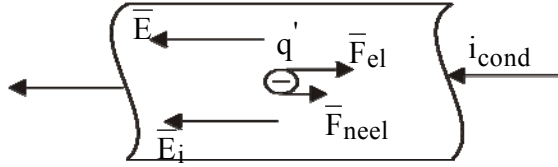


Fig 3.30

din interiorul conductorului (figura 3.30) și o forță neelectrică  $\vec{F}_{neel}$  datorită altor fenomene din interiorul conductorului (neomogenități, stare de accelerare, diferență de temperatură, etc). Particula  $q'$  va fi în echilibru electrostatic doar dacă

$\vec{F}_{el} + \vec{F}_{neel} = 0$ . Dacă  $\vec{F}_{el} = q' \vec{E}$  vom exprima și forțele neelectrice sub forma:  $\vec{F}_{neel} = q' \vec{E}_i = q' \vec{E}_{str}$ , unde  $\vec{E}_i$  ( $\vec{E}_{str}$ ) se numește *intensitatea câmpului electric imprimat (străin)*.

Câmpul imprimat  $\vec{E}_i$  este un câmp electric echivalent, el echivalează acțiuni neelectrice ce se exercită asupra particulelor libere. Câmpul  $\vec{E}_i$  exprimă în termeni electrici efectul altor stări (chimice, termice, mecanice) și el se consideră „dat” în studiul fenomenelor electrice, deducerea lui  $\vec{E}_i$  nu ține de teoria fenomenelor electrice. În general, câmpul  $\vec{E}_i$  există în regiunile conductoare active, în interiorul surselor de tensiune (pile, acumulatori, celule solare, etc).

- Sub acțiunea forței rezultante  $\vec{F}_{rez} = \vec{F}_{el} + \vec{F}_{neel}$  particula  $q'$  se mișcă cu viteza  $\vec{v}_{rel}$  față de structura fixă a conductorului. Mișcarea microscopică ordonată a particulelor  $q'$  supuse ciocnirilor dezordonate se echivalează cu mișcarea macroscopică a unui corp într-un mediu vâcos, cu frecare, când forța activă este proporțională cu viteza medie. Mișcarea ordonată a particulelor  $q'$  este apreciată macroscopic ca un curent de conducție cu densitatea  $\vec{J}$ :  $\vec{J} = k_1 \vec{v}_{rel} = k_2 (\vec{F}_{el} + \vec{F}_{neel}) = k_2 q' (\vec{E} + \vec{E}_i)$

respectiv: 
$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{E}_i) \quad ; \quad \vec{E} + \vec{E}_i = \rho \vec{J} \quad (3.75)$$

unde: 
$$\begin{cases} \sigma & - \text{conductivitatea mediului conductor} \\ \rho = \frac{1}{\sigma} & - \text{rezistivitatea mediului conductor} \end{cases}$$

Legea conducției electrice este o lege de material (expresia sa conține constante de material,  $\sigma$  (sau  $\rho$ ) care diferă de la un domeniu la altul) și conform cu justificarea microscopică (3.75) ea spune că „în orice punct dintr-un mediu conductor, densitatea curentului de conducție  $\vec{J}$  este proporțională cu intensitatea câmpului electric rezultat ( $\vec{E} + \vec{E}_i$ ) din acel punct”.

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}_i) \quad ; \quad \vec{E} + \vec{E}_i = \rho \vec{J} \quad (3.76)$$

Relațiile (3.76) reprezintă *forma locală* a legii (valabilă într-un punct din domeniu conductor).

Experiența arată că cele două constante de material  $\sigma$  și  $\rho$  nu depind numai de natura materialului ci și de temperatură. Variația cu temperatura a rezistivității  $\rho$  este mică și că în jurul unei temperaturi de referință  $T_0$  variația este aproximativ liniară, respectiv dezvoltarea în serie a lui  $\rho(T)$  se poate aproxima cu primul cu termen:

$$\rho(T) = \rho(T_0)[1 + \alpha(T - T_0)] \quad (3.77)$$

„ $\alpha$ ” este *coeficientul de variație a rezistivității cu temperatura*:

$\alpha > 0$  – pentru metale, deci  $\rho$  crește cu temperatura, conduc mai bine în stare rece

$\alpha < 0$  – pentru cărbune, soluții, deci  $\rho$  scade cu temperatura, conduc mai bine în stare caldă

La unele metale (plumb, thaliu, etc)  $\rho$  scade la zero la temperaturi foarte mici, când materialul ajunge în stare de *supraconductibilitate*. Valoarea temperaturii critice la care  $\rho = 0$  depinde de metal dar și de valoarea câmpului  $\vec{B}$  în care este plasat. În această stare materialele suportă densități foarte mari de curent, fără a se încălzi, în ele se pot concentra câmpuri foarte intense; de astfel de fenomene se ocupă o nouă disciplină – *crio-electrotehnica*.

În conductoare omogene ( $\vec{E}_i = 0$ ), forma locală a legii devine:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad ; \quad \vec{E} = \rho \vec{J} \quad (3.78)$$

Considerăm un tronson de circuit filiform care cuprinde între punctele  $m$  și  $n$  o regiune cu câmp imprimat (o sursă), tronson care face parte dintr-un circuit închis, deci este parcurs de curentul  $i$ .

*Conductor filiform* înseamnă că liniile de curent  $\vec{J}$  se distribuie uniform pe secțiunea sa transversală  $\left(J = \frac{i}{A}\right)$  și în acest caz putem considera că întregul curent este concentrat în curba  $C$  (axa tronsonului) și  $\vec{J} \parallel d\vec{\ell}$ .

Vom integra forma locală (3.76), membru cu membru, de-a lungul curbei  $C$ :

$$\int_1^2 \left( \vec{E} + \vec{E}_i \right) d\vec{\ell} = \int_1^2 \rho \vec{J} d\vec{\ell} \quad (3.79)$$

Notăm:

$$- ) u_f = u_{f_{12}} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad - \quad \text{tensiunea electrică în lungul firului}$$

$$- ) e_i = \int_1^2 \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} = \int_m^n \vec{E}_i \cdot d\vec{\ell} \quad - \quad \text{t.e.m imprimată care este localizată pe}$$

porțiunea m – n a curbei C.

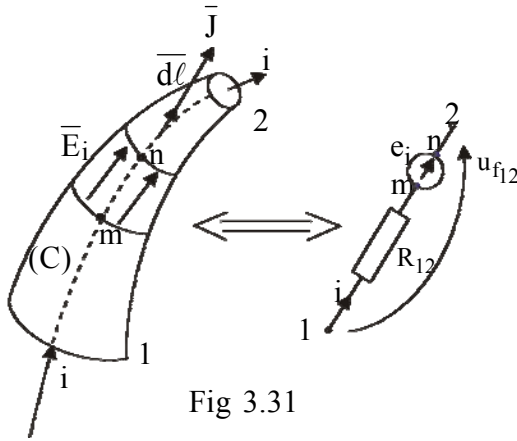


Fig 3.31

$$\int_1^2 \rho \vec{J} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 \rho \frac{i}{A} d\ell = i \int_1^2 \rho \frac{d\ell}{A} = R_{12} \cdot i$$

$$R_{12} = R = \int_1^2 \rho \frac{d\ell}{A} \quad - \quad \text{este}$$

rezistența electrică a tronsonului 1-2 .

Cu notațiile făcute, relația 3.79 se poate scrie astfel:

$$u_f + e_i = R \cdot i \quad (3.80)$$

care este *forma integrală* a legii conducției electrice care precizează că „pe o porțiune neramificată de circuit, suma

dintre tensiunea electrică în lungul firului ( $u_f$ ) și t.e.m imprimată ( $e_i$ ) a surselor ce se găsesc pe acea porțiune de circuit, este egală cu produsul dintre rezistența electrică a tronsonului și intensitatea curentului  $i$ ”.

În teoria circuitelor electrice, relația (3.80) este numită *ecuația de tensiuni pentru o latură activă de circuit*, tronsonul poate fi echivalat cu un circuit electric echivalent, ca în figura 3.31.

Dacă conductorul este închis, curba C devine o curbă închisă  $\Gamma$  și:  $u_f + e_i = e_\Gamma = e$  numită *t.e.m de contur* și:  $e_\Gamma = R \cdot i_\Gamma$ . Dacă circuitul este pasiv (fără câmp imprimat,  $e_i = 0$ ) rămâne:  $u_f = R \cdot i$ .

În curent continuu (sau joasă frecvență) există noțiunea de *potențial electric* V și tensiunea între capetele 1 și 2 ale circuitului nu depinde de

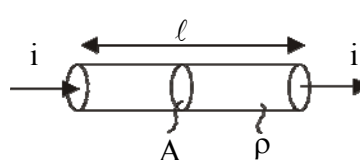
drumul de integrare:  $u_f = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_1 - V_2 = u_b$ , mărimea  $u_b$  numindu-se

*tensiunea la bornele laturii de circuit*. În acest caz particular se poate

$$\text{scrie:} \quad u_b = R \cdot i \quad ; \quad i = \frac{u_b}{R} \quad (3.81)$$

Această formă particulară a legii conducției electrice este cunoscută în literatură sub numele de *legea lui Ohm*. Pentru circuite liniare (când  $R=ct$ ) dependența  $u_b = f(i)$  este o funcție liniară. Când  $R(u)$  sau  $R(i)$  avem un circuit neliniar, respectiv  $u_b(i)$  are o alătură neliniară.

Rezistența unui tronson de circuit are expresia:



$$R_{12} = \int_1^2 \rho \frac{d\ell}{A} \quad [\Omega] \quad (3.82)$$

Dacă conductorul este omogen ( $\rho = ct$ ) și în lungul liniilor de curent secțiunea conductorului rămâne constantă (figura 3.32) atunci:

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \quad (3.83)$$

Dimensional se obține:

$$[\rho] = \left[ \frac{R A}{\ell} \right] = \begin{cases} \Omega \text{ m} \\ \Omega \text{ mm}^2 / \text{m} \end{cases} \text{ - dacă secțiunea } A \text{ se exprimă în } \text{mm}^2$$

Conductanța tronsonului de circuit este:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \ell} = \frac{\sigma A}{\ell} \quad [\Omega^{-1}] \quad ; \quad 1\Omega^{-1} = 1\text{S} = 1\text{Mho} \quad (3.84)$$

Pentru piese conductoare cu o formă oarecare se poate aplica *metoda tuburilor și feliilor* pentru calculul lui  $R$  sau  $G$  (Tubes and Slices Method ).

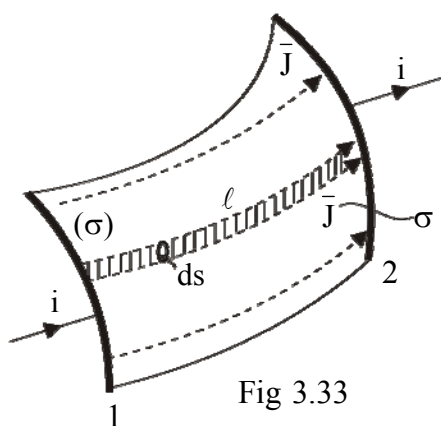


Fig 3.33

*Tuburile de curent* sunt porțiuni de conductor cu secțiune infinitesimală „ $ds$ ” și sunt luate în lungul liniilor de curent  $\vec{J}$  (figura 3.33). Un tub are lungimea „ $\ell$ ” și diferă de la o linie de curent la alta.

Conductanța unui tub este:

$$dG_{\text{tub}} = \frac{\sigma ds}{\ell} \quad (3.85)$$

Diversele tuburi elementare sunt parcurse de curent într-o conexiune paralel, deci:

$$G = \int dG = \int_{S_{\text{cond}}} \frac{\sigma ds}{\ell} \quad (3.86)$$

$\ell$  – este o funcție ce exprimă lungimea liniilor de curent  $\bar{J}$  ca funcții de geometria dispozitivului.

Feliile de curent dintr-un dispozitiv se consideră de grosime „ $d\ell$ ”

infinitesimală și sunt luate  $\perp$  pe liniile lui  $\bar{J}$  (figura 3.34). Rezistența unei felii este:

$$dR_{\text{feliie}} = \rho \frac{d\ell}{S} \quad (3.87)$$

iar pentru întregul dispozitiv feliile sunt conectate în serie:

$$R = \int dR = \int_1^2 \rho \frac{d\ell}{S} \quad (3.88)$$

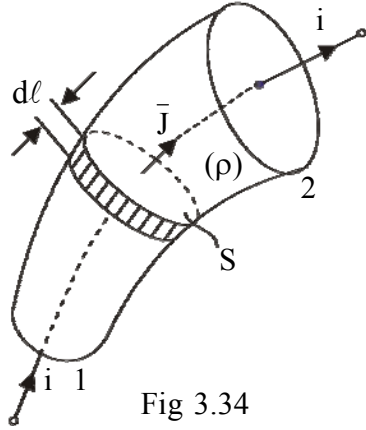


Fig 3.34

aici „ $S$ ” este o funcție care indică variația secțiunii dispozitivului în lungul liniilor de curent.

Dacă „ $\ell$ ” în (3.86) și „ $S$ ” în (3.88) sunt greu de apreciat, atunci întregul dispozitiv se aproximează cu câteva ( $n$ ) tuburi având ( $\Delta G_k$ ) sau câteva felii având ( $\Delta R_k$ ) și pentru tot dispozitivul vom avea:

$$G = \sum_1^n \Delta G_k = \sum_1^n \frac{\sigma_k \Delta S_k}{\ell_k}; \quad R = \sum_1^n \Delta R_k = \sum_1^n \frac{\rho_k \Delta \ell_k}{S_k} \quad (3.89)$$

### 3.8 Legea transformării energiei în conductori

Experimental se constată că la trecerea curentului electric printr-un mediu conductor energia electrică se transformă în alte forme de energie (termică, chimică, etc). Un conductor parcurs de curent se încălzește „energia cedată în unitatea de timp (puterea  $p_j$ ) și în unitatea de volum a conductorului (puterea specifică  $W/m^3$ ) de către câmpul electromagnetic în procesul de conducție, este egală cu produsul scalar dintre  $\bar{E}$  și  $\bar{J}$ ”.

$$p_j = \bar{E} \cdot \bar{J} \quad (3.90)$$

Forma locală (3.90) a legii scrisă dimensional reprezintă:

$$[p] = [E] \cdot [J] = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m^2} = \frac{W}{m^3}$$

Sub forma (3.90) legea este valabilă în conductori omogeni sau neomogeni, izotropi sau anizotropi, liniari sau neliniari.

*Observație:*

Acestei legi i se poate da o justificare (interpretare) microscopică: câmpul electric rezultat cheltuie un lucru mecanic  $\delta L$  pentru a mișca o particulă elementară  $q'$  în timpul  $dt$  pe direcția  $d\ell$ :

$$\delta L = \overline{F} \cdot d\ell = q' \overline{E} \cdot d\ell \quad (3.91)$$

relație care pentru unitatea de volum devine un lucru mecanic specific:

$$\delta L_{sp} = \rho_v \overline{E} \cdot d\ell = p_j dt$$

Viteza medie a particulei (între două ciocniri) față de conductor este  $\overline{v}_{rel}$ , deci:

$$d\ell = \tilde{v}_{rel} \cdot dt; \overline{J} = \rho_v \tilde{v}_{rel} \rightarrow \rho_v d\ell = \overline{J} dt \rightarrow \overline{E} \cdot \overline{J} = p_j \quad (3.92)$$

Ceea ce microscopic reprezintă curent de convecție ( $\rho_v \tilde{v}_{rel}$ ), macroscopic este privit ca un curent de conducție  $\overline{J}$ .

Puterea specifică  $p_j$  este efectul macroscopic al lucrului mecanic specific, cheltuit de câmp pentru a transporta particulele libere prin conductor. Ciocnirile microscopice dau un efect macroscopic de încălzire a piesei conductoare.

Pentru conductori neomogeni:  $\overline{E} + \overline{E}_i = \rho \overline{J} \rightarrow \overline{E} = \rho \overline{J} - \overline{E}_i$

$$p_j = \rho J^2 - \overline{E}_i \cdot \overline{J} = p_r - p_g \quad (3.93)$$

unde:  $p_r = \rho J^2 \geq 0$  este densitatea de volum a puterii pierdută ireversibil de câmpul electromagnetic sub formă de căldură prin *efect electrocaloric ireversibil (efect Joule)*.

$$p_g = \overline{E}_i \cdot \overline{J} = \begin{cases} + & \text{dacă } \overline{E}_i \text{ și } \overline{J} \text{ sunt omoparaleli; puterea cedată de} \\ & \text{sursă și primită de câmp} \\ - & \text{dacă } \overline{E}_i \text{ și } \overline{J} \text{ sunt antiparaleli, liniile lui } \overline{J} \text{ au sens} \\ & \text{contrar cu } \overline{E}_i, \text{ sursa absoarbe putere} \\ & \text{(sursa pusă la încărcat)} \end{cases}$$

$$\text{În conductoare omogene } (\overline{E}_i = 0) \text{ rezultă: } p_j = p_r = \rho J^2 \quad (3.94)$$



Forma integrală a legii se obține integrând forma locală (3.90) pe tot volumul conductorului parcurs de curent. Conductorul fiind filiform,

$i = JA$  și de asemenea  $\bar{J} \parallel d\bar{\ell} \parallel \bar{E}$ .

Puterea absorbită de întregul tronson (figura 3.35) este:

$$\begin{cases} P_j = \int_{V_{\text{cond}}} p_j dv = \int_V \bar{E} \bar{J} dv = \int_1^2 EJ(Ad\ell) = \int_1^2 E i d\ell = i \int_1^2 \bar{E} d\bar{\ell} = u_f \cdot i \\ P_j = u_f \cdot i \end{cases} \quad (3.95)$$

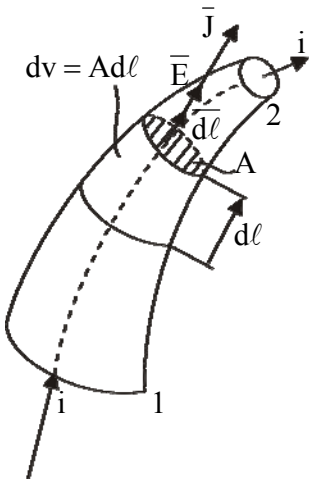


Fig 3.35

Forma (3.95) reprezintă *forma integrală* a legii. Ținând seama de forma integrală (3.80) a legii conducției electrice ( $u_f = Ri - e_i$ ) avem:

$$P_j = R \cdot i^2 - e_i \cdot i = P_R - P_G \quad (3.96)$$

unde:

-)  $P_R = Ri^2 = \int_{V_{\text{cond}}} p_r dv = \int_{V_{\text{cond}}} \rho J^2 dv \geq 0$  este puterea disipată sub formă de căldură pe rezistența  $R$  parcursă de curentul  $i$  ( $P_R = Ri^2$ ) este „legea” Joule-Lenz.

Căldura produsă în timpul  $\Delta t = t_2 - t_1$  este :

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} Ri^2 dt \quad [J]$$

$$- ) P_G = e_i \cdot i = \begin{cases} (+) \xrightarrow{\quad} \text{cerc cu punct} \xrightarrow{\quad} i & \text{sursa produce puterea electrică } (e_i \cdot i) \\ (-) \xleftarrow{\quad} \text{cerc cu punct} \xleftarrow{\quad} i & \text{sursa consumă puterea electrică } (e_i \cdot i) \end{cases}$$

Dacă printr-un conductor se stabilește un curent variabil, de exemplu sinusoidal, atunci și densitatea de curent are o variație sinusoidală:

$$J = J_{\text{max}} \sin \omega t = \sqrt{2} J_{\text{ef}} \sin \omega t$$

Puterile transformate în căldură au expresiile:

$$p_j = \rho J_{\text{ef}}^2 \quad ; \quad P_j = \int_{V_{\text{cond}}} \rho J_{\text{ef}}^2 dv = R I_{\text{ef}}^2 \quad (3.97)$$

Pentru orice formă de variație în timp a lui  $J(t)$ , pierderile depind de  $J_{ef}^2$ .  
Sau, dacă lucrăm cu funcțiile  $J(t)$  și  $i(t)$  atunci:

$$\begin{cases} p'_j = \rho J^2(t) \rightarrow P'_j(t) = \int_V \rho J^2(t) dv \rightarrow P_j = \frac{1}{T} \int_0^T P'_j(t) dt \\ P'_R(t) = Ri^2(t) \rightarrow P_R = \frac{1}{T} \int_0^T Ri^2(t) dt = RI_{ef}^2 \end{cases} \quad (3.98)$$

### 3.9 Legea polarizației electrice temporare

Polarizarea este un fenomen specific corpurilor dielectrice (izolanți). Exceptând polarizare permanentă (care are cauze neelectrice), polarizarea temporară apare ca urmare a introducerii corpurilor într-un câmp electric exterior de intensitate  $\bar{E}$ . Legea polarizației temporare este o lege de material care exprimă local (punct cu punct) dependența polarizației temporare  $\bar{P}_t$  de intensitatea câmpului electric  $\bar{E}$ .

Relația  $\bar{P}_t = \bar{P}_t(\bar{E})$  se poate stabili experimental, cu aproximație, în anumite limite de variație a lui  $\bar{E}$  și a condițiilor neelectrice. După forma acestei relații, dielectricii se împart în liniari și neliniari, respectiv izotropi și anizotropi.

#### 3.9.1 Materiale liniare și izotrope

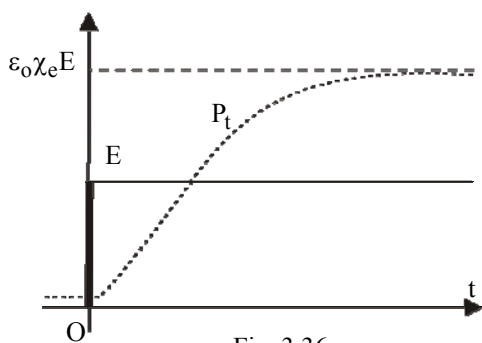


Fig. 3.36

Sub acțiunea câmpului  $\bar{E}$ , un material liniar și izotrop se polarizează pe direcția câmpului  $\bar{E}$ , polarizația fiind proporțională cu intensitatea câmpului:

$$\bar{P}_t = \epsilon_0 \chi_e \bar{E} \quad (3.99)$$

unde  $\chi_e$  este *susceptivitatea electrică relativă*, mărime ce indică pentru un material cât este de susceptibil a se polariza la introducerea sa în câmpul  $\bar{E}$ .

Forma (3.99) este valabilă în regim static sau lent variabil; în regim variabil  $\bar{P}_t$  rămâne în urma lui  $\bar{E}$  (*postefect, vâscozitate electrică, trenaj*

*electric*) și efectul este utilizat pentru încălzirea dielectrică a corpurilor. De exemplu în figura 3.36, la aplicarea unei trepte de câmp  $\vec{E}$ , polarizația atinge valoarea dată de  $\vec{E}$  abia după un timp. Dacă  $E = E_{\max} \sin \omega t$  și polarizația va avea o variație sinusoidală dar defazată din cauza postefectului:

$$P_t(t) = \varepsilon_0 \cdot \chi_e(\omega) \cdot E_{\max} \sin[\omega t - \varphi(\omega)]$$

atât susceptivitatea  $\chi_e$  cât și defazajul  $\varphi$  depind de frecvența câmpului electric. La materiale *dielectrice*  $\chi_e$  este mic și nu variază cu temperatura iar la cele *paraelectrice*  $\chi_e$  este mare și depinde de temperatură  $\left( \chi_e = \frac{C}{T} - \text{legea Curie} \right)$  și de frecvență.

### 3.9.2 Materiale liniare și anizotrope

La astfel de materiale polarizația  $\vec{P}_t$  nu mai are direcția lui  $\vec{E}$ :

$$\vec{P}_t = \varepsilon_0 \vec{\chi}_e \vec{E} \quad (3.100)$$

Fiecare direcție din cristal are o anumită susceptivitate, deci  $\chi_e$  nu mai este o constantă (scalar) ci tensor. Dacă direcția lui  $\vec{E}$  coincide cu una dintre axele proprii ale cristalului, se va produce o polarizație foarte puternică pe direcția respectivă.

Pentru *dielectrici neliniari*  $P_t = f(E)$  este o funcție neliniară, în general de forma unui histerizis. Aceste materiale au susceptivități  $\chi_e$  foarte mari. Corelând legea legăturii în câmp electric:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_t + \vec{P}_p$$

cu legea polarizației temporare, se obțin dependențele:

- *Materiale liniare:*

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} + \vec{P}_p = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} + \vec{P}_p = \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} + \vec{P}_p = \varepsilon \vec{E} + \vec{P}_p \end{aligned} \quad (3.101)$$

unde:  $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$  este *permitivitatea relativă* ( $\chi_e = \varepsilon_r - 1$ )

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$  este *permitivitatea absolută* a mediului

Cum la toate materialele dielectrice  $\varepsilon_r \geq 1 \rightarrow \chi_e \geq 0$ , deci toate se polarizează pe direcția câmpului  $\vec{E}$  și întăresc câmpul în care au fost plasate.

În lipsa polarizației permanente ( $\overline{P}_p = 0$ ) rămâne:

$$\overline{D} = \varepsilon \overline{E} \quad (3.102)$$

- *Materiale anizotrope:*

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \varepsilon_0 \overline{\chi}_e \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon_0 (1 + \overline{\chi}_e) \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon_0 \overline{\varepsilon}_r \overline{E} + \overline{P}_p = \overline{\varepsilon} \overline{E} + \overline{P}_p \quad (3.103)$$

iar în lipsa polarizării permanente:

$$\overline{D} = \overline{\varepsilon} \overline{E} \quad (3.104)$$

- *Material neliniare:*

$$\begin{aligned} \overline{D} &= \varepsilon_0 \overline{E} + \varepsilon_0 \chi_e(E) \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon_0 (1 + \chi_e(E)) \overline{E} + \overline{P}_p = \\ &= \varepsilon_0 \varepsilon_r(E) \overline{E} + \overline{P}_p = \varepsilon(E) \overline{E} + \overline{P}_p \end{aligned} \quad (3.105)$$

iar în lipsa polarizării permanente:  $\overline{D} = \varepsilon(E) \cdot \overline{E} \quad (3.102)$

### 3.10 Legea magnetizației temporare

Este o lege de material care exprimă dependența locală dintre magnetizația temporară  $\overline{M}_t$  și intensitatea câmpului magnetic  $\overline{H}$ ;  $\overline{M}_t = \overline{M}_t(\overline{H})$ . Forma acestei relații depinde de material și de condițiile nemagnetice.

– *materiale liniare și izotrope:*  $\overline{M}_t = \chi_m \overline{H} \quad (3.107)$

$\chi_m$  – susceptibilitate magnetică relativă

Combinat cu legea legăturii în câmp magnetic:

$$\overline{B} = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M}) = \mu_0 (\overline{H} + \overline{M}_t + \overline{M}_p), \text{ se obține:}$$

$$\begin{aligned} \overline{B} &= \mu_0 \overline{H} + \mu_0 \chi_m \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \mu_0 (1 + \chi_m) \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \\ &= \mu_0 \mu_r \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \mu \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p; \overline{M}_p = 0 \rightarrow \overline{B} = \mu \overline{H} \end{aligned} \quad (3.108)$$

unde:  $\mu_r = 1 + \chi_m$  este *permeabilitatea relativă* ( $\chi_m = \mu_r - 1$ )

$\mu = \mu_r \mu_0$  este *permeabilitatea absolută* a mediului

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mu_r < 1 - \text{materiale diamagnetice} ; & \text{se magnetizează invers cu } \overline{H} \\ \rightarrow \chi_m < 0 & \text{și slăbesc astfel câmpul } \overline{H}. \\ \mu_r > 1 - \text{materiale paramagnetice} ; & \text{se magnetizează pe direcția lui } \\ \rightarrow \chi_m > 0 & \overline{H} \text{ și-l întăresc în acest fel.} \end{array} \right.$$

– materiale anizotrope:

$$\begin{cases} \overline{M}_t = \overline{\chi}_m \overline{H} \\ \overline{B} = \mu_0 (1 + \overline{\chi}_m) \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \mu_0 \overline{\mu}_r \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \overline{\mu} \overline{M} + \mu_0 \overline{M}_p \\ \overline{M}_p = 0 \rightarrow \overline{B} = \overline{\mu} \overline{H} \end{cases} \quad (3.109)$$

– materiale neliniare:

$$\begin{cases} \overline{M}_t = \chi_m(H) \overline{H} \\ \overline{B} = \mu_0 (1 + \chi_m(H)) \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \mu_0 \mu_r(H) \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p = \\ = \mu(H) \overline{H} + \mu_0 \overline{M}_p \\ \overline{M}_p = 0 \rightarrow \overline{B} = \mu(H) \overline{H} \end{cases} \quad (3.110)$$

Dintre materialele neliniare frecvent utilizate în tehnică sunt

materialele feromagnetice și materialele ferimagnetice (feritele).

*Materiale feromagnetice*

Materialele feromagnetice sunt fierul, cobaltul, nichelul și aliajele lor; ele au valori mari ale permeabilității relative  $\mu_r \approx 10^5$  iar dependența  $B=f(H)$  este de forma unei curbe histerezis (figura 3.37).

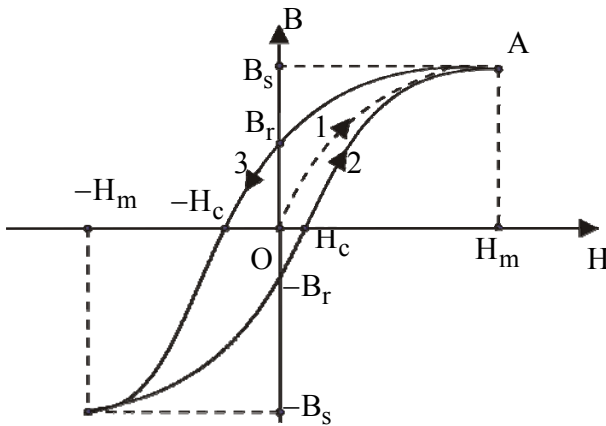


Fig 3.37

Ramura 1 este

curba de primă magnetizare, plecând din origine, cu materialul demagnetizat și până se atinge saturația  $B = B_s$  în punctul A.

Ramurile 2,3 – variația lui B la creșterea sau scăderea câmpului exterior H.

$B_s$  – inducția de saturație

$B_r$  – inducția remanentă, cea care rămâne la anularea câmpului exterior H.

$H_m$  – valoarea maximă pentru care se atinge saturația

$H_c$  – câmp coercitiv, valoarea câmpului de sens contrar care anulează inducția remanentă.

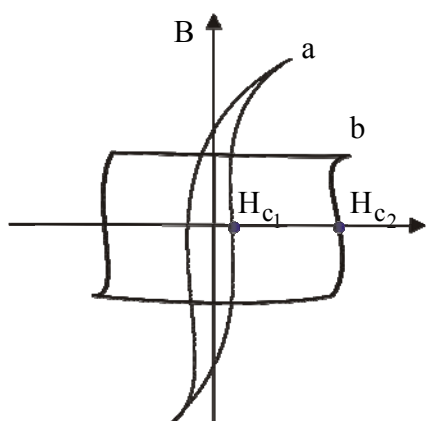


Fig 3.38

În funcție de valorile lui  $H_c$  o curbă histerezis este mai îngustă sau mai lată. Pentru o magnetizare reversibilă până la saturație se cheltuie o energie; *pierderile prin histerezis* reprezintă puterea consumată pentru a magnetiza unitatea de volum a materialului și ele sunt proporționale cu aria ciclului histerezis.

Materialele cu ciclu histerezis îngust ( $H_{c1} = 1 \text{ Oe}$ ) și  $\mu_r \gg$  se numesc *materiale moi*. Ele se magnetizează ușor, aria ciclului histerezis (curba „a” din figura 3.38) este mică.

Din astfel de materiale se confecționează miezurile pentru mașini electrice, transformatoare, aparate electrice și se prezintă sub formă de tole magnetice cu grosimi de (0,1– 0,35) mm pentru a limita intensitatea curenților turbionari care se induc în tolă.

Materialele cu ciclu histerezis lat ( $H_{c2} \approx 50 \text{ Oe}$ ) ca în curba b din figura 3.38 se numesc *materiale dure*. Aria ciclului histerezis este mare, se magnetizează greu, cu consum mare de energie, dar se și demagnetizează greu. Din astfel de materiale (oțeluri speciale) se realizează magneții permanenți.

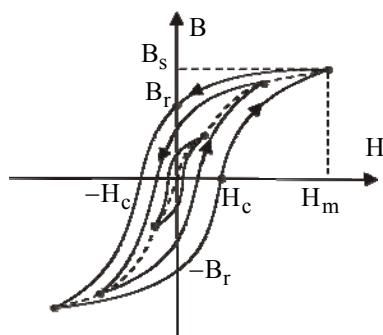


Fig 3.39

Termenii de *dur* și *moale* se referă la proprietățile magnetice și nu la cele mecanice.

Variind pe H într-un sens și altul se pot trasa diferite cicluri histerezis intermediare. Există un *ciclu histerezis limită* care duce la atingerea saturației  $B_s$  și care le cuprinde în interiorul său pe toate ciclurile intermediare; numai intersecția acestuia cu axele caracterizează materialul ( $B_r, H_c$ ) ca în

figura 3.39.

Caracteristica ce trece prin vârful tuturor curbelor histerezis intermediare se numește *caracteristica de magnetizare fundamentală* sau *curba tehnică de magnetizare*, indicată de firma producătoare și în raport cu care se definește permeabilitatea magnetică a materialului (figura 3.40).

$$(\mu_r)_A = \frac{B_A}{\mu_0 H_A} = k_1 \operatorname{tg} \alpha - \text{permeabilitatea statică în punctul A}$$

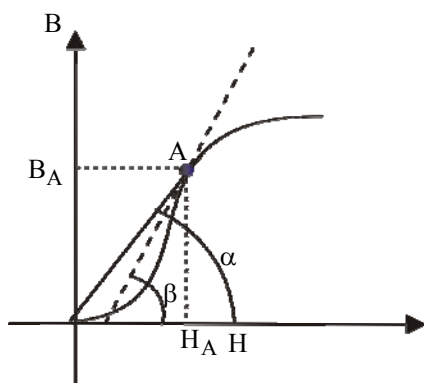


Fig 3.40

$$(\mu_r)_A = \begin{cases} \left(\frac{dB}{dH}\right)_A = k_2 \operatorname{tg} \beta & \text{-permeabilitatea} \\ & \text{dinamică în punctul A} \\ \frac{dB}{dH} = \frac{d(\mu_{st} H)}{dH} = \mu_{st} + H \frac{d\mu_{st}}{dH} \end{cases}$$

respectiv în maximul lui  $\mu_{st}$  se intersectează cele două curbe  $\mu_{st}$  și  $\mu_d$  ca în figura 3.41.

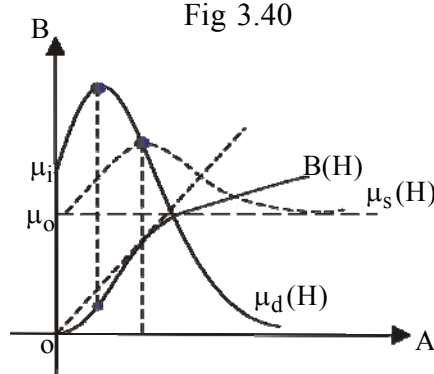


Fig 3.41

Materialele feromagnetice au o *stare solidă cristalină* (există materiale anizotrope cu cristale orientate prin laminare la rece care au  $\mu_r$  foarte mare pe acea direcție). Ele *se magnetizează ușor* până la saturație (figura 3.42) care se atinge la  $H_{m1} \approx 100$  Oe, față de materialele paramagnetice pentru care  $H_{m2} \approx 10^9$  Oe, mult peste valorile de câmp care se pot realiza astăzi (maxim  $10^6$  Oe).

Materialele feromagnetice își pierd proprietățile magnetice dacă sunt încălzite peste temperatura critică (*punctul Curie*) care

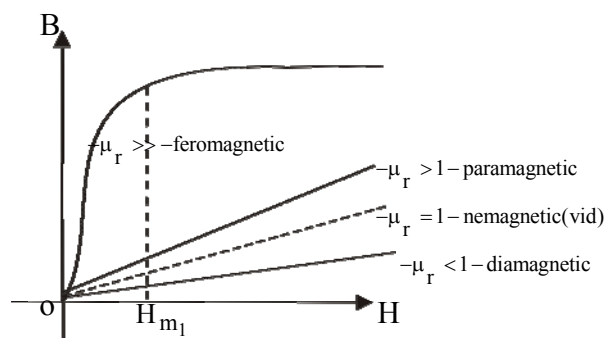


Fig 3.42

pentru fier este  $760^\circ\text{C}$ , pentru nichel  $360^\circ\text{C}$ , când devin paramagnetice. Practic demagnetizarea unui material nu se realizează prin încălzire, ci se magnetizează până la saturație și apoi este supus unor câmpuri alternative de amplitudine din ce în ce

mai mică, până se ajunge în origine.

*Feritele* sunt materiale ceramice obținute prin sinterizare la  $(1000-1400)^\circ\text{C}$  a unor amestecuri de oxizi bivalenți amestecați cu rășini, toate sub

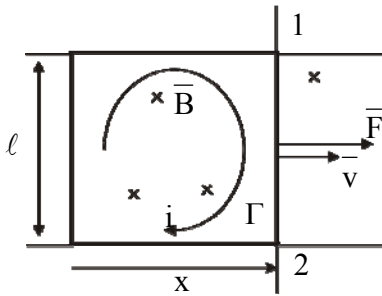


Fig 3.43

formă de pulbere. Ele au  $B_s \approx (0,4-0,5)T$ , deci mai mici ca la feromagneți ( $1 \sim 1,2$ )T. Ele au rezistivitate mare  $\rho \approx 10^6 \Omega m$  (feromagneți:  $\rho \approx 10^{-6} \Omega m$ ) fiindcă particulele metalice sunt separate prin pelicule de rășini. Ele se utilizează ca miezuri magnetice în tehnica frecvențelor înalte (nu mai apar curenți turbionari). Se utilizează pentru: miezuri de transformatoare și micromotoare,

antene magnetice, memorii magnetice etc.

### 3.11 Aplicații

1. Sub acțiunea unei forțe  $\vec{F}$  o bară de lungime  $\ell$  lunecă pe un cadru conductor într-un câmp exterior  $\vec{B}$ . Care trebuie să fie legea de mișcare a barei pentru ca prin cadru să treacă un curent constant ( $i = I_0$ ).

În bara mobilă se induce o tensiune electromotoare de mișcare:

$$e_\Gamma = \oint_\Gamma (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_{l(\Gamma)} \underbrace{(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}}_{-vBd\ell} = -vB \int_1^2 d\ell = -vB\ell$$

$$\begin{cases} R_\Gamma = 2\rho \frac{\ell+x}{A} - \text{este rezistența electrică a curbei } \Gamma \\ v = \frac{dx}{dt} - \text{este viteza instantanee a barei} \end{cases}$$

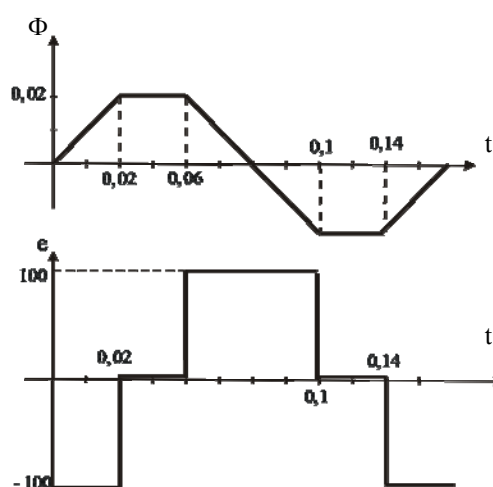
$$e_\Gamma = vB\ell = R_\Gamma \cdot i = 2\rho \frac{\ell+x}{A} \cdot I_0 \rightarrow v = \frac{2\rho I_0}{A\ell B} x + \frac{2\rho I_0}{A\ell B} = k(x+1)$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = k(x+1) \\ t=0 \rightarrow x=0 \end{cases} \rightarrow \frac{dx}{x+1} = kdt \rightarrow x = e^{kt} - 1 \rightarrow v = \frac{dx}{dt} = ke^{kt}$$

respectiv viteza trebuie să crească exponențial pentru a se respecta condiția din enunțul problemei, iar forța care produce mișcare este:  $F = ma = m \frac{dv}{dt} = mk^2 e^{kt}$ , deci tot exponențială.



2. Fluxul magnetic  $\Phi$  ce trece prin cele  $N = 100$  spire ale unei bobine plate variază în timp ca în figura 3.44. Să se construiască funcția  $e(t)$  – tensiunea electromotoare indusă la bornele bobinei.



Tensiunea electromotoare indusă este :

$$e = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -100 \frac{0.02}{0.02} = -100V$$

când fluxul crește ( $\Delta\Phi > 0$ ), respectiv  $e = 100V$  când fluxul scade ( $\Delta\Phi < 0$ ) și  $e = 0$  când  $\Phi = ct$  ca în figura 3.44. Graficul lui  $e(t)$  se obține prin derivarea grafică a funcției  $\frac{d\Phi}{dt}$ .

3. Să se verifice continuitatea liniilor de curent printr-un condensator.

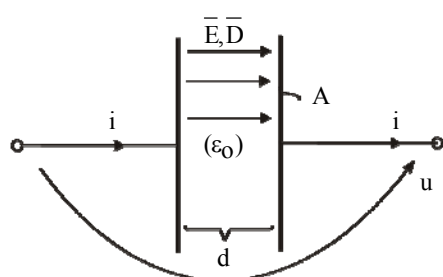


Fig 3.45

Dacă se aplică o tensiune sinusoidală la bornele sale atunci:

$$u = U_m \sin \omega t \rightarrow E = \frac{U_m}{d} \sin \omega t \rightarrow D = \epsilon_0 E$$

Curentul de deplasare prin condensator are densitatea:

$$J_d = \frac{\partial D}{\partial t} = (\epsilon_0 \omega \frac{U_m}{d}) \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}), \text{ iar intensitatea curentului este:}$$

$$i_d = J_d A = \omega U_m \frac{\epsilon_0 A}{d} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Curentul de conducție prin fir este: } i = C \frac{du}{dt} = \omega C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

deci  $i = i_d$ , curentul de conducție din fir se continuă prin dielectric sub formă de curent de deplasare.

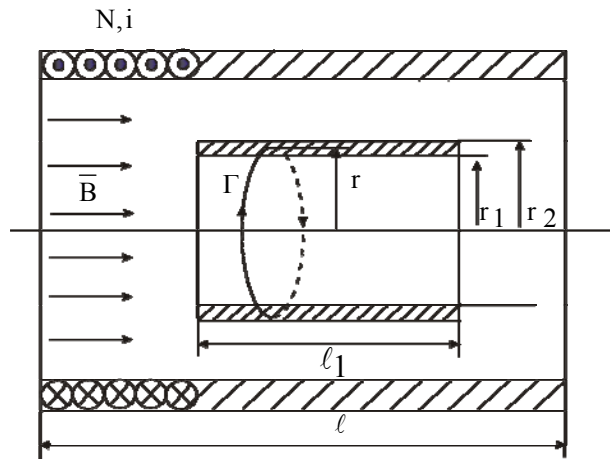


Fig 3.46

4. Într-o bobină cilindrică cu  $N$  spire parcurse de curentul  $i(t)$  este plasat coaxial un tub conductor. Neglijând câmpul magnetic de reacție, să se determine puterea electrică transformată în căldură în materialul tubului conductor (figura 3.46).

Inducția  $\bar{B}$  în interiorul bobinei este un câmp

uniform cu expresia:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{\ell} \rightarrow \Phi_{S_\Gamma} = \bar{B} \bar{S}_\Gamma = -B\pi r^2$$

Tensiunea electromotoare indusă în curba  $\Gamma$  ( $r \in (r_1, r_2)$ ), respectiv câmpul electric indus de-a lungul curbei  $\Gamma$  este:

$$\oint_{\Gamma} \bar{E} d\ell = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \rightarrow E \cdot 2\pi r = \pi r^2 \frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow E = \mu_0 \frac{N}{2\ell} r \frac{\partial i}{\partial t} \rightarrow$$

$$\rightarrow J = \sigma E \rightarrow p_j = \rho J^2 = EJ$$

Puterea transformată în căldură pe materialul tubului conductor este:

$$P'_j = \int_{V_{\text{tub}}} p_j dv = \int_{r_1}^{r_2} (\sigma E^2) 2\pi \ell_1 r dr = \underbrace{\sigma \mu_0^2 \frac{N^2}{\ell^2} \frac{\pi \ell_1}{8} (r_2^4 - r_1^4)}_k \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)^2 = k \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)^2$$

$$\begin{cases} P_j = \frac{1}{T} \int_0^T P'_j dt = \frac{k}{T} \int_0^T \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)^2 dt \xrightarrow{i=I_m \sin \omega t} P_j = k \omega^2 I_{\text{ef}}^2 \\ P_j = k \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)_{\text{ef}}^2 = k (\omega I_{\text{ef}})^2 = \omega^2 \sigma \frac{\mu_0^2 N^2 \pi \ell_1}{8 \ell^2} (r_2^4 - r_1^4) I_{\text{ef}}^2 \end{cases}$$

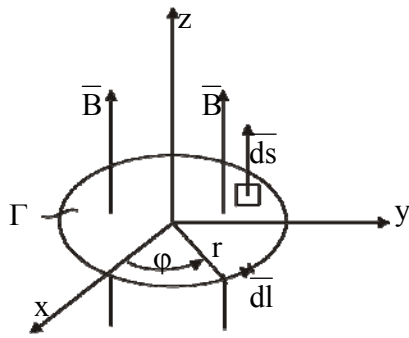


Fig 3.47

5. Prin curba  $\Gamma$  conținută în planul  $xOy$  și descrisă de ecuația  $x^2 + y^2 = 16$ , trece un câmp magnetic variabil având expresia:  $\vec{B} = \vec{k} 2\sqrt{x^2 + y^2} \cos \omega t$

Se cere expresia t.e.m induse în spira  $\Gamma$  din figura 3.47

Tensiunea electromotoare indusă (prin transformare) este:

$$e_{\Gamma} = -\frac{d}{dt} \int_{S_{\Gamma}} \vec{B} \cdot \vec{ds} = -\int_{S_{\Gamma}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{ds} = \int dy \int \left( -2\omega \sqrt{x^2 + y^2} \sin \omega t \right) dx$$

$$\begin{cases} \vec{ds} = \vec{k} dx dy \\ \vec{dl} = r d\varphi \vec{u}_{\varphi} \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial B}{\partial t} = -2\omega r \sin \omega t \\ ds = r dr d\varphi \end{cases}$$

Cu schimbarea de variabile, expresia tensiunii electromotoare devine:

$$e_{\Gamma} = 2\omega \sin \omega t \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^4 r^2 dr = \frac{4\pi}{3} 64 \omega \sin \omega t \quad [\text{V}]$$

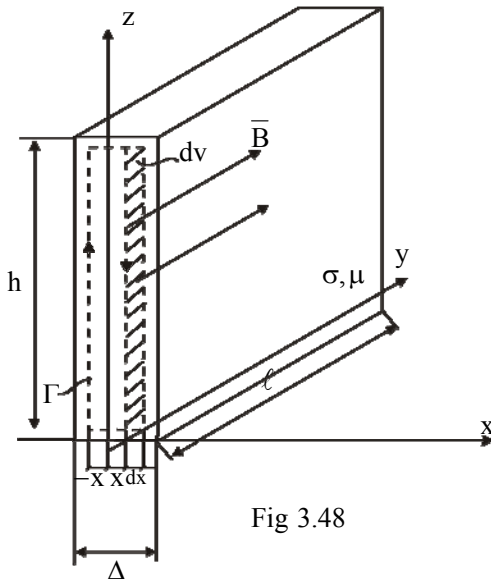


Fig 3.48

6. Printr-o tolă feromagnetică cu parametrii  $(\sigma, \mu)$  și geometria din figură trece un flux magnetic variabil sinusoidal. Cum  $\Delta \ll (h, \ell)$  pe grosimea tolei (figura 3.48) câmpul  $\vec{B}$  îl presupunem repartizat uniform:  $B = B_m \sin \omega t$ . Să se determine pierderile prin curenți turbionari în volumul tolei.

Câmpul  $\vec{B} = \vec{j}B(t)$  induce în jurul său linii de câmp electric indus  $\vec{E}$  situate în plane  $\perp$  pe  $\vec{B}$ . Fie  $\Gamma$  o astfel de linie a câmpului electric indus  $\vec{E}$ :

$$e_{\Gamma} = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E \cdot \ell_{\Gamma} = E(2h + 4x) \approx 2hE$$

Fluxul magnetic prin suprafața  $S_{\Gamma}$  este :

$$\Phi_{S_{\Gamma}} = \vec{B} \cdot \vec{S}_{\Gamma} = B \cdot 2xh \rightarrow -\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} = -2xh \frac{\partial B}{\partial t}$$

Din legea inducției electromagnetice (3.49) tensiunea electromotoare indusă prin transformare este:

$$e_{\Gamma} = -\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt} \rightarrow 2hE = -2xh \frac{\partial B}{\partial t} \rightarrow E = -x \frac{\partial B}{\partial t} = -\omega x B_m \cos \omega t$$

Semnul (-) indică faptul că liniile de câmp indus  $\vec{E}$  nu coincid cu orientarea curbei  $\Gamma$  din figura 3.48, ele fac rotoare stângi în jurul câmpului inductor  $\vec{B}$ . Cutenții induși  $\vec{J}$  și pierderile specifice au expresiile:

$$J_{ef} = \sigma E_{ef} = \frac{1}{\sqrt{2}} \omega x B_m \rightarrow p_j = \rho J_{ef}^2 = \frac{\omega^2 B_m^2}{2\rho} x^2$$

Integrând pierderile specifice ( $p_j$ ) pe volumul tolei ( $dv = \ell h dx$ ) se obține :

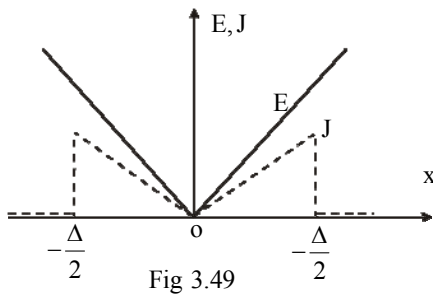


Fig 3.49

$$P_j = \frac{\omega^2 B_m^2}{2\rho} \ell h \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{\omega^2 B_m^2 \Delta^2}{3\rho} (\ell h \Delta)_{v_{Fe}}$$

Pierderile de putere din unitatea de volum sunt:

$$P_{jsp} = \frac{P_j}{v_{Fe}} = \frac{\omega^2 B_m^2 \Delta^2}{3\rho} = f(\omega^2, B_m^2, \Delta^2, \rho)$$

Încălzirea tolei crește proporțional cu mărimile:

$\omega^2$  – frecvența fluxului; peste o anumită frecvență miezurile nu se mai fac din tole feromagnetice, s-ar încălzi prea mult.

$B_m^2$  – amplitudinea câmpului, deci cu solicitarea magnetică a miezului (tolei).

$\Delta^2$  – grosimea tolei; tolele subțiri se încălzesc mai puțin

$\frac{1}{\rho}$  – cu cât  $\rho$  este mai mare (tole cu adaos de siliciu, care mărește  $\rho$  dar le face și mai casante) se încălzesc mai puțin.