4. Ecuațiile câmpului electromagnetic

4.1 Legile câmpului electromagnetic- un sistem complet de ecuații

Teoria macroscopică a fenomenelor electromagnetice utilizează pentru caracterizarea fenomenelor şi a stărilor corespunzătoare un număr de şase mărimi primitive $\left(q, \overline{p}, i, \overline{m}, \overline{E}, \overline{B}\right)$ şi un număr nelimitat de mărimi derivate.

Determinarea univocă a unui câmp de vectori (problema Poincaré) este posibilă sub *forma integrală* dacă este precizată *circulația* sa în lungul oricărei curbe închise Γ şi *fluxul* său printr-o suprafață închisă Σ iar sub formă locală dacă în orice punct din domeniu este precizat *rotorul* şi *divergența* câmpului. Dacă expresiile legilor electrotehnice satisfac aceste condiții se spune că expresiile lor constituie un *sistem complet de ecuații* pe baza căruia se poate determina un câmp.

La baza fenomenelor electromagnetice stau un număr de 12 legi, dintre care 9 sunt *legi generale* şi 3 sunt *legi de material*.

Legile generale(considerând medii fixe $\overline{v} = 0$, fără mărimi neelectrice $\overline{P}_p = 0, \overline{M}_p = 0, \overline{E}_i = 0$) scrise sub forma lor integrală şi locală sunt:

I. Legea inducției electromagnetice :

$$\oint_\Gamma \overline{E} \cdot \overline{dl} = -\frac{d\Phi_{S_\Gamma}}{dt} \quad ; \quad \mathrm{rot}\,\overline{E} = -\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$$

II . Legea circuitului magnetic:

$$\oint_\Gamma \overline{H} \cdot \overline{dl} = \theta_{S_\Gamma} + \frac{d\psi_{S_\Gamma}}{dt}; \quad \mathrm{rot}\,\overline{H} = \overline{J} + \frac{\partial \overline{D}}{\partial t}$$

III. Legea fluxului electric:

$$\oint_\Sigma \overline{D} \cdot \overline{ds} = q_\Sigma \quad ; \quad \mathrm{div}\,\overline{D} = \rho_V \text{ (sau 0 în afara corpurilor încărcate)}$$

IV. Legea fluxului magnetic:

$$\oint_\Sigma \overline{B} \cdot \overline{ds} = 0 \quad ; \quad \mathrm{div}\,\overline{B} = 0$$

V. Legea conservării sarcinii electrice:

$$i_\Sigma = -\frac{dq_\Sigma}{dt} \quad ; \quad \mathrm{div}\,\overline{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t}$$

VI. Legea legăturii în câmp electric:

$$\overline{D} = \varepsilon_o \cdot \overline{E} + \overline{P}$$

VII. Legea legăturii în câmp magnetic:

$$\overline{B} = \mu_o \cdot \left(\overline{H} + \overline{M}\right)$$

VIII. Legea transformării energiei în conductori:

$$p_j = \overline{E} \cdot \overline{J}$$

IX. Legea electrolizei:

$$m = \frac{A}{n \cdot F_o} \cdot q = k \cdot q$$

In expresiile acestor legi intervin trei constante universale $\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi 9 10^9}\ F/m$, $\mu_o = 4\pi 10^{-7}\ H/m$ şi $F_o = 96 \cdot 496\ C/ech.gr$ - constanta lui Farraday.

Principalele *legi de material* (mai sunt şi alte legi de material: legea câmpurilor voltaice, legea emisiei electronilor din metale etc) sunt:

X. Legea polarizaţiei electrice temporare:

$$\overline{P}_t = \varepsilon_o \chi_e \overline{E}$$

care combinată cu legea III fără $\overline{P}_p = 0 \rightarrow \overline{D} = \varepsilon \overline{E}$

XI. Legea magnetizaţiei temporare:

$$\overline{M}_t = \chi_m \overline{H}$$

care combinată cu legea VII pentru $\overline{M}_p = 0 \rightarrow \overline{B} = \mu \overline{H}$

XII. Legea conducţiei electrice:

$$\overline{J} = \sigma \overline{E}$$

In expresiile acestor legi apar constante ce ţin de proprietăţile mediului în care se aplică legea: $\varepsilon(\chi_e, \varepsilon_r); \mu(\chi_m, \mu_r); \sigma = \frac{1}{\rho}$.

Examinând expresiile acestor legi se constată următoarele proprietăţi:

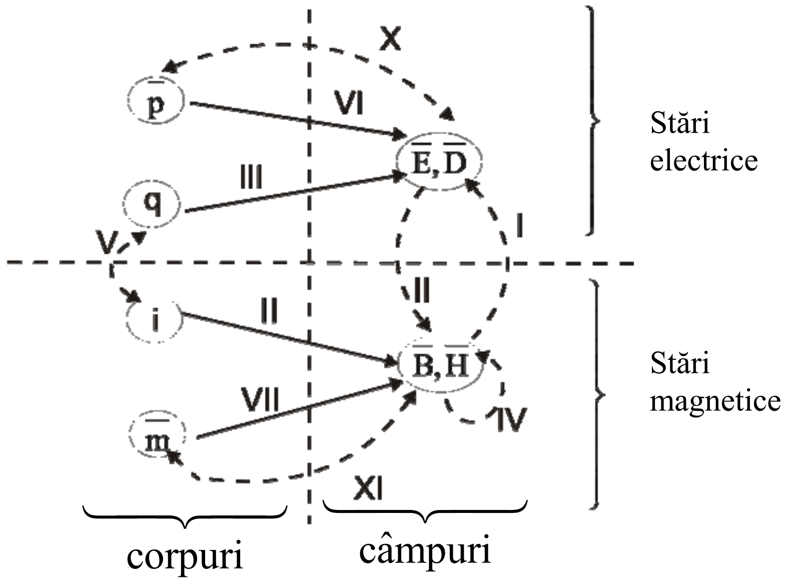

Fig 4.1

- Legile I,III,VI stabilesc con-dițiile produ-cerii unui câmp electric $(\overline{E},\overline{D})$ de către câmpuri variabile $\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}$, de către corpuri încăr-cate (q) şi de către corpuri polarizate $(\overline{p})$.
- Legile II, VII stabilesc condițiile producerii unui câmp magnetic $(\overline{H},\overline{B})$ de către câmpuri electrice variabile $\left(\frac{\partial \overline{D}}{\partial t}\right)$, de către curenți electrici (i) şi de către corpuri magnetizate $(\overline{m})$.
- Legile VIII, IX stabilesc efectul energetic, respectiv chimic al procesului de conducție a curentului electric.
- In regim staționar $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ fenomenele electrice (stările electrice) şi cele magnetice nu se influențează reciproc. Câmpurile $\overline{E}$ şi $\overline{B}$ pot coexista în aceeaşi regiune a spațiului (de exemplu în jurul conductoarelor parcurse de curent continuu) fără a interacționa între ele; proprietatea rămâne adevărată şi în regim cvasistaționar (frecvențe joase).
- In regim variabil repartiția de sarcină este condiționată de repartiția de curent (legea V). Câmpul magnetic variabil *induce* câmp

electric (legea I) iar un câmp electric variabil *produce* în jurul său un câmp magnetic (legea II).Legăturile între câmpul electric şi cel magnetic există doar în regimuri variabile (sunt desenate cu linie punctată în figura 4.1).

In regim variabil câmpul electromagnetic poate exista şi în lipsa corpurilor sub formă de *undă electromagnetică*, undă care se propagă în spaţiu cu viteza $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Legile permit o corelare care arată că ansamblul lor formează, din punct de vedere matematic, un *sistem complet de ecuaţii*:

- legile I şi III precizează sub formă integrală circulaţia şi fluxul câmpului electric, respectiv sub formă locală precizează rotorul şi divergenţa câmpului electric
- legile II şi IV precizează integral circulaţia şi fluxul câmpului magnetic iar local rotorul şi divergenţa câmpului magnetic.

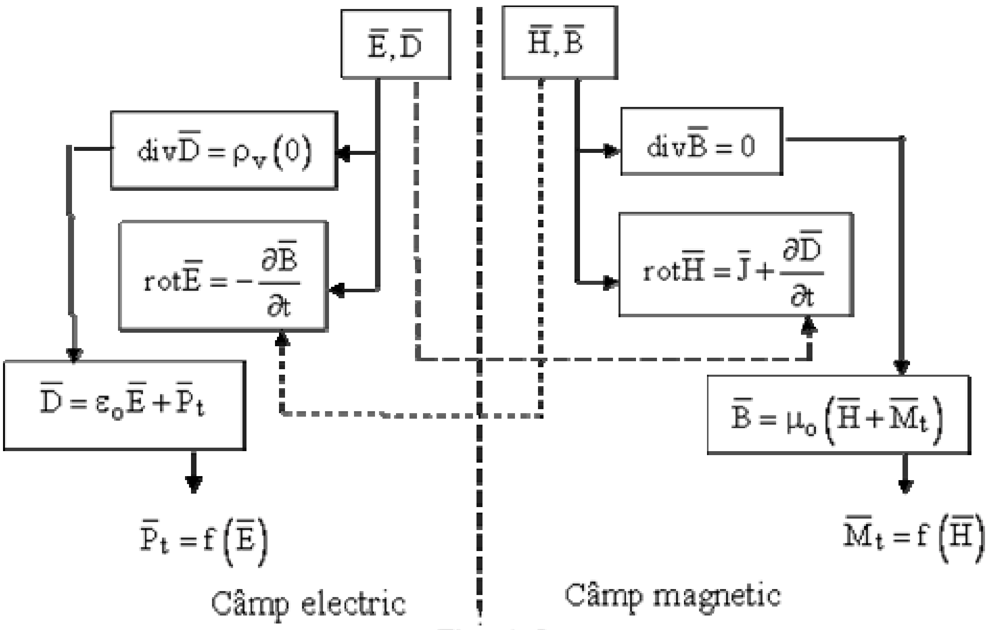

Fig. 4.2

Deoarece legile sub formă locală nu precizează rotorul şi divergenţa aceleiaşi mărimi, ci $\mathrm{rot}\,\overline{E}$ şi $\mathrm{div}\,\overline{D}$, ţinând seama de expresiile celorlalte legi din sistem se pot aduce la aceeaşi specie. Similar în câmp magnetic, deşi se cunosc $\mathrm{div}\,\overline{B}$ şi $\mathrm{rot}\,\overline{H}$ se pot aduce la rot şi div din aceeaşi specie ca în figura 4.2. Legătura între câmpul electric şi cel magnetic există doar în regim variabil (legăturile sunt desenate cu linie punctată).

Formele locale ale legilor sistematizează matematic proprietățile câmpului şi permit stabilirea unor algoritmi de calcul iar formele integrale asociate sunt singurele adevăruri verificabile experimental.

4.2 Teorema de unicitate a câmpului electromagnetic

Sistemul de legi ale câmpului electromagnetic permit să determinăm univoc mărimile de stare ale câmpului electromagnetic:

$$\overline{E}(\overline{r},t)\ ;\ \overline{D}(\overline{r},t)\ ;\ \overline{H}(\overline{r},t)\ ;\ \overline{B}(\overline{r},t)$$

în fiecare punct din domeniul de câmp v_Σ mărginit de suprafața închisă Σ şi în fiecare moment "t" ulterior momentului inițial $t \geq t_o$,dacă se cunosc:

1.*condițiile inițiale*: starea câmpului electromagnetic în fiecare punct din v_Σ la momentul inițial t_o: $\overline{E}(\overline{r},t_o)$; $\overline{H}(\overline{r},t_o)$.

2.*condițiile la limită*: distribuția (şi evoluția în timp) pe frontiera Σ în fiecare moment $t \geq t_o$ a componentelor tangențiale: $\overline{E}_t(\overline{r},t)$; $\overline{H}_t(\overline{r},t)$.

3.*proprietățile mediului* şi starea corpurilor din domeniul de câmp v_Σ : $\varepsilon=\varepsilon(\overline{r})$; $\mu=\mu(\overline{r})$; $\sigma=\sigma(\overline{r})$;

4.*condițiile de surse*: cunoaşterea funcțiilor $\rho_v, \overline{J}, \overline{P}_p, \overline{\mathbf{M}}_\mathbf{p}, \overline{\mathbf{E}}_\mathbf{i}(\overline{r},t)$, care produc câmp în jurul lor.

Sistematic, aceste condiții se scriu sub forma (4.1):

$$\begin{bmatrix}\overline{E}_t(P_i,t')\\ \overline{H}_t(P_i,t')\end{bmatrix}_{\substack{P\in\Sigma\\ t'>t_o}} + \begin{bmatrix}\overline{E}(P,t_o)\\ \overline{H}(P,t_o)\end{bmatrix}_{P\in v_\Sigma} \Rightarrow \begin{bmatrix}\overline{E}(P,t)\\ \overline{H}(P,t)\end{bmatrix} \tag{4.1}$$

respectiv pentru a determina câmpurile $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ într-un punct din v_Σ la un moment t trebuie cunoscute valorile lor inițiale în orice punct din v_Σ şi evoluția componentelor tangențiale $\overline{E}_t, \overline{H}_t$, pe frontiera Σ a domeniului, de la originea t_o până la momentul considerat t, la proprietăți ale mediului date.

Demonstrarea teoremei se poate face plecând de la expresiile legilor şi reflectă matematic proprietatea câmpului electromagnetic de a satisface, ca orice sistem fizic, principiul cauzalității.

Deoarece condițiile impuse de această teoremă sunt severe (în special condiția (2)), în cele mai multe cazuri nu se determină direct câmpul $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ ci se studiază probleme asociate, mult mai simple ; se determină potenţialele lor V şi $\overline{A}$ care satisfac condiţii de unicitate mai uşor de stabilit şi în final se revine la câmpurile fizice: $\overline{E} = -\text{grad}\,V$ şi $\overline{B} = \text{rot}\,\overline{A}$, aşa cum se va vedea în capitolele ce urmează.

4.3 Teorema superpoziţiei câmpurilor electromagnetice

Un domeniu de câmp v_{Σ} limitat de suprafaţa Σ conţine în interior medii liniare şi izotrope aflate în repaus şi în acest domeniu sunt suprapuse "n" câmpuri electromagnetice corespunzând fiecare dintre ele la condiţii iniţiale şi la limită proprii.

Dacă $\overline{E}_k, \overline{D}_k, \overline{H}_k, \overline{B}_k$ sunt mărimile de stare ale câmpului ce corespund la:

- Condiţii iniţiale: $\overline{E}_k(\overline{r}, t_o); \overline{H}_k(\overline{r}, t_o)$ în orice punct din v_{Σ}
- Condiţii la limită: $\overline{E}_{tk}(\overline{r}, t); \overline{H}_{tk}(\overline{r}, t)$ pe suprafaţa Σ, la $t > t_o$
- Mărimi neelectrice: $\overline{P}_{pk}(\overline{r}, t)$; $\overline{H}_{pk}(\overline{r}, t)$; $\overline{E}_{ik}(\overline{r}, t)$

atunci câmpurile rezultante ce provin din însumarea (vectorială) a mărimilor de stare ale câmpurilor componente (k=1,2…n) sunt:

$$\overline{E} = \sum_{1}^{n} \overline{E}_k \; ; \quad \overline{H} = \sum_{1}^{n} \overline{H}_k \; ; \quad \overline{D} = \sum_{1}^{n} \overline{D}_k \; ; \quad \overline{B} = \sum_{1}^{n} \overline{B}_k \qquad (4.2)$$

având în vedere liniaritatea ecuaţiilor câmpului. Acestor câmpuri rezultante le corespund condiţii iniţiale şi la limită rezultante:

- Condiţii iniţiale: $\overline{E}(\overline{r}, t_o) = \sum_{1}^{n} \overline{E}_k(\overline{r}, t_o)$; $\overline{H}(\overline{r}, t_o) = \sum_{1}^{n} \overline{H}_k(\overline{r}, t_o)$

(4.3)

- Condiţii la limită: $\overline{E}_t(\overline{r}, t) = \sum_{1}^{n} \overline{E}_{tk}(\overline{r}, t)$; $\overline{H}_t(\overline{r}, t) = \sum_{1}^{n} \overline{H}_{tk}(\overline{r}, t)$

(4.4)

Teorema superpoziţiei şi în domeniul câmpului, ca în alte domenii ale ştiinţei, pune în evidenţă faptul că la suma cauzelor le corespunde suma efectelor.

Dacă cel puţin o regiune din v_{Σ} nu are proprietăţi liniare, teorema nu se mai poate aplica.

4.4 Ecuațiile lui Maxwell

Studiul general şi sistematic al câmpului electromagnetic se poate face cu ajutorul formelor locale ale legilor. Ecuațiile cu derivate parțiale ce rezultă din formele locale ale legilor pentru medii imobile $(\overline{v} = 0)$ şi în domenii de continuitate a proprietăților fizice se numesc *ecuațiile lui Maxwell*.

Pe baza acestor ecuații se pot studia câmpurile electromagnetice pure, fără fenomene mecanice ($\overline{v} = 0$ - medii fixe), fără polarizație permanentă $(\overline{P}_p = 0)$, fără magnetizație permanentă $(\overline{M}_p = 0)$ şi fără câmpuri electric imprimate $(E_i = 0)$. Ce mai rămâne din formele locale ale legilor sunt expresiile (4.5):

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\overline{H} = \overline{J} + \dfrac{\partial \overline{D}}{\partial t} & \text{- legea circuitului magnetic} \\ \mathrm{rot}\,\overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} & \text{- legea inductiei electromagnetice} \\ \mathrm{div}\,\overline{D} = \rho_v / 0 & \text{- legea fluxului electric} \\ \mathrm{div}\,\overline{B} = 0 & \text{- legea fluxului magnetic} \\ \overline{D} = \varepsilon \overline{E};\ \overline{B} = \mu \overline{H};\ \overline{J} = \sigma \overline{E} & \text{- legile legaturii si a conductiei electrice} \end{cases} \tag{4.5}$$

Vom considera că prezintă interes tehnic doar câmpul din exteriorul corpurilor încărcate cu sarcină $(\rho_v = 0)$.

Ecuațiile câmpului se pot scrie în două variante, cunoscute sub numele de *ecuațiile lui Maxwell în* $\overline{E}$ *şi* $\overline{H}$ şi *ecuațiile lui Maxwell în* $\overline{E}$ *şi* $\overline{B}$:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\overline{H} = \sigma \overline{E} + \varepsilon \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\overline{E} = -\mu \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\overline{E} = 0 \\ \mathrm{div}\,\overline{H} = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,\overline{B} = \sigma\mu\overline{E} + \varepsilon\mu \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} \\ \mathrm{rot}\,\overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} \\ \mathrm{div}\,\overline{E} = 0 \\ \mathrm{div}\,\overline{B} = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

Sub formele (4.6) şi (4.7) ecuaţiile lui Maxwell reprezintă, din punct de vedere matematic, un sistem de opt ecuaţii scalare simultane cu derivate parţiale, având şase funcţii necunoscute: $H_x, H_y, H_z, E_x, E_y, E_z$ care sunt componentele vectorilor $\overline{H}(\overline{r}, t)$ şi $\overline{E}(\overline{r}, t)$ atunci când domeniul de câmp are o astfel de configuraţie încât să folosim raportarea la un sistem cartezian de axe x,y,z.

Să stabilim ecuaţiile cu derivate parţiale pe care le satisfac separat câmpurile $\overline{E}$ şi respectiv $\overline{H}$.

Aplicăm rotorul primei ecuaţii a lui Maxwell din (4.6):

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\overline{H}\right) = \sigma\left(\mathrm{rot}\,\overline{E}\right) + \varepsilon \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{rot}\,\overline{E}\right) = -\sigma\mu \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \dfrac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} \\ \mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\overline{H}\right) = \mathrm{grad}\left(\underbrace{\mathrm{div}\,\overline{H}}_{0}\right) - \Delta\overline{H} = -\Delta\overline{H} \end{cases} \tag{4.8}$$

Deci ecuaţia satisfăcută de câmpul $\overline{H}$ este de forma:

$$\Delta\overline{H} - \sigma\mu \frac{\partial \overline{H}}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \overline{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{4.9}$$

Similar, aplicând rotorul celei de a doua ecuaţii a lui Maxwell (4.6) şi ţinând seama de celelalte ecuaţii, obţinem o ecuaţie de tipul (4.9) şi pentru $\overline{E}$.

Reunite, în scriere matricială, cele două ecuaţii de acelaşi tip, avem:

$$\Delta\begin{bmatrix} \overline{E} \\ \overline{H} \end{bmatrix} - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \overline{E} \\ \overline{H} \end{bmatrix} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{bmatrix} \overline{E} \\ \overline{H} \end{bmatrix} = 0 \leftrightarrow \left(\Delta - \sigma\mu \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix} \overline{E} \\ \overline{H} \end{bmatrix} = 0 \tag{4.10}$$

Ecuaţiile de tipul (4.10) sunt ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul doi, de tip hiperbolic şi au, în general, ca soluţie o undă atenuată. Soluţiile lor ($\overline{E}$ şi $\overline{H}$) nu sunt independente (deşi sunt ecuații distincte), ele sunt legate prin primele două ecuații din (4.6), deci unda electrică şi cea magnetică se intercondiționează reciproc în unda electromagnetică.

- In cazul *mediilor dielectrice* (izolante) $\sigma = 0$ şi din (4.10) rămâne:

$$\left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{bmatrix} = 0 \leftrightarrow \left(\Delta - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{bmatrix} = 0 \leftrightarrow \Box\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{bmatrix} = 0$$

(4.11)

unde : $\Box = \Delta - \frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ este *operatorul d'Alembertian*

$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$ este *viteza de propagare a undei* prin mediul cu ε şi μ.

Unda electromagnetică printr-un mediu dielectric (în particular şi prin vid, aer uscat) este soluția unei ecuații de tip d'Alembert (4.11) numită şi *ecuația undei*, scrisă într-un *mediu dielectric* prin care unda se *propagă.*

- In *medii conductoare* $(\sigma >> \varepsilon)$ ecuația (4.10) devine:

$$\left(\Delta - \sigma\mu\frac{\partial}{\partial t}\right)\begin{bmatrix}\overline{E}\\ \overline{H}\end{bmatrix} = 0 \qquad (4.12)$$

care este o ecuație vectorială de tip parabolic (ecuație de tip Helmholz) sau *ecuația difuziei* iar $\lambda = \frac{1}{\sigma\mu}$ este *constanta de difuzie* a mediului. Deci într-o piesă conductoare unda electromagnetică *pătrunde* amortizat, are loc un fenomen de difuzie (analog cum pătrunde căldura într-un corp).

In *regim permanent sinusoidal*, ecuațiile lui Maxwell (4.6) se transpun în mărimi complexe sub forma:

$$\begin{cases} \text{rot}\,\dot{\overline{H}} = \sigma\dot{\overline{E}} + j\omega\varepsilon\dot{\overline{E}} \\ \text{rot}\,\dot{\overline{E}} = -j\omega\mu\dot{\overline{H}} \\ \text{div}\,\dot{\overline{H}} = 0 \\ \text{div}\,\dot{\overline{E}} = 0 \end{cases} \qquad (4.13)$$

unde $\dot{\overline{H}}$ este reprezentarea în complex a câmpului vectorial $\overline{H}(t)$ care are o variație sinusoidală în timp. In loc de a sublinia mărimea complexă $\overline{H}$

(cum era în teoria circuitelor $\underline{U}$, $\underline{I}$, $\underline{Z}$…) se pune un punct deasupra barei care reprezintă caracterul vectorial al funcției: $\dot{\overline{H}}$, $\dot{\overline{E}}$, $\dot{\overline{J}}$.

In *regim tranzitoriu* (cu condițiile inițiale date) ecuațiile lui Maxwell se scriu operațional (cu transformata Laplace) sub forma:

$$\begin{cases} \text{rot}\,\overline{H}(s)=\sigma\overline{E}(s)+s\varepsilon\overline{E}(s)-\varepsilon\overline{E}_o \\ \text{rot}\,\overline{E}(s)=s\mu\overline{H}(s)-\mu\overline{H}_o \\ \text{div}\,\overline{H}(s)=0 \\ \text{div}\,\overline{E}(s)=0 \end{cases} \tag{4.14}$$

unde $\overline{H}(s)$ este imaginea Laplace a funcției vectoriale $\overline{H}(t)$ iar $\overline{H}_o$ este valoarea inițială (din momentul comutației) a aceleeaşi funcții. Ecuațiilor lui Maxwell (4.6) şi (4.7) valabile în domenii de continuitate li se asociază *ecuațiile de trecere* (4.15) valabile în vecinătatea unor suprafețe de discontinuitate fixe S_{12} ce separă două medii corporale cu proprietăți diferite:

$$\begin{cases} \text{rot}_s\overline{E}=0 \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{E}_2-\overline{E}_1\right)=0 \;\rightarrow\; E_{t_2}=E_{t_1} \\ \text{rot}_s\overline{H}=\overline{J}_s \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{H}_2-\overline{H}_1\right)=\overline{J}_s \;\rightarrow\; \overline{H}_{t_2}-\overline{H}_{t_1}=\overline{J}_s \xrightarrow{\overline{J}_s=0} H_{t_2}=H_{t_1} \\ \text{div}_s\overline{J}=-\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t} \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{J}_2-\overline{J}_1\right)=-\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t} \;\rightarrow\; J_{n_2}-J_{n_1}=-\dfrac{\partial\rho_s}{\partial t} \xrightarrow{\rho_s=0;\frac{\partial}{\partial t}=0} J_{n_1}=J_{n_2} \\ \text{div}_s\overline{D}=\rho_s \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{D}_2-\overline{D}_1\right)=\rho_s \;\rightarrow\; D_{n_2}-D_{n_1}=\rho_s \xrightarrow{\rho_s=0} D_{n_2}=D_{n_1} \\ \text{div}_s\overline{B}=0 \;\rightarrow\; \overline{n}_{12}\left(\overline{B}_2-\overline{B}_1\right)=0 \;\rightarrow\; B_{n_2}=B_{n_1} \end{cases} \tag{4.15}$$

unde $\overline{n}_{12}$ este versorul normalei la suprafața S_{12}, dirijat dinspre mediul 1 spre 2. Pentru discontinuități mobile cu $\overline{v}_s$ ecuațiile de trecere (4.15) au o formă mai dezvoltată[10].

4.5 Unda electromagnetică plană

Din analiza primelor două ecuații ale lui Maxwell rezultă că, în cazul câmpurilor variabile în timp, apare o dublă legătură cauzală între aspectul electric şi cel magnetic al câmpului electromagnetic desprins de corpuri, sub formă de *undă electromagnetică*.

Vom examina un caz particular de undă într-un mediu dielectric $(\sigma=0)$ când în toate punctele situate într-un plan perpendicular pe *direcția* *de propagare* valoarea câmpului este constantă. Dacă Ox este direcția de propagare a undei, atunci avem un *câmp plan* sau *undă plană* dacă mărimile de stare ale câmpului depind doar de x şi t:

$$\overline{E} = \overline{E}(x,t) \qquad ; \qquad \overline{H} = \overline{H}(x,t)$$

O astfel de undă plană există practic la distanță suficient de mare față de sursă (antena de emisie) într-un mediu izotrop şi omogen.

Considerăm un mediu dielectric $(\sigma = 0)$ cu permitivitatea ε, permeabilitatea μ, neîncărcat cu sarcină $(\rho_V = 0)$ şi neparcurs de curenți $(\overline{J} = 0)$ şi vom pune îm evidență doar câmpul electromagnetic ce apare prin interacțiunea dintre câmpul electric şi cel magnetic variabile în timp. Căutăm numai soluțiile variabile în timp ale ecuațiilor lui Maxwell (o constantă, deci, nu face parte dintr-o undă).

In aceste condiții $\left(\frac{\partial}{\partial y} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0, \rho_v = 0, \sigma = \mathbf{0}\right)$ ecuațiile lui Maxwell se scriu sub forma particulară:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\overline{H} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = -\overline{j}\frac{\partial H_z}{\partial x} + \overline{k}\frac{\partial H_y}{\partial x} \\ \operatorname{rot}\overline{H} = \varepsilon\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = \overline{i}\varepsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} + \overline{j}\varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} + \overline{k}\varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad ; \varepsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \tag{4.16}$$

$$\operatorname{div}\overline{H} = 0 \quad \rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \tag{4.17}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\overline{E} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = -\overline{j}\frac{\partial E_z}{\partial x} + \overline{k}\frac{\partial E_y}{\partial x} \\ \operatorname{rot}\overline{E} = -\mu\frac{\partial \overline{H}}{\partial t} = -\mu\left(\overline{i}\frac{\partial H_x}{\partial t} + \overline{j}\frac{\partial H_y}{\partial t} + \overline{k}\frac{\partial H_z}{\partial t}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad ; -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad ; \quad -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \tag{4.18}$$

$$\operatorname{div} \overline{E} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \tag{4.19}$$

Din relațiile (4.16) şi (4.19) respectiv (4.17) şi (4.18) rezultă:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_x}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad E_x = ct = 0 \\ \dfrac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \dfrac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad H_x = ct = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

respectiv unda plană este o *undă transversală* care nu are componente pe direcția de propagare $(E_x = 0, H_x = 0)$, deci vectorii $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ sunt conținuți în plane perpendiculare pe direcția de propagare. Din (4.20) rezultă că E_x şi H_x nu variază în timp şi nici în spațiu (sunt nişte constante), deci nu pot fi parte componentă a unei unde (câmp variabil) şi le considerăm nule; aceste componente E_x şi H_x pot fi cel mult nişte câmpuri statice, care nu afectează propagarea undei.

Din relațiile (4.16) şi (4.18) rezultă:

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = -\dfrac{\partial H_z}{\partial x} \\ \mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t} = -\dfrac{\partial E_y}{\partial x} \end{cases} \tag{4.21}$$

$$\begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial E_z}{\partial t} = \dfrac{\partial H_y}{\partial x} \\ \mu \dfrac{\partial H_y}{\partial t} = \dfrac{\partial E_z}{\partial x} \end{cases} \tag{4.22}$$

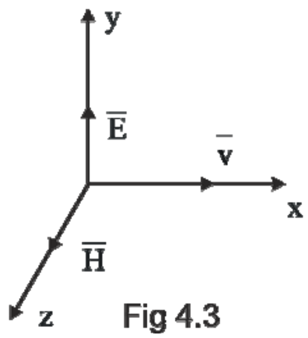

Fig 4.3

Relațiile (4.21) reprezintă o undă plană având componentele (E_y, H_z) iar (4.22) o undă plană având componentele (E_z, H_y). Cele două unde sunt independente între ele, deci de-a lungul axei Ox se pot propaga două unde plane care nu se influențează reciproc. Fiecare este o undă transversală de direcție fixă (Ox) deci sunt unde polarizate liniar după două direcții ortogonale. Una dintre ele (E_y, H_z) reprezentată în figura

4.3 se propagă după direcțiaOx cu viteza $\overline{v}$:

$$\begin{aligned}\overline{E} &= \overline{j}\,E_y = \overline{j}\,E_y(x,t)\\ \overline{H} &= \overline{k}\,H_z = \overline{k}\,H_z(x,t)\end{aligned} \tag{4.23}$$

Cele două funcții $E_y(x,t)$ şi $H_z(y,t)$ sunt legate între ele prin ecuațiile (4.21) care reprezintă un sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul I. Eliminând pe rând câte una dintre funcții, prin derivări în raport cu x şi cu t, obținem:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0 \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0 \tag{4.24}$$

Ecuațiile (4.24) sunt de tipul (4.11) (în care $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 0$) deci reprezintă ecuația undelor, ecuații cu derivate parțiale de ordinul II de tip hiperbolic a căror soluție este de forma:

$$H_z(x,t) = f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \;\; ; \;\; E_y(x,t) = f_2\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{4.25}$$

Ele sunt funcții numai de x şi t prin intermediul unei combinații liniare şi omogene $t' = t - \frac{x}{v}$. Notăm $f_1' = \frac{df_1}{dt}$; $f_1'' = \frac{d^2 f_1}{dt^2}$.

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial t'} \cdot \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{1}{v} f_1' \;\; \rightarrow \;\; \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} f_1''$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t} = f_1' \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = f_1''$$

Deci:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = f_1''\left(\frac{1}{v^2} - \varepsilon\mu\right) \tag{4.26}$$

Pentru ca soluția (4.25) să verifice ecuația (4.24) trebuie ca $v^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu}$, respectiv:

$$v = \pm\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \tag{4.27}$$

Scăzând şi adunând Δt la argumentul $\left(t - \frac{x}{v}\right)$, obținem:

$$f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) = f_1\left[(t - \Delta t) - \frac{x - v\Delta t}{v}\right] \tag{4.28}$$

respectiv funcția f_1, soluție a ecuației undelor (4.24), depinde de timp şi de x astfel că valoarea pe care o are f_1 în punctul x, la momentul t este egală cu valoarea pe care a avut-o funcția într-un moment anterior $(t-\Delta t)$, într-un punct situat mai la stânga cu $(v\Delta t)$. Deci soluția f_1 este o funcție ce se propagă în spațiu de-a lungul axei Ox cu viteza $\overline{v}$.

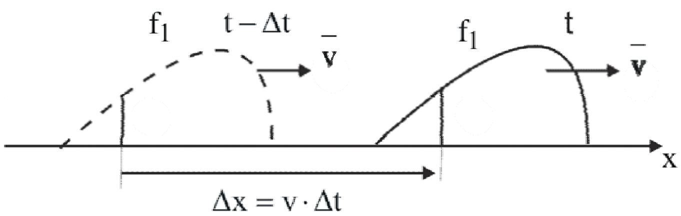

Fig 4.4

Forma (repartiția spațială) a undei f_1 se deplasează în lungul axei x cu viteza v numită *viteza de fază* a undei. Relația (4.27) arată că viteza de fază are două valori egale şi de semn contrar. Prima corespunde undei care se propagă în sensul pozitiv al axei x (*unda directă*) şi are expresia:

$$f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)=f_1\left(t-\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot x\right) \tag{4.29}$$

iar a doua valoare a lui v corespunde undei care se propagă în sensul negativ al axei x (*unda inversă*) şi are expresia :

$$f_1\left(t+\frac{x}{v}\right)=f_1\left(t+\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot x\right) \tag{4.30}$$

Fiecare dintre aceste unde există numai dacă au existat undeva la stânga (sau la dreapta pentru unda inversă) condiții fizice pentru producerea lor (antenă de emisie pentru unda directă, suprafață reflectantă pentru unda inversă etc.).

Unda directă se propagă cu viteza:

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_o\mu_r\mu_o}}=\frac{v_o}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}} \tag{4.31}$$

iar $v_o=c=\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_o\mu_o}}=3\cdot 10^8\ m/s$ este viteza undei în vid.

Unda directă pentru componenta magnetică a undei este:

$$H_z(x,t)=f_1\left(t-\frac{x}{v}\right)=f_1\left(t-x\sqrt{\varepsilon\mu}\right) \tag{4.32}$$

Dacă într-un punct din spațiu H_z are de exemplu o variație sinusoidală, atunci funcția f_1 este de forma:

$$H_z = H_{z\max} \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) - \varphi\right] \tag{4.33}$$

Cunoscând H_z se poate calcula componenta electrică a undei (E_y):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu \dfrac{\partial H_z}{\partial t} \\ \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = -\dfrac{1}{\varepsilon} \cdot \dfrac{\partial H_z}{\partial x} = -\dfrac{1}{\varepsilon}\left(-\dfrac{1}{v} f_1'\right) = \dfrac{1}{\varepsilon v} f_1' \end{cases} \tag{4.34}$$

Integrând ultima expresie se obține:

$$E_y = \frac{1}{\varepsilon v} \int f_1' \cdot dt = \frac{1}{\varepsilon v} f_1 + \text{const} \tag{4.35}$$

Constanta de integrare se poate omite, interesează doar soluțiile variabile în timp (undele). Mărimea:

$$Z = \mu v = \frac{1}{\varepsilon v} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_o \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = \frac{E_y}{H_z} \quad \left[\frac{V/m}{A/m} = \Omega\right] \tag{4.36}$$

este o caracteristică a mediului prin care se propagă unda electromagnetică şi se numeşte *impedanța de undă* a mediului. Valoarea sa în vid este:

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 120\pi = 377\,\Omega \tag{4.37}$$

numită *impedanța de undă a vidului*, o constantă universală.

$$E_y = Z H_z = Z f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \rightarrow f_2\left(t - \frac{x}{v}\right) = Z f_1\left(t - \frac{x}{v}\right) \tag{4.38}$$

Conform cu (4.38) în fiecare punct din spațiu unda electrică (E_y) şi cea magnetică (H_z) *sunt în fază*. (figura 4.5), au forme de variație identice dar sunt situate în plane perpendiculare:

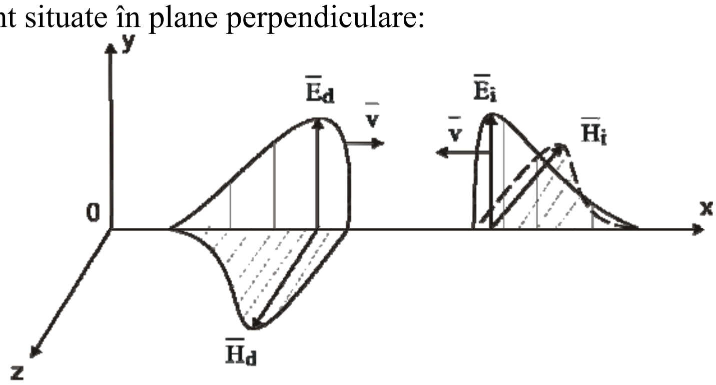

Fig 4.5

La fel ca unda (E_y, H_z) se propagă şi unda (E_z, H_y). Deci există cel mult patru unde electromagentice elementare care compun o undă plană de direcție de propagare Ox dată, care diferă între ele fie prin *sensul de propagare* (unda directă şi unda inversă), fie prin *direcția de polarizare* liniară (E_y, H_z) sau (E_z, H_y). In fiecare dintre ele vectorii $\overline{E}$ şi $\overline{H}$ sunt perpendiculari între ei şi perpendiculari pe direcția de propagare.

Variația în timp a mărimilor $\overline{E}$ şi $\overline{H}$, deci forma funcțiilor f_1 şi f_2, sunt arbitrare, ele depind de condițiile de producere a undei şi de forma mesajului transmis.

4.6 Radiația undelor electromagnetice

La frecvențe înalte câmpul electromagnetic din jurul circuitelor electrice (circuite radiante) apare sub formă de unde electromagnetice, câmpul magnetic $\overline{H}(t)$ *induce* un câmp electric $\left(\mathrm{rot}\,\overline{E} = -\mu\dfrac{\partial\overline{H}}{\partial t}\right)$ iar cel electric $\overline{E}(t)$ va *produce* un câmp magnetic $\left(\mathrm{rot}\,\overline{H} = \varepsilon\dfrac{\partial\overline{E}}{\partial t}\right)$, deci se autogenerează reciproc. Acest câmp se poate desprinde de circuitele care le-au produs şi se propagă sub formă de undă electromagnetică la distanțe mari şi transmit o parte din energia circuitelor; fenomenul este numit *radiația circuitelor*.

4.6.1 Potențiale electrodinamice întârziate (retardate)

Aceste potențiale generalizează noțiunile de potențial magnetic vector $\overline{A}$ şi potențial electric scalar V care se utilizează în cazul câmpurilot staționare şi cvasistaționare.

Astfel, din legea fluxului magnetic rezultă: $\mathrm{div}\,\overline{B} = 0 \rightarrow \overline{B} = \mathrm{rot}\,\overline{A}_e$, iar din legea inducției electromagnetice: $\mathrm{rot}\,\overline{E} = -\dfrac{\partial\overline{B}}{\partial t} \rightarrow \mathrm{rot}\,\overline{E} = -\mathrm{rot}\dfrac{\partial\overline{A}_e}{\partial t}$ $\rightarrow$

$$\rightarrow \quad \mathrm{rot}\left(\overline{E} + \frac{\partial\overline{A}_e}{\partial t}\right) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \overline{E} + \frac{\partial\overline{A}_e}{\partial t} = -\mathrm{grad}\,V_e$$

Deci în regim variabil câmpul electric $\overline{E}$ se scrie sub forma:

$$\overline{E} = -\frac{\partial \overline{A}_e}{\partial t} - \text{grad}\, V_e \tag{4.39}$$

el are o componentă *solenoidală* $\left(-\frac{\partial \overline{A}_e}{\partial t}\right)$ şi una *potențială* (- ∇ V_e).

Pentru a determina ecuațiile pe care le satisfac potențialul electrodinamic vector $\overline{A}_e$ şi potențialul electrodinamic scalar V_e vom pleca de la ecuațiile lui Maxwell:

$$\text{rot}\,\overline{B} = \mu\overline{J} + \varepsilon\mu\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{grad}\left(\text{div}\,\overline{A}_e\right) - \Delta\overline{A}_e = \mu\overline{J} + \varepsilon\mu\left(\frac{-\partial^2 \overline{A}_e}{\partial t^2} - \text{grad}\frac{\partial V_e}{\partial t}\right) \tag{4.40}$$

Ecuația pe care o satisfac cele două potențiale este de forma:

$$\Delta\overline{A}_e - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \overline{A}_e}{\partial t^2} = -\mu\overline{J} + \text{grad}\left(\text{div}\,\overline{A}_e + \varepsilon\mu\frac{\partial V_e}{\partial t}\right) \tag{4.41}$$

Similar putem stabili o altă ecuație pentru cele două funcții $\overline{A}_e$ şi V_e:

$$\text{div}\,\overline{E} = \frac{\rho_v}{\varepsilon} \xrightarrow[(4.39)]{} -\text{div}\frac{\partial \overline{A}_e}{\partial t} - \underbrace{\text{div}\left(\text{grad}\, V_e\right)}_{\Delta V_e} = \frac{\rho_v}{\varepsilon}; \left(\pm\,\varepsilon\mu\frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2}\right) \tag{4.42}$$

$$\Delta V_e - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\overline{A}_e + \varepsilon\mu\frac{\partial V_e}{\partial t}\right) \tag{4.43}$$

In regim variabil (înaltă frecvență) se admite o condiție de etalonare a celor două potențiale- *etalonare Lorentz*- care presupune:

$$\text{div}\,\overline{A}_e + \varepsilon\mu\frac{\partial V_e}{\partial t} = 0 \tag{4.44}$$

spre deosebire de regimul staționar(cvasistaționar) unde se admite pentru potențialul magnetic vector $\overline{A}$ o condiție de etalonare Coulomb, de forma: $\text{div}\,\overline{A} = 0$.

Impunând condiția (4.44), fiecare dintre ecuațiile (4.41) şi (4.43) rămâne o ecuție numai în variabila $\overline{A}_e$ sau numai în V_e de aceeaşi formă:

$$\Delta\overline{A}_e - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \overline{A}_e}{\partial t^2} = -\mu\overline{J} \tag{4.45}$$

$$\Delta V_e - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 V_e}{\partial t^2} = -\frac{\rho_v}{\varepsilon} \tag{4.46}$$

Cele două ecuații poartă numele de *ecuația vectorială neomogenă a undelor* (4.45), respectiv *ecuația scalară neomogenă a undelor* (4.46), ambele sunt de acelaşi tip cu *ecuația undelor* (4.11), care este însă o ecuație omogenă.

In regim staționar sau cvasistaționar $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ ecuațiile (4.45), (4.46) devin ecuații de tip Poisson (Laplace) satisfăcute de $\overline{A}$ şi V în aceste regimuri şi ale căror soluții sunt de forma :

$$\overline{A}(\overline{r})=\frac{\mu}{4\pi}\int_{v_\infty}\frac{\overline{J}(\overline{r}')}{R}dv' \quad ; \quad V(\overline{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v_\infty}\frac{\rho_V(\overline{r}')}{R}dv' \qquad (4.47)$$

în care am utilizat notații cu semnificațiile din figura 4.6.

Soluțiile ecuațiilor (4.45) şi (4.46) sunt similare cu soluțiile (4.47), sub forma:

$$\overline{A}_e(\overline{r},t)=\frac{\mu}{4\pi}\int_{v_\infty}\frac{\overline{J}(\overline{r}',t-\sqrt{\varepsilon\mu}R)}{R}dv' \qquad (4.48)$$

$$V_e(\overline{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{v_\infty}\frac{\rho_V(\overline{r}',t-\sqrt{\varepsilon\mu}R)}{R}dv' \qquad (4.49)$$

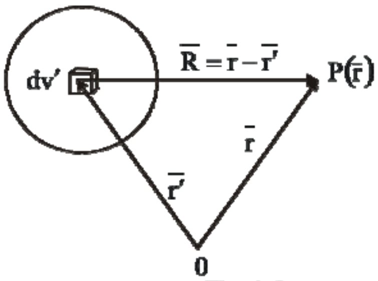

Fig 4.6

Câmpul în punctul $P(\overline{r})$, la momentul t, este determinat de valoarea densității de curent $\overline{J}$ (sau a densității de sarcină ρ_V) la un moment anterior $t'=t-\sqrt{\varepsilon\mu}R=t-\frac{R}{v}=t-\Delta t$, momentului t cu $\Delta t=\frac{R}{v}=\sqrt{\varepsilon\mu}R$. Timpul Δt este timpul necesar ca unda electromagnetică să se propage de la circuitul radiant până în punctul $P(\overline{r})$, pe distanța $R=\left|\overline{R}\right|=\left|\overline{r}-\overline{r}'\right|$ înaintând cu viteza v, viteza *de propagare* a undei prin mediul cu parametrii constitutivi (ε,μ). Timpul Δt este *timpul de întârziere(retardare)* între mărimile de stare ale circuitului radiant şi ale câmpului la distanța R de circuit; motiv pentru care $\overline{A}_e$ şi V_e date de (4.48) şi (4.49) se numesc *potențiale electrodinamice întârziate(retardate).*Aceste expresii ale potențialelor(şi ale câmpului electromagnetic) descriu propagarea câmpului electromagnetic din aproape în aproape, în timp şi în spațiu(prin contiguitate) cu viteză mare, dar finită: $v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

4.6.2 Rezistența de radiație a circuitelor

Puterea activă absorbită de un circuit electric în regim sinusoidal este $P_j = RI_{ef}^2 = RI^2$, unde R este rezistența circuitului radiant.

La frecvențe înalte circuitul radiază unde electromagnetice, deci va transmite putere activă şi prin undele radiate, putere pe care o scriem sub forma: $P_{rad} = R_{rad} I^2$, unde R_{rad} este *rezistența de radiație* a circuitului.

Puterea activă totală absorbită de circuit este : $P = P_j + P_{rad}$.

Dacă circuitul radiant are forma curbei Γ din figura 4.7-a, câmpul magnetic $\overline{B}$ în punctele suprafeței S_Γ va fi defazat în urma curentului $\underline{I}$ din spira Γ din cauza timpului de propagare Δt (datorită retardării dintre $\overline{B}$ şi $\underline{I}$). Deci şi fluxul magnetic printr-o suprafață S_Γ va fi defazat în urma curentului $\underline{I}$ cu unghiul β ca în diagrama fazorială din figura 4.7-b, defazare care creşte odată cu frecvența curentului: $\beta = \beta(\omega)$.

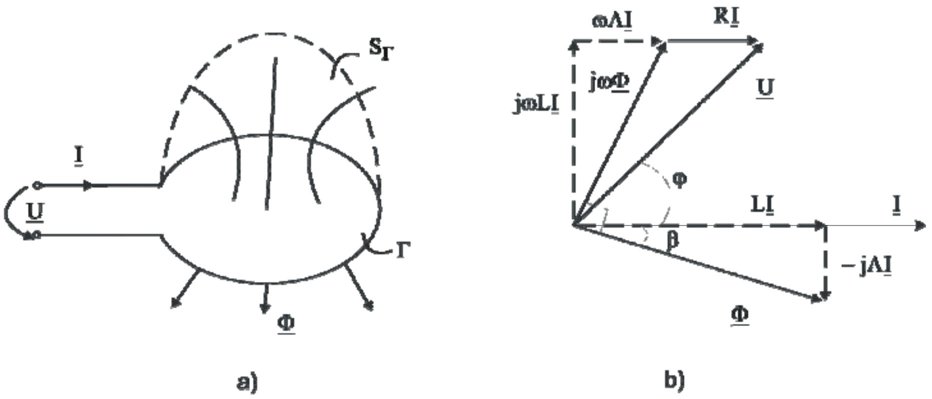

Fig 4.7

Descompunem fluxul $\underline{\Phi}$ în două componente, una în fază cu $\underline{I}$ şi alta în cuadratură cu curentul $\underline{I}$, sub forma:

$$\underline{\Phi} = L\underline{I} - j\Lambda\underline{I} \tag{4.50}$$

Ecuația de tensiuni pentru circuitul radiant este de forma:

$$u = Ri + \frac{d\Phi}{dt} \quad \leftrightarrow \quad \underline{U} = R\underline{I} + j\omega\underline{\Phi} = R\underline{I} + j\omega L\underline{I} + \omega\Lambda\underline{I}$$

respectiv ecuația de tensiuni a unui circuit radiant are expresia:

$$\underline{U} = [(R + \omega\Lambda) + j\omega L] \cdot \underline{I} \tag{4.51}$$

unde: $R_e = R + \omega\Lambda$ - este *rezistența echivalentă* a circuitului radiant;

$\omega\Lambda = R_{rad}$ este *rezistența de radiație* a circuitului iar R este *rezistența proprie* a circuitului, evaluată cu luarea în considerare a efectului pelicular din înaltă frecvență.

$\underline{Z}_e = R_e + j\omega L$ - este *impedanța echivalentă* a circuitului, cea care introduce un defazaj φ între $\underline{U}$ şi $\underline{I}$ ca în figura 4.7-b.

4.7 Aplicație

Dacă se cunoaşte una dintre componentele undei plane şi proprietățile mediului, se poate deduce cealaltă componentă:

1. In medii dielectrice $(\sigma = 0)$ cunoscând $\bar{E} = \bar{j}E$ şi impedanța de undă $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ se poate deduce cealaltă componentă(cea magnetică):

$$\dot{\bar{H}} = \frac{\bar{i} \times \dot{\bar{E}}}{Z} = \bar{k}\dot{H} = \bar{k}\frac{\dot{E}}{Z}$$

2. In medii conductoare $(\sigma \neq 0)$ legătura între cele două componente ale undei este de forma:

$$\dot{\bar{H}} = \frac{|\gamma|}{\mu\omega} e^{j\Omega}\left(\bar{i} \times \dot{\bar{E}}\right) = \bar{k}\frac{\gamma E}{\omega\mu} e^{j\Omega}$$

unde $\underline{\gamma} = \sqrt{j\omega\sigma\mu} = \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}(1 + j)$ este *constanta de propagare* a mediului $(\underline{\gamma} = \alpha + j\beta)$, $\alpha = |\underline{\gamma}|\cos\Omega$ este *constanta de atenuare* iar $\beta = |\underline{\gamma}|\sin\Omega$ este *constanta de defazare* a mediului $\left(\alpha^2 - \beta^2 = \omega^2\varepsilon\mu\right)$.

3. Unda plană având $H_o = 5\,A/m$ trece printr-un mediu cu $\mu_r = 1, \varepsilon_r = 4$. Componenta electrică a undei este:

$$\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = R = 60\pi[\Omega]$$ - rezistența de undă a mediului

$$E = H\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = HZ_o\sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = H \cdot \frac{1}{2} \cdot 120\pi = 300\left[V/m\right]$$

Observație Vectorul $\bar{S} = \bar{E} \times \bar{H}$, numit *vectorul Poynting* indică prin direcția sa care este direcția de propagare a undei iar prin modulul său indică care este densitatea de putere a undei: $[S] = [E] \cdot [H] = \frac{V}{m} \cdot \frac{A}{m} = \frac{W}{m^2}$. Fluxul lui $\bar{S}$ printr-o suprafață este puterea transmisă de undă prin suprafața respectivă.