5. Regimul electrostatic şi magnetostatic

În regim variabil în timp câmpul electric şi magnetic se intercondiționează reciproc alcătuind un câmp electromagnetic.

În regim staționar (curent continuu), mărimile de stare sunt invariabile în timp şi studiul câmpului electric şi magnetic se poate face separat. În acest regim câmpul electric din medii conductoare generează curent electric şi este însoțit de degajare de căldură în mediul conductor.

Un sistem fizic format din corpuri imobile $\left(\overline{v}=0\right)$ încărcate cu sarcini invariabile în timp $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$ creează un *câmp electrostatic*. În *regim electrostatic* mărimile magnetice de stare sunt nule iar mărimile electrice de stare (ale corpurilor şi ale câmpului) sunt invariabile în timp; într-un astfel de regim nu există schimburi de energie între componentele sistemului. Neexistând câmp electrostatic şi nici curent electric în interiorul corpurilor conductoare, nu au loc transformări energetice (dezvoltări de căldură). Practic,un câmp electrostatic este creat de *corpuri imobile încărcate cu sarcini invariabile în timp.* Deci condițiile de regim electrostatic sunt:

$$\frac{\partial}{\partial t}=0; \qquad \overline{v}=0; \qquad \overline{J}=0; \qquad \overline{B}=\overline{H}=0 \tag{5.1}$$

În condițiile (5.1) legile vor avea forme particulare:

-) Din legea inducției electromagnetice, dacă $\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}=0,\ \ \overline{v}=0$ rămâne:

$$\oint_{\Gamma} \overline{E}\,\overline{d\ell}=0 \ \ ; \ \ \text{rot}\,\overline{E}=0 \quad \leftrightarrow \quad \overline{E}=-\text{grad V} \tag{5.2}$$

Expresia (5.2) este *teorema potențialului electrostatic* sub formă integrală, respectiv locală. Mărimea ”V” este *potențialul electrostatic* , câmpul electrostatic $\overline{E}$ este un *câmp potențial* (care poate fi scris ca un gradient), circulația lui pe o curbă Γ închisă este nulă iar între două puncte 1şi 2 circulația nu depinde de drumul de integrare:

$$\int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell}=\int_1^2 -\nabla V\overline{d\ell}=-\int_1^2 dV=V_1-V_2 \tag{5.3}$$

-) Legea fluxului electric are aceeaşi formulare şi în regim electrostatic:

$$\int_{\Sigma} \overline{D}\,\overline{ds}=q_{\Sigma}\ ;\ \text{div}\,\overline{D}=\rho_V\left(\text{sau}\,0\right)\ ;\ \text{div}_s\overline{D}=D_{n_2}-D_{n_1}=\rho_s\left(\text{sau}\,0\right) \tag{5.4}$$

-) Legea legăturii în câmp electric :

$$\overline{D} = \varepsilon_o \overline{E} + \overline{P} \quad ; \quad \left[\ \overline{P}_t = \varepsilon_o \chi_e \overline{E} \quad ; \quad \overline{D} = \varepsilon \overline{E} \ \right] \tag{5.5}$$

Celelalte legi nu prezintă interes în studiul regimului electrostatic .

5.1 Teorema potențialului electrostatic

Deoarece în regim electrostatic mărimile de stare ale câmpului electric şi ale corpurilor sunt invariabile în timp, starea electrostatică a unui sistem fizic (corpuri+câmp) se poate menține fără aport de energie din exterior. Pentru o sarcină punctiformă expresia câmpului electric creat este :

$$\overline{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overline{r}}{r^3} \tag{5.6}$$

Să arătăm că şi în acest caz este verificată expresia teoremei (5.2):

$$\begin{cases} \oint_\Gamma \overline{E}\,\overline{d\ell} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\oint_\Gamma \frac{\overline{r}\,\overline{d\ell}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\oint \frac{r\,dr}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\oint_\Gamma d\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \\ \mathrm{rot}\overline{E} = \nabla \times \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overline{r}}{r^3}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right)\times \overline{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\ \frac{-3}{r^4}\ \left(\frac{\overline{r}}{r}\times \overline{r}\right) = 0 \\ dV = -\overline{E}\overline{dr} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overline{r}\ \overline{dr}}{r^3} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o} d\left(\frac{1}{r}\right) \to V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{1}{r} + C \end{cases} \tag{5.7}$$

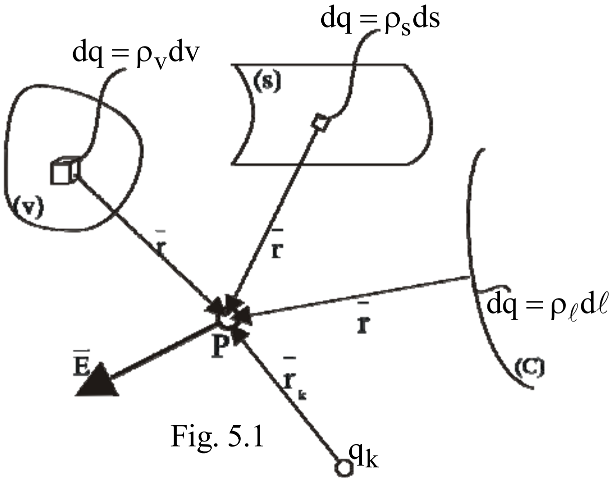


Fig. 5.1

Expresia locală $\mathrm{rot}\overline{E} = 0$ pune în evidență faptul că liniile lui $\overline{E}$ sunt deschise, ele încep pe sarcini (+) şi se termină pe sarcini (–). Expresia (5.7) a potențialului arată că dacă îl calculăm la distanță mare de sarcina punctiformă $(r \to \infty)$ atunci constanta de integrare este $C = V_\infty$.

La infinit depărtare de q câmpul $\overline{E}$ este nul şi admitem că şi $V_\infty = 0\ (C = 0)$ şi în acest caz (sarcina punctiformă) expresia potențialului este:

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} \tag{5.8}$$

Alegerea punctului unde $V = 0$ se numeşte *alegerea originii de potențial* față de care expresia (5.8) rămâne valabilă.

Dacă avem un sistem cu distribuțiile ρ_V, ρ_S, ρ_ℓ şi sarcini punctiforme q_k ca în figura 5.1, atunci câmpul rezultant în punctul P se scrie cu teorema superpoziției (vectoriale) a câmpurilor create de fiecare sarcină în parte (fiecare element dq creează câmp de forma 5.6 : $d\overline{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overline{r}}{r^3}$),

deci:

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_V \frac{\rho_V \overline{r}}{r^3}dv + \int_S \frac{\rho_S \overline{r}}{r^3}ds + \int_C \frac{\rho_\ell \overline{r}}{r^3}d\ell + \sum_1^n \frac{q_k \overline{r}_k}{r_k^3}\right] \tag{5.9}$$

Expresia (5.9) este *expresia generală a câmpului electrostatic* creat de toate distribuțiile de sarcină (numit şi câmp electric *coulombian* , expresia (5.6) se poate stabili pe baza forței de tip coulombian). Punctul P în care calculăm câmpul $\overline{E}$ nu poate fi în interiorul corpurilor încărcate, integralele din (5.9) nu ar mai fi convergente când $r \to 0$. Fiind integrale din funcții vectoriale ele trebuie calculate pe componente.

Dacă pentru o sarcină punctiformă potențialul electrostatic are expresia (5.8), atunci potențialul punctului P din figura 5.1. se obține tot printr-o superpoziție (scalară) a potențialelor create de fiecare sarcină în parte:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[\int_V \frac{\rho_V dv}{r} + \int_S \frac{\rho_S ds}{r} + \int_C \frac{\rho_\ell d\ell}{r} + \sum_1^n \frac{q_k}{r_k}\right] \tag{5.10}$$

Expresia (5.10) este valabilă în raport cu originea de potențial la infinit (deci nici unul dintre corpurile din fig. 5.1 nu este infinit extins pentru a se păstra convenția $V_\infty = 0$). Nici pentru calculul lui V cu (5.10) punctul P nu poate fi decât punct exterior tuturor corpurilor încărcate pentru ca integralele din (5.10) să fie convergente. Toate integralele din (5.10) sunt din funcții scalare, deci mai uşor de calculat ca (5.9), respectiv este mai indicat a se calcula prima dată V cu (5.10) şi apoi $\overline{E} = -\mathrm{grad}\,V$.

5.1.1 Proprietățile potențialului electric V

1. Alegerea originii de potențial:

Dacă se cunoaşte valoarea potențialului într-un punct $P_0(V_{P_o})$, atunci potențialul într-un punct oarecare P va fi:

$$V_P = V_{P_o} - \int_{P_o}^{P} \overline{E}\,\overline{d\ell} \tag{5.11}$$

Potențialul V_P caracterizează câmpul $\overline{E}_P$ în fiecare punct şi se poate determina cu aproximația unei constante V_{P_o} .Dacă se adoptă $V_{P_o} = 0$, atunci punctul P_o este considerat referință (origine de potențial).Alegerea originii de potențial se face în diverse moduri:

– pentru sistem restrâns de corpuri încărcate, originea de potențial se consideră punctul de la infinit, acolo $E_\infty = 0$ şi $V_\infty = 0$

– pentru sisteme practice în care se precizează poziția corpurilor încărcate în raport cu pământul sau cu masa (carcasa aparatului) atunci originea de potențial se consideră pământul (masa)

– pentru probleme teoretice în care apar corpuri încărcate cu dimensiuni infinite (suprafețe încărcate infinit extinse, fire foarte lungi, etc) punctul origine de potențial se adoptă arbitrar şi expresiile calculate pentru V trebuie precizat în raport cu care origine de potențial sunt adevărate.

2. Valențele energetice ale potențialului

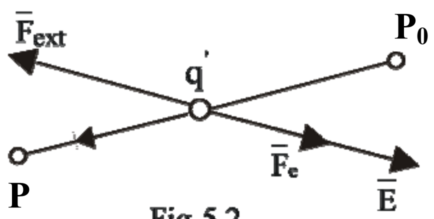


Fig 5.2

Pentru a deplasa o sarcină q' într-un câmp electrostatic $\overline{E}$ din punctul origine de potențial $P_0(V_{P_o} = 0)$ până într-un punct curent P din câmp, trebuie cheltuit un lucru mecanic:

$$L = \int_{P_o}^{P} \overline{F}_{ext}\,\overline{d\ell} = q'\int_{P_o}^{P} -\overline{E}\,\overline{d\ell} = q'V_P \tag{5.12}$$

Deci potențialul punctului P (V_P) este egal numeric cu lucrul mecanic ce ar trebui efectuat de câmp pentru a deplasa unitatea de sarcină ($q' = 1C$) din P în P_0, sau este egal numeric cu lucrul mecanic ce ar trebui efectuat din exterior pentru a deplasa unitatea de sarcină din P_o în P.

Potențialul nu este lucru mecanic, se măsoară în volți nu în jouli, numai este egal numeric cu el. În fiecare punct din câmp potențialul V are o valență energetică, el caracterizează energetic câmpul electrostatic din acel punct. Potențialul V arată care este potența câmpului în acel punct, respectiv capacitatea câmpului de a efectua lucru mecanic.

3. Proprietățile geometrice ale potențialului V

Legătura punctuală dintre câmpul $\overline{E}$ şi potențialul său V:

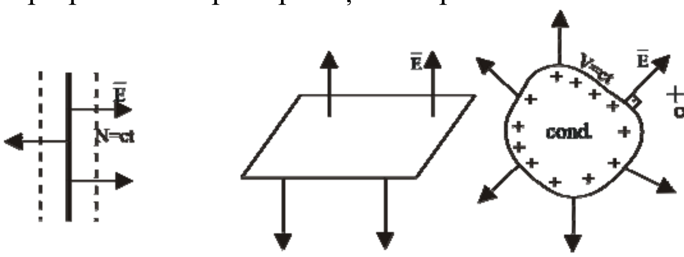
$$dV = -\overline{E}\,\overline{d\ell} \tag{5.13}$$

ne permite să interpretăm geometric această legătură:

- Suprafețele echipotențiale (V=constant, dV=0) înseamnă

$\overline{E}\,\overline{d\ell} = 0$, respectiv $\overline{E} \perp \overline{d\ell}$, liniile câmpului $\overline{E}$ sunt perpendiculare pe suprafețele echipotențiale (în care este conținut $\overline{d\ell}$).Cunoscând liniile (suprafețele) echipotențiale ale unui sistem, se pot trasa liniile de câmp $\overline{E}$ ca fiind normale în orice punct cu suprafețele echipotențiale(figura 5.3).

Punctele unui corp conductor au legătură galvanică între ele, deci se află la acelaşi potențial. Rezultă că liniile câmpului electric întotdeauna ies şi intră perpendicular pe suprafețele corpurilor conductoare încărcate cu sarcină.



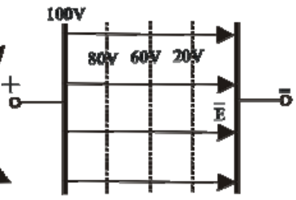


Fig 5.4

Fig 5.3

- În lungul liniilor de câmp electric ($\overline{E} \uparrow\uparrow \overline{d\ell}$) avem:

$$dV = -\overline{E}\,\overline{d\ell} < 0 \tag{5.14}$$

Deci în lungul liniilor lui $\overline{E}$ potențialul V scade sau reciproc, liniile lui $\overline{E}$ sunt orientate dinspre regiunea cu potențial mai ridicat (mai pozitiv) spre cea cu potențial mai scăzut (figura 5.4).

- Fie două suprafețe echipotențiale între care diferența de potențial este de dV=const.

$$dV_{12} = E_1 \cdot \Delta_{12} = dV_{34} = E_2 \cdot \Delta_{34}$$

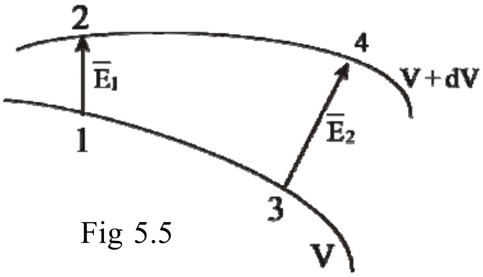


Fig 5.5

Cum în figura 5.5 distanța $\Delta_{12} < \Delta_{34} \quad \Rightarrow \quad E_1 > E_2$
Câmpul electric este mare (intens) acolo unde suprafețele echipotențiale sunt mai apropiate. Dacă facem o analogie între spectrul unui câmp electrostatic (liniile câmpului $\overline{E}$ corelate cu liniile echipotențiale V=const.) şi o problemă de cartografie în care *curbele de nivel* (ce unesc punctele de aceeaşi altitudine) sunt echivalentul *liniilor echipotențiale* (de acelaşi V), atunci corespondența ar fi:

linii echipotențiale $\leftrightarrow$ curbe de nivel
intensitatea câmpului electrostatic $\leftrightarrow$ panta terenului

Acolo unde curbele de nivel sunt apropiate, panta terenului este mare, acolo unde liniile echipotențiale sunt apropiate, intensitatea câmpului electric este mare.

4. *Ecuațiile satisfăcute de funcția V*

Dacă $\overline{E} = -\nabla V = -\text{grad}V$ şi $\text{div}\overline{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon}$ (relația 3.10) atunci :

$$\text{div}\overline{E} = \nabla\overline{E} = \nabla\left(-\nabla V\right) = -\Delta V \quad \to \quad \Delta V = -\frac{\rho_V}{\varepsilon} \tag{5.15}$$

respectiv potențialul electrostatic V este soluția unei ecuații cu derivate parțiale (5.15) *de tip Poisson*, pentru probleme interioare, respectiv în interiorul corpurilor încărcate cu sarcină.
Pe domenii exterioare, în exteriorul corpurilor încărcate ($\rho_V = 0$) rămâne:

$$\Delta V = 0 \tag{5.16}$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul doi, *de tip Laplace.*

Soluția ecuațiilor (5.15) şi (5.16) este univocă dacă sunt precizate *condițiile la limită* pe frontiera Σ a domeniului de câmp v_Σ. Aceste condiții sunt de trei feluri:

- condiții de *speța întâi* (de tip Dirichlet) când se cunoaşte potențialul V pe frontiera domeniului: $V_\Sigma = f_D$. Dacă $V_\Sigma = 0$, avem o condiție Dirichlet omogenă sau $V_\Sigma = \text{const}$, care presupune că frontiera Σ este o suprafață conductoare.

- condiţii de *speţa a doua* (de tip Neumann) când se cunoaşte componenta normală a inducţiei electrice pe frontiera Σ: $\left(D_n\right)_\Sigma = f_N$ sau $\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_\Sigma = \frac{1}{\varepsilon} f_N$, deci derivata după normala exterioară la Σ a potenţialului V, care este componenta normală a câmpului electric : $E_n = \frac{\partial V}{\partial n}$. O condiţie Neumann omogenă $D_n |_\Sigma = 0$ precizează că fluxul electric prin frontiera Σ este nul.
- condiţii de frontieră *mixte* (de tip Robin) când se cunoaşte potenţialul pe o parte Σ_D din frontieră şi componenta $\frac{\partial V}{\partial n}$ pe cealaltă parte Σ_N a frontierei $\left(\Sigma_D \cup \Sigma_N = \Sigma\right)$.

Dacă mediul nu este omogen ($\varepsilon \neq \text{const}$) atunci: $\overline{D} = \varepsilon \overline{E} = \varepsilon(-\nabla V)$
iar: $\text{div}\overline{D} = \rho_V \rightarrow \nabla\left[\varepsilon\left(-\nabla V\right)\right] = \rho_V \rightarrow \varepsilon \Delta V + \text{grad}V \cdot \text{grad}\varepsilon = -\rho_V$ (5.17)

Ecuaţia (5.17) pe care o satisface funcţia V în medii neomogene este o ecuaţie specială de potenţial, căreia i se asociază aceleaşi trei genuri de condiţii la limită. Dacă ε =const (grad ε=0) ecuaţia (5.17) se reduce la (5.15) pentru probleme interioare sau la (5.16) pentru probleme exterioare.

Scrise în coordonate carteziene, respectiv cilindrice, ecuaţia (5.15) devine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-1}{\varepsilon}\rho_V \qquad (\text{sau } 0) \qquad \left(5.15'\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{-1}{\varepsilon}\rho_V \ (\text{sau } 0) \qquad \left(5.15''\right)$$

Funcţia V soluţie a ecuaţiilor precedente este o funcţie continuă în orice punct din spaţiu, chiar şi pentru o discontinuitate $V_{\text{stânga}} = V_{\text{dreapta}}$. Dacă V ar prezenta discontinuităţi (salturi), în acel punct $\overline{E} = -\nabla V$ ar deveni infinit; cum câmpuri electrice infinite nu există, nici potenţiale electrice discontinui nu pot exista.

Potenţialul şi câmpul unui dipol electric

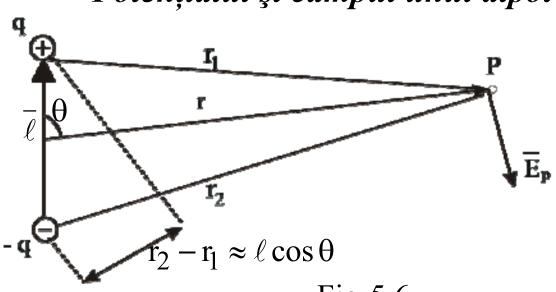


Fig 5.6

Două sarcini ±q aflate la distanţa $\overline{\ell}$ şi pentru care $\overline{p}_d = q\overline{\ell} = \text{const}$ este *momentul dipolului,* formează un dipol electric. Potenţialul punctului P din figura 5.6 este:

$$V_p = V_1 + V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \qquad (5.18)$$

Dacă ținem seama că $\frac{\ell}{r} << 1 \;\rightarrow\; r_2 - r_1 = \ell\cos\theta$ şi $r_1 r_2 = r^2$

$$V_p = \frac{q\ell\cos\theta}{4\pi\varepsilon_o r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\overline{p}\,\overline{r}}{r^3} \qquad (5.19)$$

Se observă că planul median $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ este un plan echipotențial având $V = 0$ şi de asemenea punctele foarte îndepărtate ($r \rightarrow \infty$) sunt tot de potențial nul. Intensitatea câmpului electric în punctul P este:

$$\overline{E} = -\mathrm{grad}V = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\mathrm{grad}\left(\frac{\overline{p}\,\overline{r}}{r^3}\right) \qquad (5.20)$$

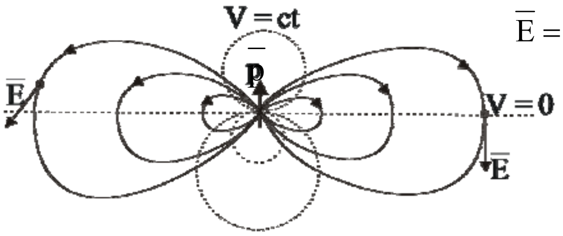


Fig 5.7

$$\begin{cases} \nabla(\overline{p}\;\overline{r}) = \overline{i}\,p_x + \overline{j}\,p_y + \overline{k}\,p_z = \overline{p} \\ \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{-3}{r^4}\frac{\overline{r}}{r} = \frac{-3\,\overline{r}}{r^5} \end{cases}$$

Înlocuind în (5.20)

Se obține expresia câmpului $\overline{E}$

$$\overline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left[3\frac{(\overline{p}\;\overline{r})\;\overline{r}}{r^5} - \frac{\overline{p}}{r^3}\right] \qquad (5.21)$$

Spre deosebire de câmpul unei sarcini punctiforme care scade cu r^2, câmpul unui dipol scade cu r^3, este foarte intens lângă dipol şi nu mai are o simetrie sferică, valoarea sa nu depinde numai de r ci şi de direcția razei vectoare $\overline{r}$. Liniile de câmp electric şi liniile echipotențiale ale unui dipol electric au geometria din figura 5.7.

5.2 Capacități electrice

Un sistem format din două corpuri conductoare omogene, încărcate cu sarcini electrice egale şi de semn contrar ($q_1 = -q_2 = q$) şi separate printr-un dielectric omogen sau neomogen, dar pasiv (neîncărcat cu sarcină $\rho_v = 0$ şi nepolarizat permanent $\overline{P}_p = 0$) formează un *condensator electric*.

Capacitatea electrică a condensatorului este mărimea pozitivă definită ca raportul dintre sarcina unuia dintre conductoare (numit armătură) şi tensiunea dintre armături:

$$C=\frac{q_1}{V_1-V_2}=\frac{q_1}{U_{12}}=\frac{q_2}{U_{21}}=\frac{q}{U}\quad\left[\frac{C}{V}=F\right] \tag{5.22}$$

Practic, cele două conductoare formează un condensator, dacă aplicând o tensiune între armături, ele creează un *câmp electric complet* (toate liniile de câmp ce pleacă de pe o armătură ajung pe cealaltă).

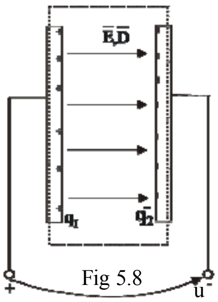


Fig 5.8

Alegem o suprafaţă închisă Σ (figura 5.8) ce trece prin cele două armături (unde $\overline{D}=\varepsilon\overline{E}=0$) şi se închide în exterior astfel încât să nu intersecteze liniile de câmp. Atunci:

$$\Psi_\Sigma=q_\Sigma=0\ \rightarrow\ q_\Sigma=q_1+q_2=0\ \rightarrow\ q_1=-q_2 \tag{5.23}$$

Deci dacă $q_1=-q_2$ condensatorul creează un câmp electric complet.

Capacitatea unui condensator (5.22) este o mărime pozitivă definită ca raportul dintre q şi U dar nu depinde nici de q nici de U (dacă dielectricul este liniar $\varepsilon\neq\varepsilon(E)$) ci depinde de:

- *geometria condensatorului* (forma şi dimensiunea armăturilor,distanţa dintre ele, nu contează materialul şi nici grosimea lor)
- *proprietăţile electrice* ale dielectricului (ε_r). Calculul capacităţii se poate face prin algoritmii prezentaţi în schema din figura 5.8'.

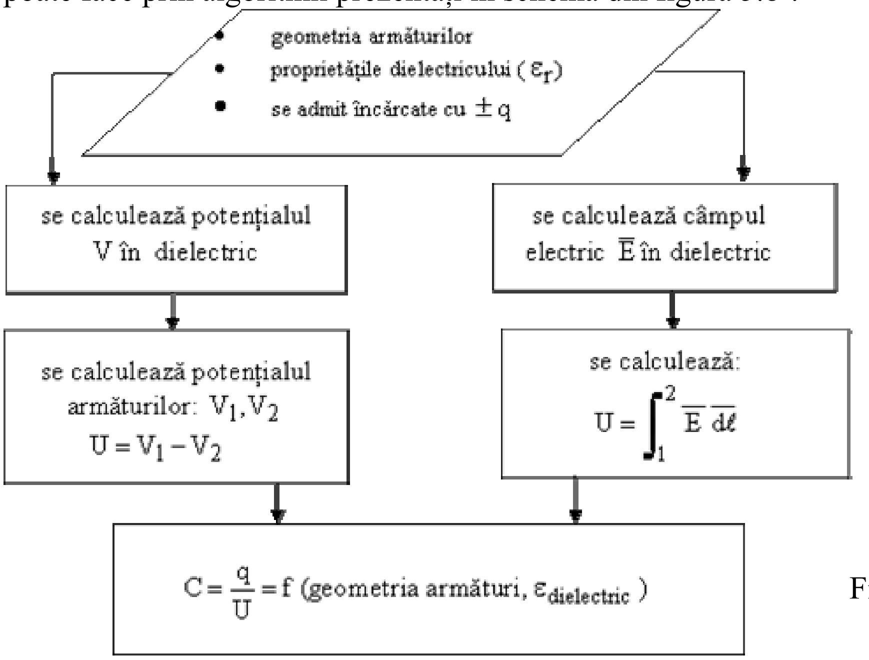


Fig.5.8'

1. *Condensatoul plan*

Dacă distanța între armături este mică şi neglijăm efectul de margine atunci câmpul electric este uniform. Pentru o suprafață închisă Σ având aria cuprinsă în câmp ΔS, aplicăm legea fluxului electric:

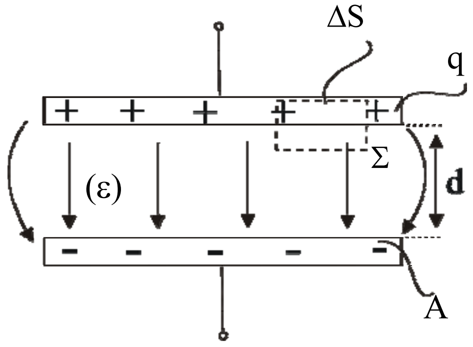


Fig 5.9

$$\psi_\Sigma = \int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds} = \int_\Sigma D ds = D \cdot \Delta S = \Delta q$$

$$D = \frac{\Delta q}{\Delta S} = \rho_s = \frac{q}{A} \quad \rightarrow \quad E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{\rho_s}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon A} \qquad (5.24)$$

Mergând pe algoritmul din dreapta al fig. 5.8 calculăm succesiv:

$$U = \int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell} = Ed = \frac{qd}{\varepsilon A} \quad \rightarrow \quad C = \frac{q}{U} = \frac{\varepsilon A}{d} \qquad (5.25)$$

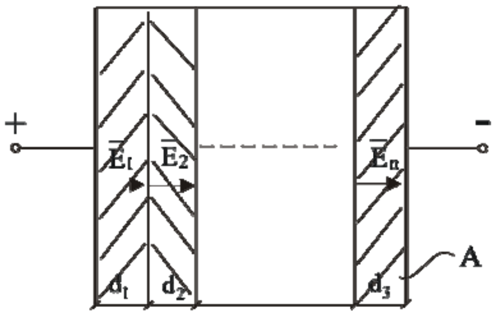


Fig 5.10

Expresia (5.25) rămâne valabilă şi pentru condensatoare cu armături curbe, dacă distanța dintre armături este mică față de raza de curbură a armăturilor.

Dacă condensatorul plan are dielectricul format din mai multe straturi (figura 5.10), la trecerea prin suprafețele de discontinuitate dintre straturi se conservă D_n :

$$D_{n_1} = D_{n_2} = ... = D_{n_n} \quad \rightarrow \quad D_1 = D_2 = ... = D_n = \frac{q}{A} \qquad (5.26)$$

iar intensitățile câmpului sunt:

$$E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_1} = \frac{q}{\varepsilon_1 A}; \quad .... \quad E_n = \frac{D_n}{\varepsilon_n} = \frac{q}{\varepsilon_n A} \qquad (5.27)$$

Tensiunea dintre armături are expresia:

$$U=\int_1^n \overline{E}\,\overline{d\ell}=\int_1^2 \overline{E}_1\,\overline{d\ell}+\int_2^3 \overline{E}_2\,\overline{d\ell}+\ldots+\int_{n-1}^n \overline{E}_n\,\overline{d\ell}=$$

$$=\frac{q}{A}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1}+\frac{d_2}{\varepsilon_2}+\ldots\right)=\frac{q}{A}\sum_1^n\frac{d_k}{\varepsilon_k} \qquad (5.28)$$

$$C=\frac{q}{U}=\frac{A}{\sum\limits_1^n\frac{d_k}{\varepsilon_k}} \qquad (5.29)$$

Expresia (5.29) a capacităţii pune în evidenţă faptul că acest condensator (fig. 5.10) poate fi privit şi ca un ansamblu de n condensatoare legate în serie.

2. ***Condensatorul cilindric***

Armăturile sunt doi cilindrii coaxiali (figura 5.11) de lungime ℓ şi raze r_1 şi r_2 , dielectricul are permitivitate ε. Aplicăm legea fluxului electric pentru suprafaţa cilindrică Σ având $r \in (r_1,r_2)$:

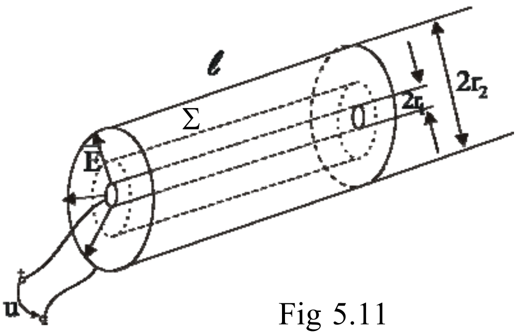


Fig 5.11

$$\psi_\Sigma=\int_\Sigma \overline{D}\,\overline{ds}=D\int_{\Sigma_{lat}} ds=D\cdot 2\pi r\ell=q \qquad (5.30)$$

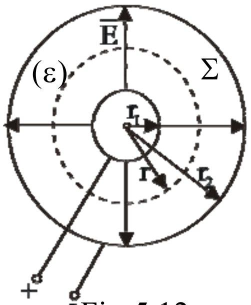
$$D=\frac{q}{2\pi r\ell}=\frac{\rho_\ell}{2\pi r} \quad\rightarrow\quad E=\frac{D}{\varepsilon}=\frac{q}{2\pi\varepsilon r\ell} \quad\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad U=\int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell}=\frac{q}{2\pi\varepsilon\ell}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r}=\frac{q}{2\pi\varepsilon\ell}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (5.31)$$

Capacitatea condensatorului cilindric va avea expresia:

$$C=\frac{q}{A}=\frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{r_2}{r_1}} \qquad (5.32)$$

3. ***Condensatorul sferic***



Armăturile sunt două sfere concentrice cu razele r_1 şi r_2 iar suprafaţa Σ este o sferă intermediară:

$$\psi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \overline{D}\,\overline{ds} = D\int_{\Sigma} ds = D\cdot 4\pi r^2 = q \quad \rightarrow$$

Fig 5.12 → $D = \frac{q}{4\pi r^2} \rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon} \rightarrow u = \int_1^2 \overline{E}\overline{dl} = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$ (5.33)

Capacitatea condensatorului sferic are expresia :

$$C = \frac{q}{u} = 4\pi\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \qquad (5.34)$$

Capacitatea unei sfere de rază r_1 izolată (capacitatea este formată în raport cu infinitul)se obţine din expresia (5.34) dacă $r_2 \rightarrow \infty$:

$$C_{\text{sferă}} = 4\pi\varepsilon r_1 \qquad (5.35)$$

Dacă L este lungimea unei linii de câmp electric dintre cele două armături iar A este aria unei suprafeţe echipotenţiale între armături, atunci elastanţa $S = \frac{1}{C}$ a condensatorului se poate evalua succesiv sub forma:

$$S = \frac{u}{q} = \int_1^2 \frac{\overline{E}\,\overline{d\ell}}{\int_A \overline{D}\,\overline{ds}} = \int_1^2 \frac{E\,d\ell}{\varepsilon E A} = \int_1^2 \frac{d\ell}{\varepsilon A} \qquad (5.36)$$

Capacitatea va avea o expresie reciprocă cu (5.36), de forma:

$$C = \int_A \frac{\varepsilon dA}{\ell} \qquad (5.36)$$

Expresiile (5.35) şi (5.36) permit să extindem *metoda tuburilor şi feliilor* (3.86, 3.88) la calculul capacităţilor şi elastanţelor.

Dacă regiunea dintre armături o împărţim în tuburi de flux electric elementare cu secţiunea ds, luate în lungul liniilor de câmp $\overline{E}$, atunci capacitatea unui tub este:

$$dC_{tub} = \frac{\varepsilon\, dA}{\ell_{tub}} \quad \rightarrow \quad C = \int dC = \int_A \frac{\varepsilon\, dA}{\ell} \qquad (5.37)$$

O felie din dielectric de grosime $d\ell$ luată $\perp$ pe linia de câmp $\overline{E}$ va avea elastanța:

$$dS_{felie} = \frac{d\ell}{\varepsilon A} \quad \rightarrow \quad S = \int_1^2 dS = \int_1^2 \frac{d\ell}{\varepsilon A} \qquad (5.38)$$

Dacă funcția „ℓ" din (5.37) sau A din (5.38) sunt greu de evaluat pentru un dispozitiv cu geometrie neregulată, atunci tuburile şi feliile nu se vor lua infinitezimale, tuburile vor avea secțiunile ΔA_k şi lungimile ℓ_k iar feliile vor avea grosimile $\Delta\ell_k$ şi secțiunile A_k, respectiv:

$$S = \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta\ell_k}{\varepsilon_k A_k} \quad ; \qquad C = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k \Delta A_k}{\ell_k} \qquad (5.39)$$

Aplicații:

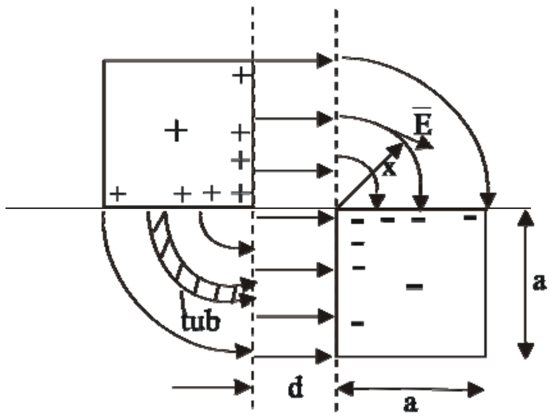


Fig. 5.13

1. Două bare conductoare de lungime ℓ şi secțiune pătratică cu latura „a'' sunt plasate ca în figura 5.13 şi alimentate cu tensiunea continuă U. Să se determine:

a) expresia câmpului electric creat $\overline{E}$

b) expresia densității de sarcină ρ_s pe suprafața barei

c) capacitatea formată de cele două bare

---

a) Aproximăm liniile de câmp electric prin segmente de dreaptă de lungime „d" între planele de bază formate într-o secțiune $\perp$ pe bare

$$U = \int_1^2 \overline{E}\,\overline{d\ell} = E\int_1^2 d\ell = E\left(d + \frac{\pi}{2}x\right) \quad \rightarrow \quad E = \frac{U}{d + \frac{\pi}{2}x} \qquad (5.40)$$

şi prin arce de cerc cu raze x (x ϵ (0,a)). Tensiunea între cele două bare este U indiferent în lungul cărei linii de câmp electric este calculată:

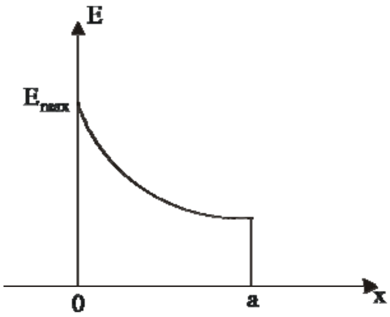


Fig 5.14

Cel mai intens câmp electric se obține pentru $x = 0$ (de fapt acolo unde este cea mai scurtă linie de câmp) .

b) Densitatea sarcinii pe suprafața barelor se obține pe baza relației (3.15) ca fiind:

$$\rho_s = D = \varepsilon_o E = \frac{\varepsilon_o U}{d + \frac{\pi}{2} x} \qquad (5.41)$$

deci maximă acolo unde şi câmpul electric este maxim (x=0).

c) Capacitatea dispozitivului o putem calcula „clasic” :

$$q = \int \rho_s ds = \int_0^a \frac{\varepsilon_o U}{d + \frac{\pi}{2} x} (\ell dx) \; = \; 2 \frac{\varepsilon_o U \ell}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2d}\right) \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad C = \frac{q}{U} = 2 \frac{\varepsilon_o \ell}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2d}\right) \qquad (5.42)$$

sau, considerăm un tub de flux cu secțiunea $ds = \ell dx$ luat în lungimea liniilor de câmp. Capacitatea tubului este :

$$dC_{tub} = \frac{\varepsilon_o ds}{\ell} = \frac{\varepsilon_o (\ell dx)}{d + \frac{\pi}{2} x} \rightarrow C = \int_0^a \frac{\varepsilon_o \ell dx}{d + \frac{\pi}{2} x} = 2 \frac{\varepsilon_o \ell}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2d}\right) \qquad (5.43)$$

Capacitatea totală este formată din două capacități de forma (5.43) şi formate între fețele de sus şi de jos ale dispozitivului din figura 5.13.

$$C_t = 2C = \frac{4\varepsilon_o \ell}{\pi} \ln\left(1 + \frac{\pi a}{2d}\right) \qquad (5.44)$$

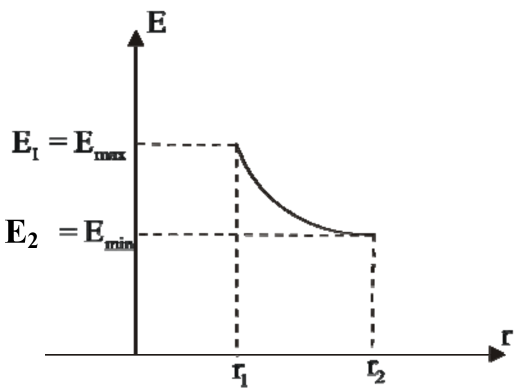


Fig 5.15

2. Un izolator cilindric este realizat din mai multe straturi concentrice separate prin foițe conductoare. Să se determine în ce condiții straturile de izolație vor fi uniform solicitate (acelaşi câmp $\overline{E}$), indiferent de poziția (raza) lor.

Pentru un condensator cilindric capaciatea are expresia (5.32) iar repartiția câmpului electric între armături este:

$$q = CU = \frac{2\pi\varepsilon\ell}{\ln\frac{r_2}{r_1}}U \rightarrow E = \frac{q}{2\pi\varepsilon\ell r} = \frac{U}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\frac{1}{r} \qquad (5.45)$$

Câmpul are valoare maximă lângă armătura interioară ($r = r_1$) şi minimă lângă cea exterioară ($r = r_2$) ca în figura 5.15.

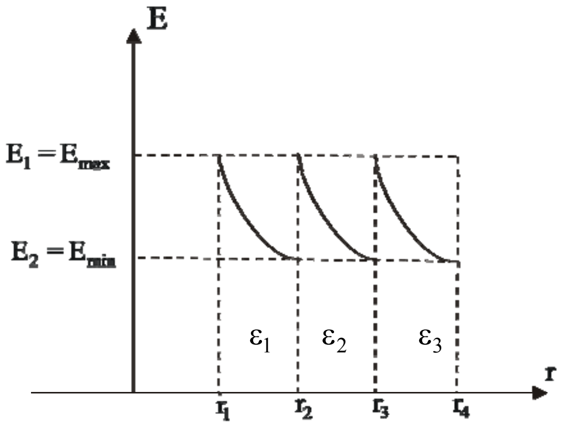


Fig 5.16

Pentru un condensator cilindric cu mai multe straturi se poate realiza solicitarea uniformă a acestor starturi (între aceleaşi limite $E_{max} - E_{min}$) indiferent de poziția straturilor (figura 5.16).

a) dacă toate straturile au aceeaşi lungime $\ell_k = \ell = \text{const}$ atunci:

$$E_k = \frac{q}{2\pi\varepsilon_k\ell_k r_k} = \text{const} \qquad (5.46)$$

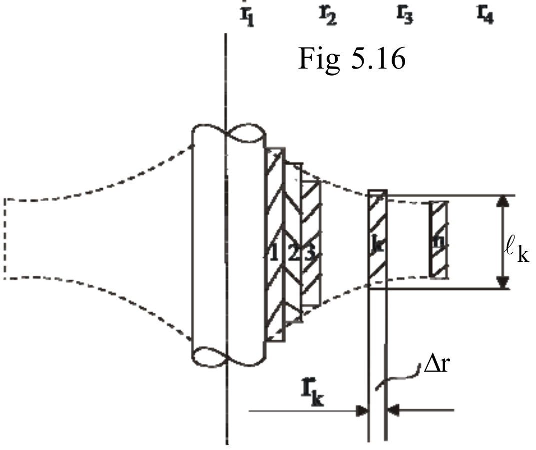


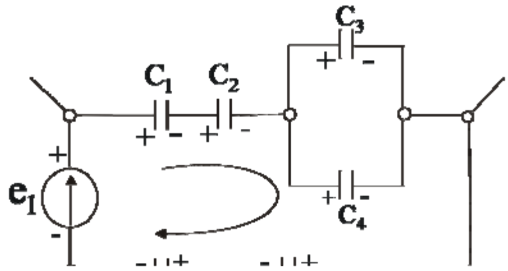
Fig 5.17

şi vom avea solicitare uniformă dacă $\varepsilon_k r_k = \text{const}$, deci straturile de lângă armătura interioară ($r_k = \text{mic}$) să aibă calități izolatoare mari ($\varepsilon_k = \text{mare}$) astfel ca $\varepsilon_k r_k = \text{const}$.

b) dacă însă toate straturile sunt realizate din acelaşi material $\varepsilon_k = \varepsilon = \text{const}$ şi sunt la fel de groase $\Delta r_k = \text{const} = \Delta r$, atunci pentru a realiza condiția $E_k = \text{const}$ în fiecare strat (conform 5.46) trebuie ca: $\ell_k r_k = \text{const}$, respectiv, $\ell_k = \frac{\text{const}}{r_k}$ (5.47)

deci lungimea straturilor trebuie să aibă o variație hiperbolică cu raza acestora ca în figura 5.17.

3. Pentru o rețea oarecare de capacități aflate într-o anumită conexiune (figura 5.18) sarcina acumulată într-un nod este nulă ($q_{nod} = 0$) iar teorema



potențialului electrostatic aplicată pe o curbă închisă Γ va fi:

$$e_\Gamma = \sum_{k \,\varepsilon\, ochi} u_k^{\pm}$$

În nodul (a)se scrie:

$$-q_2 + q_3 + q_4 = 0 \qquad (5.48)$$

Pe ochiul Γ avem:

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_5 + U_6 = e_1 \qquad (5.49)$$

Relații de forma (5.48) se scriu în (n–1) noduri iar de forma (5.49) pe $o = \ell - n + 1$ ochiuri independente. Condensatoarele în serie se încarcă cu aceeaşi sarcină ($q_1 = q_2$, $q_5 = q_6$) iar cele în paralel cu aceeaşi tensiune între armături ($U_3 = U_4$).

5.3 Relațiile lui Maxwell privitoare la capacități

Relațiile lui Maxwell privitoare la capacități (sau Mehrleitersysteme = sisteme cu mai multe conductoare) exprimă relațiile ce există între *sarcinile corpurilor conductoare* şi *potențialele acestora* (când avem un sistem de n corpuri conductoare încărcate şi aflate „în prezență” , respectiv se influențează reciproc) prin intermediul unor mărimi ce depind de geometria sistemului de corpuri şi de proprietățile electrice (ε) ale mediului dielectric ce le separă.

Cu aceste relații se pot determina sarcinile şi potențialele corpurilor din sistem fără a fi necesară cunoaşterea câmpului electric ce se stabileşte între corpuri. Dacă pentru un condensator avem: $q_1 = C(V_1 - V_2)$; $q_2 = C(V_2 - V_1)$, atunci pentru un sistem de n corpuri putem scrie :

$$\begin{cases} V_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \ .... \ + \alpha_{1n}q_n \\ V_2 = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \ .... \ + \alpha_{2n}q_n \\ .... \\ V_n = \alpha_{n1}q_1 + \alpha_{n2}q_2 + \ .... \ + \alpha_{nn}q_n \end{cases} \qquad (5.50)$$

Termenul ($\alpha_{11}q_1$) arată contribuția propriei sarcini la potențialul V_1 şi acest