

6. Regimul magnetic staționar

Câmpul magnetic staționar este câmpul creat de magneți permanenți imobili și de conductoare parcurse de curent continuu (sau de joasă frecvență) aflate în repaus. Studiul câmpului magnetic creat de curenții electrici constituie partea din teoria câmpului numită *electromagnetism*.

Ecuatiile câmpului magnetic staționar (cvasistaționar) derivă din expresiile legilor generale în care impunem restricțiile acestui regim:

$$\text{medii imobile } \vec{v} = 0 ; \text{ mărimi invariabile în timp } \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

$$(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0) \text{ sau în regim cvasistaționar } \frac{\partial}{\partial t} \ll : (\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll).$$

- legea legăturii în câmp magnetic: $\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$ (6.1)

- legea magnetizației temporare: $\vec{M}_t = \chi_m \vec{H}$ (6.2)

- legea fluxului magnetic: $\Phi_\Sigma = \int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0; \text{ div } \vec{B} = 0 \leftrightarrow \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ (6.3)

- legea circuitului magnetic: $\oint_\Gamma \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = I_{s_\Gamma}; \text{ rot } \vec{H} = \vec{J}$ (6.4)

Câmpul magnetic staționar se studiază indirect, se determină potențialul său magnetic vector \vec{A} (etalonat cu o condiție de etalonare de tip Coulomb: $\text{div } \vec{A} = 0$) și în final se revine la câmpul fizic: $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$.

6.1 Potențialul magnetic vector \vec{A} și ecuațiile pe care le satisface

Din legea fluxului magnetic rezultă că $\text{rot } \vec{A} = \vec{B}$ iar din condiția de etalonare a potențialului \vec{A} rezultă că: $\text{div } \vec{A} = 0$, deci \vec{A} este univoc determinat, fiind precizate atât rotorul cât și divergența potențialului magnetic vector \vec{A} .

În medii neomogene ($\mu = \mu(r)$) dar fără magnetizație permanentă $\vec{M}_p = 0$, putem scrie:

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot}(\nu \vec{B}) = \vec{J}; \text{ rot}(\text{rot } \vec{A}) = \text{grad}(\underbrace{\text{div } \vec{A}}_{=0}) - \Delta \vec{A}$$

$$\text{rot}(\nu \text{rot } \vec{A}) = \nu \text{rot}(\text{rot } \vec{A}) + \text{grad } \nu \times \text{rot } \vec{A} = \vec{J}$$

$$\text{Deci: } \Delta \bar{A} - \frac{1}{v} (\nabla v \times \text{rot} \bar{A}) = -\mu \bar{J} \quad (6.5)$$

Ecuția (6.5) este o *ecuație vasioisson vectorială* având asociate condițiile de unicitate corespunzătoare:

- *condiții de material*: în orice punct din domeniu se cunoaște $\mu(r)$ sau $v(r)$.
- *condiții la limită* pe frontiera Σ a domeniului de câmp v_Σ : componenta tangențială a intensității câmpului magnetic \bar{H}_{t_Σ} și a potențialului \bar{A}_{t_Σ} .
- *ecuații de trecere* în jurul discontinuităților: $(A)_1 = (A)_2$.
- *condiții de surse*: distribuția curentului de conducție \bar{J} în v_Σ și a mărimilor \bar{M}_p, \bar{J}_s pe suprafețele de discontinuitate S_{12} .

În subdomenii de omogenitate ($v = \text{ct} \rightarrow \text{grad } v = 0$) ecuația (6.5) devine:

$$\Delta \bar{A} = -\mu \bar{J} \quad (6.6)$$

care este o *ecuație Poisson vectorială* a cărei soluție este potențialul \bar{A} din domenii interioare distribuțiilor de curent \bar{J} .

Pentru domenii din exteriorul conductoarelor parcurse de curent ($\bar{J} = 0$) rămâne:

$$\Delta \bar{A} = 0 \quad (6.7)$$

care este o *ecuație Laplace vectorială*. Condițiile la limită asociate ecuațiilor (6.6) și (6.7) pot fi:

- condiții Dirichlet: componenta tangențială a lui A : $A_{t_\Sigma} = f_D$ (sau 0); pentru zero este o condiție la limită *omogenă*.
- condiții Neumann: $\left. \frac{\partial A}{\partial n} \right|_\Sigma = \mu f_N$ (sau 0).

Ecuția Poisson vectorială (6.6) dacă o raportăm la un sistem cartezian de axe se poate descompune în trei ecuații Poisson scalare:

$$\Delta A_x = -\mu J_x; \quad \Delta A_y = -\mu J_y; \quad \Delta A_z = -\mu J_z \quad (6.8)$$

Dacă avem un câmp magnetic staționar în domeniu plan (xOy), atunci ecuațiile liniilor de câmp \bar{B} sunt aceleași cu ecuațiile $A(x,y)=\text{ct}$.

Soluțiile celor trei ecuații (6.8) pentru întregul spațiu v_∞ se determină din problema interioară prin extinderea la infinit a suprafeței Σ , sursele câmpului magnetic sunt numai curenții electrici de conducție, iar

densitățile au astfel de variații în spațiu încât asigură convergența integralelor de volum:

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v_\infty} \frac{J_x(\bar{r}')}{R} dv'; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v_\infty} \frac{J_y(\bar{r}')}{R} dv'; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v_\infty} \frac{J_z(\bar{r}')}{R} dv' \quad (6.9)$$

Expresii care pot fi reunite sub forma:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{v_\infty} \frac{\bar{J}(\bar{r}')}{R} dv' \quad (6.10)$$

care reprezintă soluția ecuației Poisson (6.6) vectoriale. Integrala din (6.10) se poate restrânge doar la volumul conductorului parcurs de curent unde de fapt $\bar{J} \neq 0$.

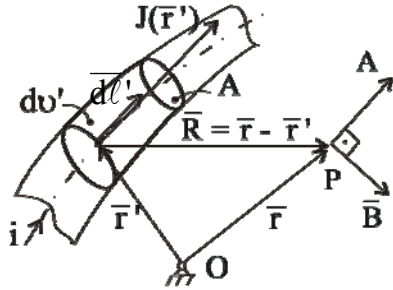


Fig 6.1

Dacă conductorul parcurs de curent este filiform ($\bar{J} \parallel \bar{A} \parallel d\bar{\ell}'$; $dv' = A d\bar{\ell}'$; $\bar{J} dv' = J A d\bar{\ell}' = i d\bar{\ell}'$) cu notațiile din figura 6.1, atunci expresia potențialului \bar{A} creat de curentul i concentrat în axa Γ a firului parcurs de curentul i devine de forma:

$$\bar{A} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\bar{\ell}'}{R} \quad (6.11)$$

Dacă firul este de dimensiuni infinite, în (6.10) nu se mai poate admite că la ∞ potențialul și câmpul sunt nule ($\bar{A} = 0$) iar integrala din (6.10) devine improprie.

În general, când sursele câmpului sunt nu numai distribuții de volum ale curenților (\bar{J}) ci și pânze de curent (\bar{J}_s) sau fire subțiri parcurse de curenții i_k , soluția pentru potențialul magnetic vector este de forma generală:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \left[\int_{v_\infty} \frac{\bar{J}}{R} dv' + \int_S \frac{\bar{J}_s}{R} ds' + \sum_{k=1}^n i_k \oint_{\Gamma_k} \frac{d\bar{\ell}'}{R} \right] \quad (6.12)$$

Cunoscând expresia lui \bar{A} pentru un conductor filiform plasat în mediu omogen ($\mu = \text{ct}$), putem determina expresia inducției magnetice \bar{B} :

$$\bar{B} = \text{rot} \bar{A} = \text{rot} \left[\frac{\mu i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\bar{\ell}'}{R} \right] \quad (6.13)$$

$$\text{rot} \frac{d\bar{\ell}'}{R} = \nabla \times \frac{d\bar{\ell}'}{R} = \nabla \left(\frac{1}{R} \right) \times d\bar{\ell}' = -\frac{\bar{R}}{R^3} \times d\bar{\ell}' = \frac{d\bar{\ell}' \times \bar{R}}{R^3}$$

$$\bar{B}_{\text{fir}} = \frac{\mu i}{4\pi} \oint_{\Gamma} \frac{d\bar{\ell}' \times \bar{R}}{R^3} \quad (6.14)$$

Expresia (6.14) este cunoscută și sub numele de *teorema lui Biot-Savart-Laplace*.

Dacă conductorul parcurs de curent nu este filiform, soluția (6.14) rămâne de forma:

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_{\text{cond}}} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{R}}{R^3} dV' \quad (6.15)$$

Observație:

În medii omogene ($\mu = \text{ct}$) și fără densitate de curent ($\vec{J} = 0$), respectiv studiem câmpul magnetic din exteriorul conductoarelor parcurse de curenți, ecuația satisfăcută de \vec{A} este o ecuație Laplace de forma (6.7). Tot în acest caz se poate scrie:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \vec{H} = \vec{J} = 0 &\rightarrow \vec{H} = -\nabla V_H = -\text{grad} V_H \\ \text{div } \vec{B} = \text{div}(\mu \vec{H}) = 0 &\rightarrow \text{div} \vec{H} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta V_H = 0 \quad (6.16)$$

unde V_H este *potențialul magnetic scalar* al câmpului \vec{H} . În astfel de probleme sau se integrează ecuația vectorială (6.7) sau cea scalară (6.16), fiecare în condiții la limită date. În final, fie $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, fie $\vec{H} = -\text{grad} V_H$.

Aplicații:

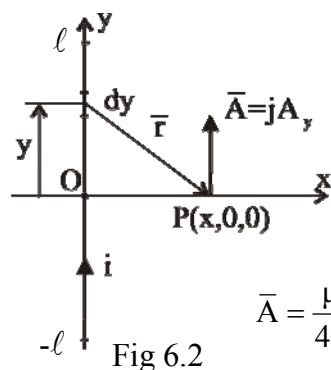


Fig 6.2

1) Să se determine potențialul vector \vec{A} creat de un conductor rectiliniu parcurs de curentul i , respectiv de către două conductoare paralele parcurse de curentul i în sensuri opuse.

Potențialul vector \vec{A} de forma (6.14) sau (6.15) nu are decât componenta A_y :

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{V_{\text{cond}}} \frac{\vec{J}}{r} dV \rightarrow A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{i}{r} dy = \frac{2\mu i}{4\pi} \int_0^{\ell} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (6.17)$$

$$A_y = \frac{\mu i}{2\pi} \left[\ln(\ell + \sqrt{x^2 + y^2}) - \ln x \right] \quad (6.18)$$

Dacă conductorul are lungime mare ($\ell \gg x$), atunci expresia (6.18) devine:

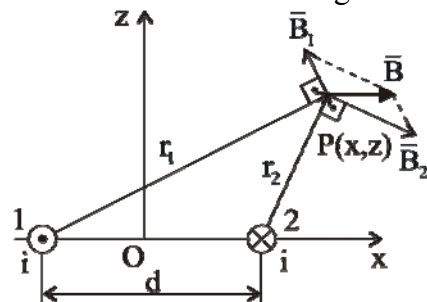


Fig 6.3

$$A_y \cong \frac{\mu i}{2\pi} (\ln 2\ell - \ln x) = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{2\ell}{x} \quad (6.19)$$

Pentru două fire paralele parcurse de curentul i ca în figura 6.3 vom avea:

$$A_y = \frac{\mu i}{2\pi} \left(\ln \frac{2\ell}{r_1} - \ln \frac{2\ell}{r_2} \right) = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.20)$$

unde:

$$\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + z^2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{x + \frac{d}{2}}{r_1^2} \\ \frac{\partial r_1}{\partial z} = \frac{z}{r_1^2} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} r_2 = \sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + z^2} \\ \frac{\partial r_2}{\partial x} = \frac{x - \frac{d}{2}}{r_2^2} \\ \frac{\partial r_2}{\partial z} = \frac{z}{r_2^2} \end{array} \right. ;$$

Componentele inducției magnetice într-un punct curent P(x,z) ca în figura 6.3 sunt:

$$\left\{ \begin{array}{l} B_x = \text{rot}_x \bar{A} = \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\frac{\mu i}{2\pi} \left(\frac{z}{r_1^2} - \frac{z}{r_2^2} \right) = f_1(x,z) \\ B_y = \text{rot}_y \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\mu i}{2\pi} \left[\frac{x + \frac{d}{2}}{r_1^2} - \frac{x - \frac{d}{2}}{r_2^2} \right] = f_2(x,z) \\ \bar{B} = B_x \bar{i} + B_y \bar{j} \end{array} \right. \quad (6.21)$$

2) Să se determine expresia potențialului \bar{A} creat de un conductor tubular cu raza interioară a și exterioară b, parcurs uniform de curentul i.

Conductorul orientat în lungul axei Oz va avea densitatea de curent: $J_z = \frac{i}{\pi(b^2 - a^2)}$, iar potențialul $\bar{A} = A_z \bar{k}$ are doar componenta A_z soluție a ecuației Poisson: $\Delta A_z = -\mu_0 J_z$, care în coordonate cilindrice devine:

$$\Delta A_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dA_z}{dr} \right) \rightarrow \rightarrow \frac{dA_z}{dr} = \frac{-1}{2} \mu_0 J_z r + \frac{C_1}{r} \rightarrow A_z = \frac{-1}{4} \mu_0 J_z r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (6.22)$$

Admitem că $A_z=0$ pentru $r=a$ și în acest caz:

$$C_2 = -\frac{1}{4} \mu_0 J_z a^2 - C_1 \ln a \rightarrow A_z = \frac{1}{4} \mu_0 J_z (r^2 - a^2) + C_1 \ln \frac{r}{a} \quad (6.23)$$

Din compunerea celor două expresii pentru potențialul \bar{A} și câmpul \bar{B} , rezultă:

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_\varphi = \nabla \times \bar{A} &= -\frac{dA_z}{dr} \bar{u}_\varphi = \left(-\frac{1}{2} \mu_0 J_z r + \frac{C_1}{r} \right) \bar{u}_\varphi \\ \bar{B}_\varphi &= \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \bar{u}_\varphi = \frac{\mu_0 J_z}{2\pi r} \pi (r^2 - a^2) \bar{u}_\varphi \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \mu_0 J_z (2r^2 - a^2)$$

Expresia finală a potențialului magnetic vector va fi de forma:

$$A_z = \frac{1}{4} \mu_0 J_z r^2 + \frac{1}{2} \mu_0 J_z (2r^2 - a^2) \ln \frac{r}{a} - \frac{1}{4} \mu_0 J_z a^2 - C_1 \ln a \quad (6.24)$$

6.2 Potențialul magnetic \bar{A} și câmpul \bar{B} creat de fire rectilinii parcurse de curent

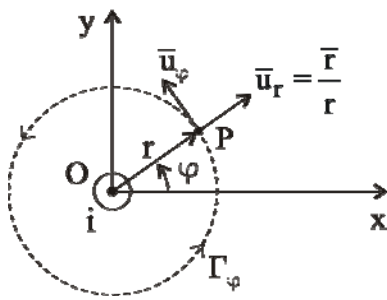


Fig 6.4

Considerăm un fir rectiliniu lung dirijat după axa Oz parcurs de curentul i .

Față de un sistem cilindric de coordonate (figura 6.4) vectorul \bar{A} este paralel cu \bar{J} , respectiv cu firul, va avea doar componenta $\bar{A} = A_z \bar{u}_z = A \bar{u}_z$. Liniile câmpului \bar{B} fiind \perp pe \bar{A} vor fi cercuri conținute în planul xOy (câmp plan-paralel).

$$\Delta \bar{A} = 0 \rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial A}{\partial r} \right) = 0 \rightarrow r \frac{\partial A}{\partial r} = C_1 \rightarrow A = C_1 \ln r + C_2$$

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{B} = \text{rot} \bar{A} = \nabla \times (A \bar{u}_z) &= -\bar{u}_z \times \nabla A = -\bar{u}_z \times \bar{u}_r \frac{C_1}{r} = -\frac{C_1}{r} \bar{u}_\varphi \\ \bar{B} &= \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \bar{u}_\varphi \end{aligned} \right. \Rightarrow C_1 = -\frac{\mu_0 i}{2\pi}$$

Considerăm originea de potențial arbitrară: $A=0$ pentru $r=r_0 \rightarrow$

$C_2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln r_0$, respectiv:

$$\bar{A} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r} \quad (6.25)$$

Se observă că liniile de câmp sunt cercuri având $r=ct$, ceea ce implică $A=\text{cst}$, ecuația liniilor de câmp \bar{B} corespunde ecuației $A(r) = \text{cst}$.

Observație:

Expresia 6.25 pentru potențialul \bar{A} creat de un fir parcurs de curentul i este asemănătoare cu cea a potențialului electric V creat de același fir încărcat cu ρ_ℓ (originea de potențial V este la distanța r_0 de fir):

$$V = \frac{\rho_\ell}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} \quad (6.26)$$

Asemănarea celor două soluții provine din faptul că cele două potențiale satisfac ecuații Poisson asemănătoare și au aceeași geometrie:

$$\Delta \bar{A} = -\mu_0 \bar{J} \quad ; \quad \Delta V = \frac{\rho_v}{\epsilon} \quad (6.27)$$

Pentru o linie bifilară potențialul \bar{A} are expresia:

$$\bar{A} = k \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Locul geometric al punctelor $A = \text{cst} \Leftrightarrow \ln \frac{r_2}{r_1} = \text{cst}$, respectiv o familie de cercuri de tip Apollonius, care vor fi liniile câmpului magnetic \bar{B} creat de cele două fire ale liniei.

Pentru un conductor cilindric de rază a , parcurs de curentul i , soluția este de forma (6.22) valabilă atât în interiorul cât și în exteriorul conductorului.

$$\begin{cases} \text{pt. interior: } r \in (0, a); J \neq 0 \rightarrow A_i = -\frac{1}{4} \mu_0 J r^2 + C_1 \ln r + C_2 \\ \text{pt. exterior: } r > a; J = 0 \rightarrow A_e = C'_1 \ln r + C'_2 \end{cases} \quad (6.28)$$

În centrul conductorului ($r = 0$) potențialul A_i este finit, deci $C_1 = 0$ și cum în centrul conductorului $B_i = 0$ admitem că și $A_i = 0$; deci pentru $r = 0 \rightarrow C_2 = 0$,

respectiv în interior:

$$A_i = -\frac{1}{4} \mu_0 J r^2 \rightarrow B_i = -\frac{dA_i}{dr} = \frac{1}{2} \mu_0 J r; \quad \bar{B}_i = B_i \bar{u}_\varphi \quad (6.29)$$

Deci pentru un conductor de rază a , originea lui \bar{A} este pe axă, spre deosebire de firul fără grosime la care originea se alege arbitrar la $r=r_0$ sau $r_0 = 1 \text{ m}$.

Pe domeniul exterior se poate scrie:

$$\bar{B}_e = \text{rot}_\varphi \bar{A}_e = -\frac{dA_e}{dr} \bar{u}_\varphi = -\frac{C'_1}{r} \bar{u}_\varphi \quad (6.30)$$

Din continuitatea potențialului și câmpului pe suprafața de separație ($r=a$) se deduc constantele de integrare (\bar{A} , la fel ca V , trebuie să fie funcție continuă, altfel $\bar{B} = \text{rot}\bar{A}$ va fi infinit în punctele sale de discontinuitate).

$$\begin{aligned} (A_e)_{r=a} &= (A_i)_{r=a} \leftrightarrow -\frac{1}{4}\mu_o \left(\frac{i}{\pi a^2} \right) a^2 = C_1' \ln a + C_2' = -\frac{\mu_o i}{4\pi} \\ (B_e)_{r=a} &= (B_i)_{r=a} \leftrightarrow \frac{\mu_o i}{2\pi a} = -\frac{C_1'}{a} \\ C_1' &= -\frac{\mu_o i}{2\pi} ; C_2' = \frac{\mu_o i}{2\pi} \left(\ln a - \frac{1}{2} \right) \rightarrow A_e = \frac{\mu_o i}{2\pi} \left(\ln \frac{a}{r} - \frac{1}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.31)$$

iar dacă conductorul are $\mu \neq \mu_o$ atunci:

$$A_e = \frac{i}{2\pi} \left(\mu_o \ln \frac{a}{r} - \frac{\mu}{2} \right) \quad (6.32)$$

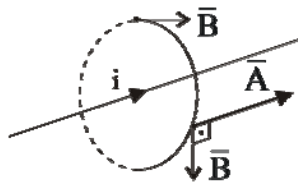


Fig 6.6

Dacă în (6.25) admitem că $r_o = 1$ m, atunci:

$$A = \frac{\mu i}{2\pi} \ln \frac{1}{r} \quad (6.33)$$

iar ca vector potențialul \bar{A} este paralel cu firul (figura 6.6).

6.3. Metoda imaginilor magnetice

Presupunem o spirală Γ parcursă de curentul i situată într-un mediu heterogen format din două subdomenii de permeabilități μ_1 și μ_2 separate prin planul xOy ca în figura 6.7.

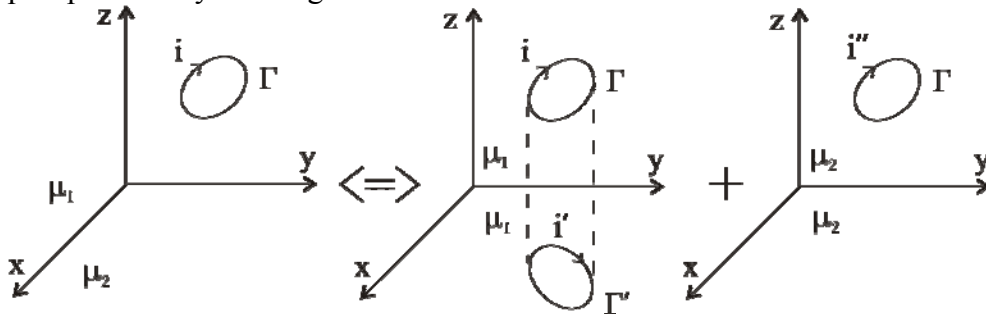


Fig 6.7

Problema „neomogenă” o descompunem în două subprobleme omogene. Presupunem mediul cu μ_1 infinit extins în care alături de spira Γ parcursă de i va mai acționa spira Γ' (imaginea lui Γ în raport cu planul

xOy) care va produce în semispațiul superior ($z>0$) un potențial \bar{A}'_i asemănător cum Γ produce \bar{A}_i în semispațiul inferior ($z<0$).

$$\bar{A}'_i(x,y,z) = \frac{i'}{i} \bar{A}_i(x,y,-z) \quad (6.34)$$

Notăm $\frac{i'}{i} = a$ și $\bar{A}_1 = \bar{A}_i + \bar{A}'_i$ potențialul magnetic în prima subproblemă unde acționează i și i' și ale cărei componente sunt:

$$\begin{cases} A_{1x} = A_{ix} + aA_{ix} = (1+a)A_{ix} \\ A_{1y} = A_{iy} + aA_{iy} = (1+a)A_{iy} \\ A_{1z} = A_{iz} - aA_{iz} = (1-a)A_{iz} \end{cases} \quad (6.35)$$

În a doua subproblemă din figura 6.7 am extins peste tot mediul cu μ_2 iar prin curba Γ trece curentul imagine i'' . Prin analogie cu cazul precedent, potențialul magnetic vector creat de i'' în semispațiul inferior ($z<0$), este de forma:

$$\bar{A}_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{i''}{i} \bar{A}_i = b \frac{\mu_2}{\mu_1} \bar{A}_i \quad (6.36)$$

Valorile lui a și b se determină din condițiile de continuitate pe suprafața S_{12} ($z=0$):

$$\begin{cases} B_{n_1} = B_{n_2} \rightarrow B_{1z} = B_{2z} \\ H_{t_1} = H_{t_2} \rightarrow \begin{cases} H_{1x} = H_{2x} \leftrightarrow \frac{B_{1x}}{\mu_1} = \frac{B_{2x}}{\mu_2} \\ H_{1y} = H_{2y} \leftrightarrow \frac{B_{1y}}{\mu_1} = \frac{B_{2y}}{\mu_2} \end{cases} \end{cases} \quad (6.37)$$

Dar cum $\bar{B} = \text{rot} \bar{A}$ rezultă:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} ; B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} ; B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (6.38)$$

Atunci din prima condiție (6.37) rezultă:

$$(1+a) \left(\frac{\partial A_{iy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{ix}}{\partial y} \right) = \frac{\mu_2}{\mu_1} b \left(\frac{\partial A_{iy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{ix}}{\partial y} \right) \rightarrow 1+a = \frac{\mu_2}{\mu_1} b$$

iar din ultimele două ecuații (6.37) rezultă: $1-a = b$, respectiv:

$$a = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} ; b = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \quad (6.39)$$

Cunoscând a și b , se pot determina curenții imagine: $i' = ai$; $i'' = bi$.

Un caz particular este atunci când S_{12} separă un mediu feromagnetic nesaturat ($\mu_2 = \mu_{Fe} \approx \infty$) față de aer (vid) cu $\mu_1 = \mu_0$ iar spira Γ este un fir paralel cu suprafața feromagnetului. În acest caz: $a = 1$; $b = 0$, respectiv $i' = i$ (cei doi curenți au aceeași valoare și sens) iar $i'' = 0$.

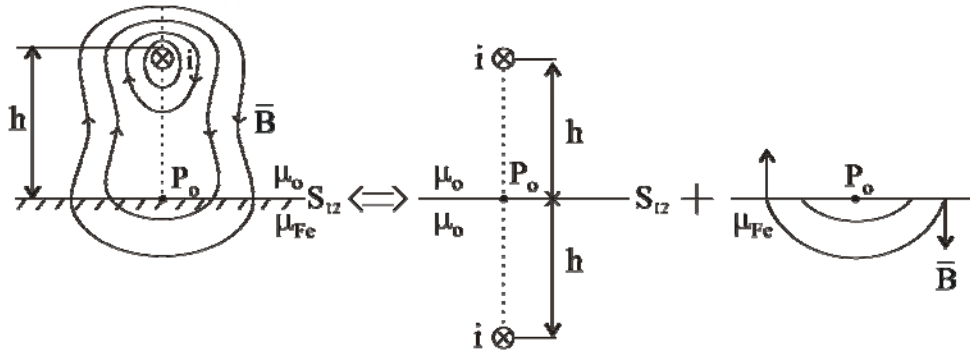


Fig 6.8

În prima subproblemă din figura 6.8 cei doi curenți identici i așezați în mediu omogen cu μ_0 creează potențialul vector:

$$\bar{A}_1 = \bar{k} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \left(\ln \frac{h}{r_1} + \ln \frac{h}{r_2} \right) = \bar{k} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln \frac{h^2}{r_1 r_2} \quad (6.40)$$

dacă am considerat originea de potențial în punctul P_o din figura 6.8.

În a doua subproblemă presupunem că $\mu_2 \gg$ (dar mediul este liniar):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \bar{B}_2 &= 0 \\ \operatorname{rot} \bar{B}_2 &= \operatorname{rot} (\mu_2 \bar{H}_2) = \mu_2 \underbrace{\operatorname{rot} \bar{H}_2}_{\bar{J}_2=0} + \underbrace{\nabla \mu_2}_{=0} \times \bar{H}_2 = 0 \rightarrow \bar{B}_2 = -\nabla V_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta V_2 = 0 \quad (6.41)$$

în mediul cu μ_2 câmpul \bar{B}_2 este Laplacian, liniile sale sunt cercuri cu centrul în P_o , ele sunt \perp pe suprafața S_{12} care este o suprafață echipotențială.

Suprapunând câmpul din cele două subprobleme rezultă câmpul așa cum este desenat în problema inițială din figura 6.8.

Dacă interesează doar câmpul \bar{H} , atunci în mediul cu $\mu_2 \gg$ $\rightarrow H_2 \approx 0$ și nu există decât prima subproblemă respectiv $\bar{H} = \bar{H}_1$ ca în figura 6.9.

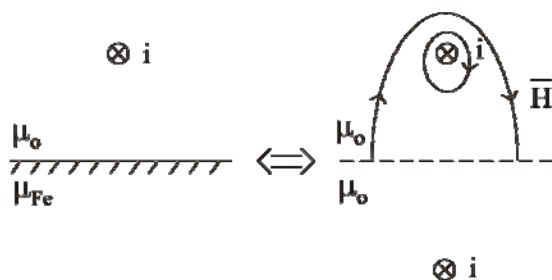


Fig 6.9

6.4 Circuite magnetice

Un *circuit magnetic* este un ansamblu de piese feromagnetice (cu $\mu_r \gg 1$), eventual separate prin porțiuni de aer, care servesc la închiderea liniilor de flux magnetic. Liniile lui \vec{B} sunt conduse prin corpuri feromagnetice (tangente la fața interioară a corpului) la fel cum trec liniile lui \vec{J} prin piese conductoare.

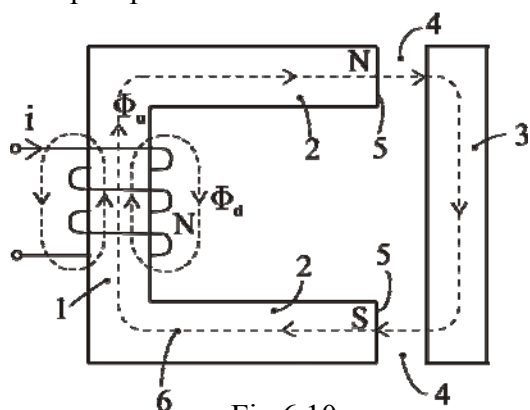


Fig 6.10

Pentru circuitul magnetic din figura 6.10 se definesc noțiunile:

1. *coloană* – partea din circuitul magnetic pe care este așezată bobina cu N spire.
2. *jug magnetic* – partea de circuit magnetic nebobinată, care servește numai pentru a ușura închiderea liniilor de flux magnetic.
3. *armătură* – o parte din jugul magnetic care se poate mișca.
4. *întrefieruri* – porțiuni cu aer care separă porțiuni cu fier.
5. *poli* – fețele miezului care mărginesc întrefierul: pol nord (N) acolo unde liniile de câmp ies din miez în aer și pol sud (S) acolo unde liniile intră în miez.
6. *linia mijlocie de flux* – fluxul magnetic creat de bobina cu N spire parcurse de curentul i are două componente: $\Phi = \Phi_u + \Phi_d$; *fluxul util* Φ_u se închide de-a lungul întregului circuit magnetic și dacă miezul este filiform, el este uniform repartizat pe secțiunea miezului și-l putem considera concentrat în *linia mijlocie de flux* (axa geometrică a miezului). Cealaltă componentă Φ_d - *fluxul magnetic de dispersie* se închide doar în jurul bobinei și nu se ia în considerare la studiul circuitelor magnetice.

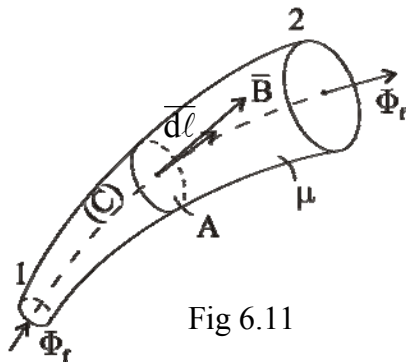


Fig 6.11

În figura 6.11 este reprezentat un *tub de flux magnetic* dintr-un circuit magnetic de permeabilitate μ , parcurs de fluxul fascicular Φ_f uniform repartizat pe secțiunea A și concentrat în axa tubului (curba C) respectiv: $\vec{H} \parallel \vec{B} \parallel d\vec{\ell}$. *Tensiunea magnetică* între capetele 1 și 2 ale tubului este:

$$U_m = \int_{1(C)}^2 \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_1^2 H d\ell = \int_1^2 \frac{B}{\mu} d\ell = \int_1^2 \frac{\Phi_f}{\mu A} d\ell = \Phi_f \int_1^2 \frac{d\ell}{\mu A} = R_m \Phi_f \quad (6.42)$$

Mărima $R_{m_{12}} = \int_1^2 \frac{d\ell}{\mu A}$ este *reluctanța* (rezistența magnetică) a tubului de flux iar dacă materialul este liniar, (6.42) se scrie sub forma:

$$U_m = R_m \Phi_f \quad (6.43)$$

numită *legea lui Ohm* pentru o porțiune de circuit magnetic, analoagă cu forma $u = Ri$ din circuitele electrice.

Dacă miezul este omogen ($\mu = \text{cst}$), de secțiune constantă ($A = \text{ct}$) și de lungime ℓ atunci reluctanța este:

$$R_m = \int_1^2 \frac{d\ell}{\mu A} = \frac{1}{\mu A} \int d\ell = \frac{\ell}{\mu A}; \quad [R_m] = \frac{[U_m]}{[\Phi_f]} = \frac{\text{Asp}}{\text{Wb}} = H^{-1} \quad (6.44)$$

Inversul reluctanței se numește *permeanță*:

$$\Lambda_m = \frac{1}{R_m} = \frac{\Phi_f}{U_m} = \frac{\mu A}{\ell}; \quad \Lambda_m = \int_{S_{Fe}} \frac{\mu ds}{\ell} \quad (6.45)$$

Calculul reluctanței și permeanței cu (6.44) și (6.45) se poate efectua și pentru miezuri neomogene cu o geometrie oarecare utilizând *metoda tuburilor și feliilor* de miez magnetic.

Tuburile de flux sunt de secțiune infinitesimală ds și sunt luate în lungul liniilor de flux Φ_f ; $\ell = \ell_{\text{tub}}$ fiind lungimea tubului (o funcție).

$$d\Lambda_{m_{\text{tub}}} = \frac{\mu ds}{\ell_{\text{tub}}} \rightarrow \Lambda_m = \int d\Lambda_m = \int_{S_{\text{miez}}} \frac{\mu ds}{\ell} \quad (6.46)$$

sau: $\Lambda_m = \sum_1^n \frac{\mu_k \Delta S_k}{\ell_k}$ pentru tuburi mai groase, avându-se în vedere că

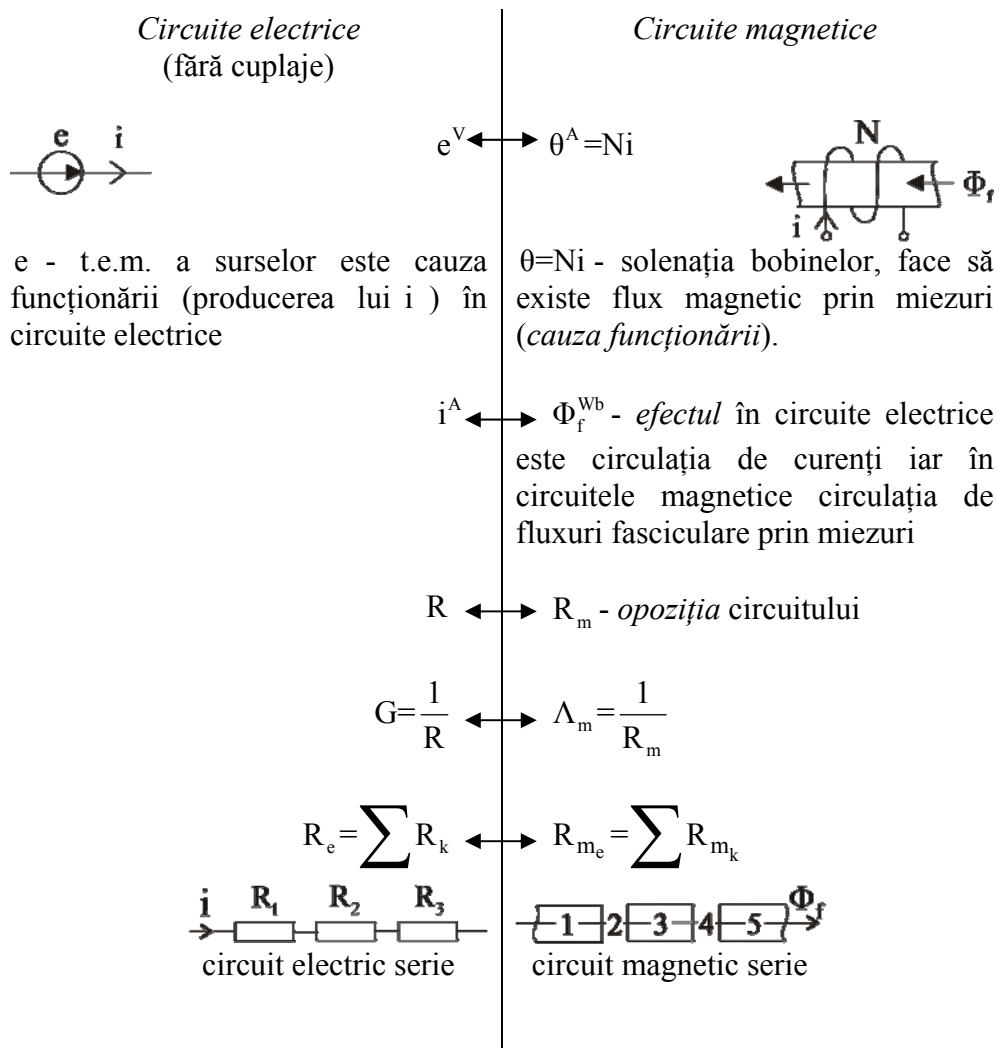
tuburile sunt parcurse de flux în conexiune paralel.

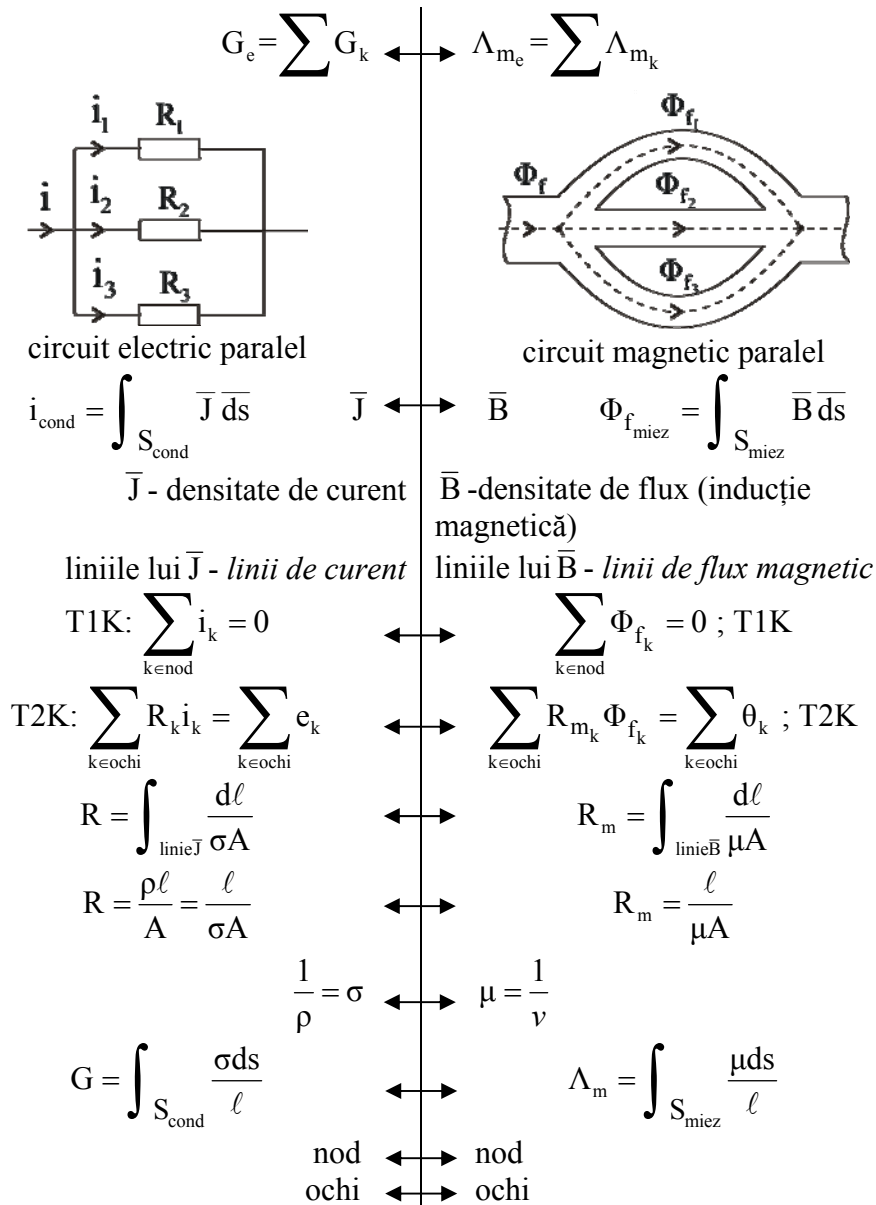
Feliile de flux au grosime infinitesimală $d\ell$ și sunt \perp pe liniile de flux, diversele felii sunt parcurse în serie de către fluxul magnetic:

$$dR_{m_{\text{felie}}} = \frac{d\ell}{\mu S_{\text{felie}}} \rightarrow R_m = \int dR_m = \int_{\text{linie flux}} \frac{d\ell}{\mu S} \quad (6.47)$$

sau: $R_m = \sum_1^n \frac{\Delta\ell_k}{\mu_k S_k}$ pentru felii mai groase (am considerat n felii).

Bazat pe izomorfismul relațiilor (6.43)-(6.47) cu relațiile scrise pentru piese conductoare parcurse de curent se poate construi o analogie între circuitele electrice și circuitele magnetice, sub forma:





Pe baza acestei analogii teoremele și metodele utilizate la studiul circuitelor electrice rămân valabile și pentru studiul circuitelor magnetice (mai puțin teoremele de conservare a puterilor electrice care nu au corespondent magnetic).

Analogia $\{\text{circuit electric} \leftrightarrow \text{circuit magnetic}\}$ este pur formală, cele două clase de probleme diferă esențial între ele. Printr-o latură de circuit electric nu circulă curent dacă latura este întreruptă; printr-o latură de circuit

magnetic va circula flux chiar dacă latura are un întrefier (miezul este întrerupt). Bineînțeles că fluxul printr-o latură cu întrefier este foarte mic din cauza reluctanței mari a porțiunii cu întrefier:

$$R_{m_{Fe}} = \frac{\ell_{Fe}}{\mu_{Fe}A} ; R_{m_o} = \frac{\ell_o}{\mu_o A} ; \mu_{Fe} \gg \mu_o \rightarrow R_{m_o} \gg R_{m_{Fe}} \quad (6.48)$$

O rezistență electrică R parcursă de curent este însoțită de transformarea energiei electrice în căldură însă o reluctanță (un miez magnetic) parcurs de fluxul Φ_f nu este însoțită de dezvoltări de căldură (dacă totuși un miez se încălzește, asta se întâmplă din cauza altor efecte, atunci când fluxul Φ_f este variabil în timp: încălziri prin histerezis sau prin curenți turbionari induși în miez, dar nu din cauza conducerii fluxului magnetic).

6.4.1 Teoremele lui Kirchhoff pentru circuite magnetice

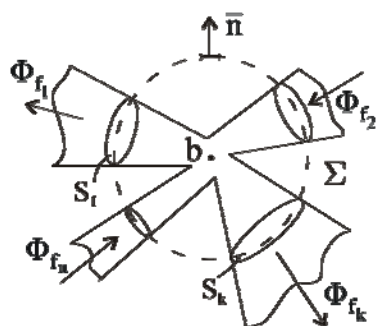


Fig 6.12

Conform legii fluxului magnetic, fluxul magnetic printr-o suprafață închisă Σ este întotdeauna nul:

$$\Phi_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{ds} = 0$$

Alegând o suprafață Σ care înconjoară un nod b de circuit magnetic (figura 6.12) va exista flux doar prin suprafețele S_1, S_2, \dots, S_n din Σ și putem scrie că:

$$\Phi_{\Sigma} = \sum_{k \in b} \Phi_{f_k} = 0 \quad (6.49)$$

în suma algebrică (6.49) se consideră cu (+) fluxurile orientate după normala exterioară la Σ , deci cele care ies din nod.

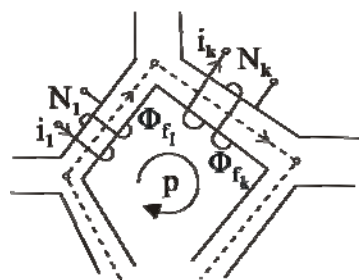


Fig 6.13

Considerăm ochiul p dintr-un circuit magnetic (figura 6.13) care este format din mai multe laturi cu reluctanțele $R_{m_1}, R_{m_2}, \dots, R_{m_k}$, cele care sunt active au solenatiile $\theta_1 = N_1 i_1$, $\theta_2 = N_2 i_2$, \dots , $\theta_k = N_k i_k$ iar prin laturi trec fluxurile fasciculare $\Phi_{f_1}, \Phi_{f_2}, \dots, \Phi_{f_k}$.

Legea circuitului magnetic în regim staționar (cvasistaționar) sau teorema lui Ampère aplicată pe o curbă Γ în lungul ochiului p se scrie astfel:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{\ell} = \theta_{S_r} \leftrightarrow \begin{cases} \oint_{\Gamma} \bar{H} d\bar{\ell} = \sum_{k \in p} \int_{C_k} \bar{H}_k d\bar{\ell}_k = \sum u_{m_k} = \sum R_{m_k} \Phi_{f_k} \\ \theta_{S_r} = \sum_{k \in p} \theta_k \Rightarrow \sum_{k \in p} R_{m_k} \Phi_{f_k} = \sum_{k \in p} \theta_k \end{cases} \quad (6.50)$$

Expresia (6.50) reprezintă T2K pentru circuite magnetice analoagă cu $\sum Z_k I_k = \sum E_k$ pentru circuite electrice fără cuplaje sau $\sum R_k I_k = \sum E_k$ în circuite de c.c.

În (6.50) se consideră că au solenație doar laturile active (au o bobină cu N spire parcurse de curentul i) și sensul solenației depinde de sensul curentului prin bobină și de sensul de înfășurare a spirelor pe miez.

Dacă ținem seama și de dispersia magnetică, vom considera fluxul fascicular de dispersie ca fluxul unei noi laturi de circuit magnetic legată în derivație între punctele de început și sfârșit ale acestui flux. Reluctanța acestor laturi corespunzătoare fluxului de dispersie se poate evalua doar aproximativ sau se măsoară experimental. În probleme obișnuite aceste fluxuri de dispersie se neglijează în raport cu fluxurile utile, ele închizându-se doar prin aer vor avea valori foarte mici.

6.4.2 Rezolvarea circuitelor magnetice

A „rezolva” un circuit magnetic înseamnă a determina *fluxul magnetic fascicular* Φ_f , inducția magnetică \bar{B} și intensitatea câmpului magnetic \bar{H} prin fiecare porțiune a circuitului magnetic atunci când se cunoaște geometria miezului, permeabilitatea sa μ și solenațiile $\theta = Ni$ ale diverselor bobine ale circuitului.

Calculul se face neglijând fluxurile magnetice de dispersie iar fluxurile utile se consideră uniform repartizate pe secțiunea miezului (miez filiform).

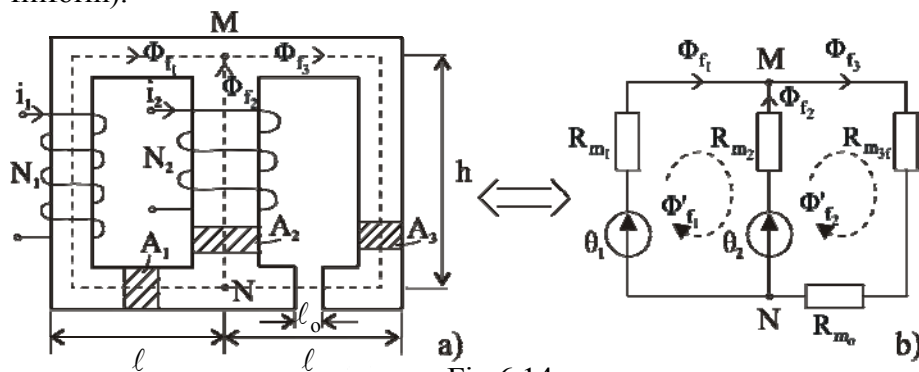


Fig 6.14

Presupunem circuitul magnetic cu geometria din figura 6.14-a care are două noduri (M și N) și trei laturi. Lungimile laturilor se evaluează de-a lungul liniei mijlocii de flux de la nodul M la N iar secțiunile laturilor sunt A_1, A_2, A_3 .

Reluctanțele laturilor de miez (și a întrefierului) sunt:

$$R_{m_1} = \frac{2\ell + h}{\mu A_1} ; R_{m_2} = \frac{h}{\mu A_2} ; R_{m_{3f}} = \frac{2\ell + h - \ell_o}{\mu A_3} ; R_{m_o} = \frac{\ell_o}{\mu_o A_3} \quad (6.51)$$

iar solenatiile sunt: $\theta_1 = N_1 i_1$ și $\theta_2 = N_2 i_2$.

Pe baza analogiei dintre circuitele electrice și cele magnetice s-a desenat în figura 6.14-b circuitul electric echivalent cu aceeași topologie ca și cel magnetic iar mărimile care-l caracterizează au valorile calculate anterior.

→ Determinarea fluxurilor fasciculare se poate face aplicând TK pe circuitul echivalent:

$$\begin{cases} \Phi_{f_1} + \Phi_{f_2} - \Phi_{f_3} = 0 \\ R_{m_1} \Phi_{f_1} - R_{m_2} \Phi_{f_2} = \theta_1 - \theta_2 \\ R_{m_2} \Phi_{f_2} + (R_{m_{3f}} + R_{m_o}) \Phi_{f_3} = \theta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \Phi_{f_1} \\ \Phi_{f_2} \\ \Phi_{f_3} \end{bmatrix} \xrightarrow{B_k = \frac{\Phi_{f_k}}{A_k}} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{H_k = \frac{B_k}{\mu}} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

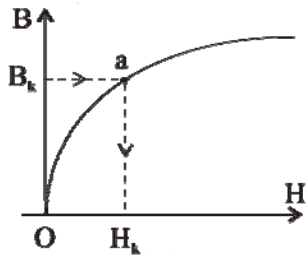


Fig 6.15

Dacă miezul îl considerăm liniar atunci $B_k = \mu H_k$ iar dacă îl considerăm neliniar atunci caracteristica miezului $B(H)$ are aspectul din figura 6.15. La o valoare $B_k = \frac{\Phi_{f_k}}{A_k}$ a inducției magnetice îi corespunde o valoare H_k a intensității câmpului și dacă punctul de funcționare este în (a),

permeabilitatea aceluia punct este $\mu = \frac{B_k}{H_k}$ respectiv $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_o} \approx 10^5 - 10^6$ este

permeabilitatea relativă în punctul (a) de funcționare. Și circuitul electric echivalent este tot neliniar în acest caz.

Intensitatea câmpului magnetic în întrefierul de lungime ℓ_o are valoarea $H_o = \frac{B_3}{\mu_o}$.

→ Cu metoda fluxurilor ciclice (Φ'_{f_1}, Φ'_{f_2}) pentru circuitul electric analog avem:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} (R_{m_1} + R_{m_2})\Phi'_{f_1} - R_{m_2}\Phi'_{f_2} = \theta_1 - \theta_2 \\ -R_{m_2}\Phi'_{f_1} + (R_{m_2} + R_{m_{3f}} + R_{m_o})\Phi'_{f_2} = \theta_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} \Phi'_{f_1} \\ \Phi'_{f_2} \end{bmatrix} \rightarrow \\
 & \rightarrow \begin{cases} \Phi_{f_1} = \Phi'_{f_1} \\ \Phi_{f_2} = -\Phi'_{f_1} + \Phi'_{f_2} \\ \Phi_{f_3} = \Phi'_{f_2} \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_o \end{bmatrix} \quad (6.53)
 \end{aligned}$$

→ Cu metoda potențialelor nodurilor, luând nodul N referință vom scrie o singură ecuație pentru nodul M: $\Lambda_{m_M} \cdot V_{m_M} = \Phi_{sc_M}$, respectiv:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{R_{m_1}} + \frac{1}{R_{m_2}} + \frac{1}{R_{m_{3f}} + R_{m_o}} \right) V_{m_M} = \frac{\theta_1}{R_{m_1}} + \frac{\theta_2}{R_{m_2}} \rightarrow V_{m_M} \rightarrow \\
 & \rightarrow \Phi_{f_1} = \frac{\theta_1 - V_{m_M}}{R_{m_1}} ; \Phi_{f_2} = \frac{\theta_2 - V_{m_M}}{R_{m_2}} ; \Phi_{f_3} = \frac{V_{m_M}}{R_{m_{3f}} + R_{m_o}} \quad (6.54)
 \end{aligned}$$

În exemplul considerat în figura 6.14 fluxul fascicular Φ_{f_3} va fi mic din cauza reluctanței mari a întrefierului ($R_{m_o} \gg$).

Circuite magnetice cu magnet permanent

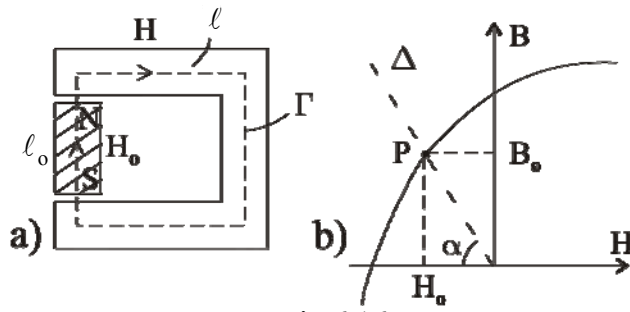


Fig 6.16

Circuitul magnetic din figura 6.16-a conține un magnet permanent de lungime ℓ_o care determină flux magnetic de-alungul miezului.

Curba Γ are lungimea ℓ_o prin magnet și ℓ prin miez și aplicând

legea circuitului magnetic pentru curba Γ , putem scrie:

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 0 \leftrightarrow H_o \ell_o + H \ell = 0 \rightarrow H_o = -H \frac{\ell}{\ell_o} \rightarrow B_o = \mu_o H_o = -\underbrace{\mu_o \frac{\ell}{\ell_o}}_{\text{tg} \alpha} H \quad (6.55)$$

Dreapta de sarcină Δ din figura 6.16-b are panta $\text{tg} \alpha = \mu_o \frac{\ell}{\ell_o}$ iar la intersecția sa cu curba de demagnetizare se stabilește punctul de funcționare

P al magnetului permanent. În magnet valorile câmpului sunt B_0 și H_0 . În interiorul miezului valorile câmpului sunt:

$$B = B_0 ; H = \frac{B}{\mu} .$$

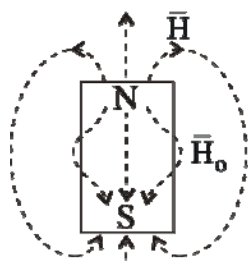


Fig 6.17

Spectrul câmpului \bar{H} pentru magnetul tip bară din figura 6.17 pune în evidență cum se închid liniile lui $\bar{H} = \bar{H}_{ext}$ și $\bar{H}_0 = \bar{H}_{int}$.

6.5 Inductivități

Inductivitatea (inductanța) unei spire Γ parcursă de curentul i_Γ este o

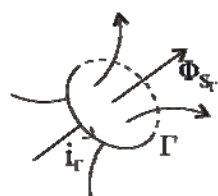


Fig 6.18

mărimă ce caracterizează circuitul Γ și se definește ca raportul dintre fluxul magnetic ce străbate suprafața circuitului (Φ_{S_Γ}) și valoarea curentului care a produs acest flux:

$$L = \frac{\Phi_{S_\Gamma}}{i_\Gamma} = f(\text{geom. circ} ; \mu_{\text{mediu}}) ; [L] = \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \text{H} \quad (6.56)$$

$[H] \rightarrow \text{Henry}$

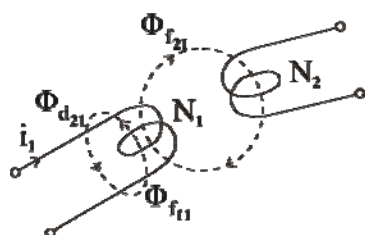


Fig 6.19

În medii liniare $\mu = \mu_{\text{mediu}} = \text{cst}$ inductivitatea depinde doar de geometria circuitului (forma curbei Γ) și de permeabilitatea din jurul său.

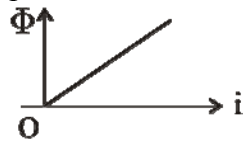
Dacă avem două circuite cu N_1 și N_2 spire aflate „în prezență” (se influențează reciproc), atunci când circuitul 1 este parcurs de curentul i_1 el va crea un câmp magnetic; $\Phi_{f_{11}}$ este fluxul magnetic fascicular creat de i_1 . O parte din acest flux va trece și prin spirele N_2 ale circuitului al doilea ($\Phi_{f_{21}}$ - este creat de circuitul 1 și trece prin suprafața circuitului 2). Celelalte linii de câmp care nu trec și prin circuitul 2 reprezintă fluxul de dispersie (scăpări) ale circuitului 1 față de 2 ($\Phi_{d_{21}}$). Sensul de referință a fiecărui flux magnetic se consideră după regula burghiului drept cu sensul de referință al curentului care l-a produs. Deci $\Phi_{f_{11}} > 0$ iar $\Phi_{f_{21}}$ este (+) dacă are același sens cu fluxul propriu al circuitului

2 (cuplaj adițional) și (-) când are sens contrar cu $\Phi_{f_{22}}$ (cuplaj diferențial între cele două circuite). În raport cu aceste fluxuri se definesc următoarele inductivități:

a) *Inductivitatea proprie* a unui circuit este raportul dintre fluxul magnetic total ($\Phi = N\Phi_f$) prin cele N spire ale circuitului și curentul care l-a produs, mărime întotdeauna pozitivă.

$$\begin{cases} L_1 = L_{11} = \frac{\Phi_{11}}{i_1} = \frac{N_1\Phi_{f_{11}}}{i_1} > 0 \\ L_2 = L_{22} = \frac{\Phi_{22}}{i_2} = \frac{N_2\Phi_{f_{22}}}{i_2} > 0 \end{cases} \quad (6.57)$$

Inductivitatea (inductanța) proprie a unui circuit mai are și alte denumiri: coeficient de inducție proprie, coeficient de autoinducție, coeficient de selfinducție. Numele de *inductanță* apare în cărți mai vechi preluate din literatura franceză.



În medii liniare $L=ct$ și „fluxurile magnetice sunt proporționale cu valorile curenților care le-au produs” (teorema inductivității).

b) *Inductivitatea mutuală* L_{21} dintre circuitul 1 și 2 se definește ca raportul dintre fluxul total Φ_{21} prin cele N_2 spire ($\Phi_{21} = N_2\Phi_{f_{21}}$) și curentul i_1 care l-a creat.

$$L_{21}^{\pm} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{N_2\Phi_{f_{21}}^{\pm}}{i_1} \quad (6.58)$$

Inductivitatea mutuală (coeficient de inducție mutuală) într-un mediu liniar depinde de natura mediului din jurul circuitului (μ), de dimensiunile, forma și poziția relativă a celor două circuite.

În mod analog se definește:

$$L_{12}^{\pm} = \frac{\Phi_{12}}{i_2} = \frac{N_1\Phi_{f_{12}}^{\pm}}{i_2} \text{ dacă } i_1 = 0 \text{ și } i_2 \neq 0 \quad (6.59)$$

Vom arăta (în alt capitol) că $L_{12}=L_{21}$ – teorema reciprocității pentru inductivități.

c) *Inductivități utile și de dispersie*

O parte din fluxul fascicular propriu produs de circuitul 1 ajunge să treacă și prin suprafața circuitului 2, numit *flux fascicular util*. Cealaltă parte care se închide doar în jurul circuitului 1 care l-a produs se numește *flux fascicular de dispersie* (de scăpări) și valoarea sa este:

$$\Phi_{fd_{21}} = \Phi_{f_{11}} - |\Phi_{f_{21}}| > 0$$

Inductivitatea de dispersie a circuitului 1 față de 2 este:

$$\begin{cases} L_{d_{21}} = \frac{N_1 \Phi_{fd_{21}}}{i_1} = \frac{N_1 \Phi_{f_{11}}}{i_1} - N_1 \frac{|\Phi_{f_{21}}|}{i_1} = L_{11} - \frac{N_1}{N_2} |L_{21}| > 0 \\ L_{d_{12}} = L_{22} - \frac{N_2}{N_1} |L_{21}| \end{cases} \quad (6.60)$$

Dar inductivitatea proprie a circuitului 1 aflat în prezența circuitului 2 este:

$$L_{11} = L_{d_{21}} + \frac{N_1}{N_2} |L_{21}| = L_{d_{21}} + L_{u_{21}} \quad (6.61)$$

unde $L_{u_{21}} = \frac{N_1}{N_2} |L_{21}|$ este *inductivitatea utilă* a circuitului 1 față de 2 și

analog $L_{u_{12}} = \frac{N_2}{N_1} |L_{21}|$.

Coefficientul de cuplaj magnetic dintre două bobine se definește prin:

$$k = \frac{\sqrt{L_{12}L_{21}}}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_{11}L_{22}}} = \frac{M_{12}}{\sqrt{L_1L_2}} \quad (6.62)$$

Bobine necuplate magnetic: $L_{12} = 0 \rightarrow k = 0$ iar cuplaj perfect (fără dispersii) înseamnă $k=1$ ($L_{12}^2 = L_1L_2$).

Coefficientul de dispersie magnetică a două bobine este:

$$\sigma^2 = 1 - k^2 = \frac{L_1L_2 - M^2}{L_1L_2} \quad (6.63)$$

- bobine necuplate: $k=0$; $\sigma=1$ – dispersie maximă
- bobine cuplate perfect: $k=1$; $\sigma=0$ – dispersie nulă.

6.5.1 Relațiile lui Maxwell privitoare la inductivități

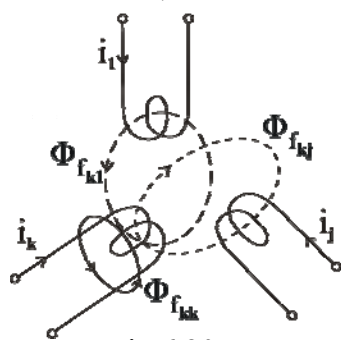


Fig 6.20

Considerăm un sistem de n circuite aflate în prezență pentru care se cunosc inductivitățile lor proprii: $L_{11}, L_{22} \dots L_{nn}$, inductivitățile mutuale $L_{kj}=L_{jk}$ și curenții care le parcurg $i_1, i_2 \dots i_n$.

Fluxul magnetic prin circuitul k, din sistem, este superpoziția dintre fluxul său propriu total $\Phi_{kk} = L_{kk}i_k$ și fluxurile mutuale

k poate fi variabil în timp $\Phi_k(t)$ numai atunci când curenții sunt variabili în timp.

T.e.m. e_k indusă la bornele circuitului k de către $\Phi_k(t)$ este de forma:

$$e_k = -\frac{d\Phi_k}{dt} = -L_{k1} \frac{di_1}{dt} - L_{k2} \frac{di_2}{dt} - \dots - L_{kk} \frac{di_k}{dt} - \dots - L_{kn} \frac{di_n}{dt} \quad (6.68)$$

Notăm:

$e_{kk} = -L_{kk} \frac{di_k}{dt}$ - t.e.m de inducție proprie (t.e.m autoindusă). Ea apare în circuitul k datorită variației în timp a propriului său curent ($\frac{di_k}{dt} \neq 0$).

$e_{kj} = -L_{kj} \frac{di_j}{dt}$ - t.e.m de inducție mutuală. Ea se induce în circuitul k datorită variației în timp a curentului din circuitul j cu care circuitul k este cuplat.

Dacă un circuit nu este fix în spațiu (se poate mișca, roti sau se deplasează un miez magnetic în interiorul său), atunci și inductivitatea sa va fi variabilă $L=L(t)$ iar fluxul total al circuitului: $\Phi(t) = L(t) \cdot i(t)$.

T.e.m indusă în circuit va fi de forma:

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} - i \frac{dL}{dt} \quad (6.69)$$

unde:

$e_t = -L \frac{di}{dt}$ - t.e.m indusă prin transformare (static), care în funcție de câmpul magnetic inductor avea expresia: $e_t = \int_{S_r} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$.

$e_m = -i \frac{dL}{dt}$ - t.e.m indusă prin mișcare (dinamic), care în limbaj de câmp avea expresia: $e_m = \oint_{\Gamma} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$.

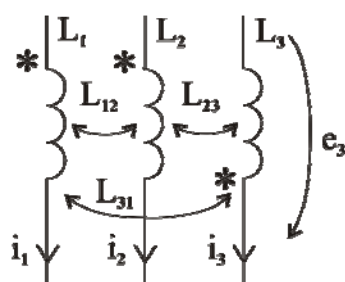


Fig 6.21

Dacă există mai multe bobine cuplate, parcurse de curenți variabili și ținem seama de semnele cuplajelor: $L_{12} > 0$; $L_{23} < 0$; $L_{31} < 0$ atunci t.e.m indusă la bornele bobinei L_3 va fi de forma:

$$e_3 = L_3 \frac{di_3}{dt} - L_{23} \frac{di_2}{dt} - L_{31} \frac{di_1}{dt} \quad (6.70)$$

Observație:

Pentru fire (circuite) foarte subțiri, câmpul magnetic lângă fir este foarte mare ($H \rightarrow \infty$), deci $\Phi \rightarrow \infty$ și $L = \Phi/i \rightarrow \infty$, inductivitatea prin definiția clasică nu are sens. Pentru fire groase, curba Γ care definește suprafața circuitului nu mai coincide cu axa geometrică a firului, deci inductivitatea L ar depinde de modul cum aleg curba Γ , deci nu are semnificație. Definiția $L = \Phi/i$ este doar pentru circuite nici prea subțiri, nici prea groase. Energia magnetică $W_m = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{1}{2} L i^2$ conține termeni ce depind de alegerea curbei Γ (Φ și L) dar și termeni riguroși:

$$W_m = \int_{v_\infty} \frac{1}{2} \mu H^2 dv ; \quad i = \int_{S_{\text{cond}}} \bar{J} \cdot d\bar{s}$$

și-n acest caz *definiția energetică a inductivității* este cea corectă:

$$L = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{2W_{\text{int}}}{i^2} + \frac{2W_{\text{ext}}}{i^2} = L_{\text{int}} + L_{\text{ext}}$$

6.5.3 Teorema lui Neumann

Această teoremă permite să calculăm inductivitatea mutuală între două circuite care ocupă în spațiu forma curbelor Γ_1 și Γ_2 și sunt așezate într-un mediu omogen cu permeabilitatea μ .

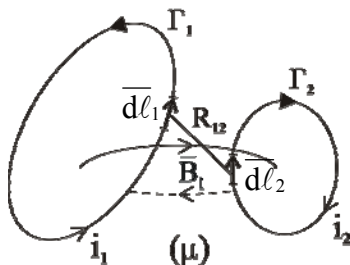


Fig. 6.22

Circuitul Γ_1 , parcurs de curentul i_1 , creează în jurul său câmpul \bar{B}_1 care va da naștere prin suprafața circuitului 2 la fluxul de cuplaj:

$$\Phi_{21} = \int_{S_{\Gamma_2}} \bar{B}_1 \cdot d\bar{s} = \int_{S_{\Gamma_2}} \text{rot} \bar{A}_1 \cdot d\bar{s} = \oint_{\Gamma_2} \bar{A}_1 \cdot d\bar{\ell}_2 \quad (6.71)$$

Potențialul magnetic vector \bar{A}_1 creat de circuitul 1 în punctele de pe curba Γ_2 este de forma (6.11) și fluxul mutual devine:

$$\Phi_{21} = \frac{\mu i_1}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\bar{\ell}_1 \cdot d\bar{\ell}_2}{R_{12}} \rightarrow L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\bar{\ell}_1 \cdot d\bar{\ell}_2}{R_{12}} \quad (6.72)$$

unde R_{12} (vezi figura 6.22) este distanța dintre elementele $d\bar{\ell}_1$ și $d\bar{\ell}_2$ a celor două circuite, ambele având orientarea celor doi curenți i_1 și i_2 .

Dacă cele două circuite (Γ_1 și Γ_2) sunt formate fiecare din porțiuni mai simple (analitice), relația (6.72) permite să calculăm *inductivitatea mutuală de calcul* între două porțiuni deschise de circuit

($\Gamma_1 = \bigcup_{k=1}^n C_{1k}$; $\Gamma_2 = \bigcup_{j=1}^m C_{2j}$), sub forma:

$$L_{21} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\mu}{4\pi} \int_{C_{1k}} \int_{C_{2j}} \frac{\overline{d\ell_{1k}} \cdot \overline{d\ell_{2j}}}{R_{12}} \quad (6.73)$$

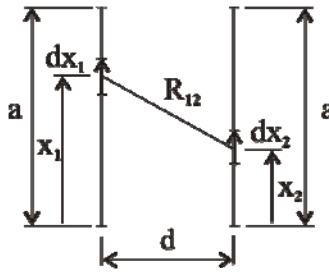
Dacă două porțiuni de circuit sunt dispuse ortogonal în spațiu $\overline{d\ell_1} \perp \overline{d\ell_2}$ atunci $\overline{d\ell_1} \cdot \overline{d\ell_2} = 0$ și între porțiunile respective nu există inductivitate mutuală.

Când dorim ca două componente dintr-un aparat să nu se perturbe prin influență mutuală, ele se dispun perpendicular. Liniile de înaltă tensiune trec întotdeauna \perp peste liniile de joasă tensiune, peste liniile de telecomunicații sau peste șinele de cale ferată, pentru a nu induce în acestea t.e.m care ar putea deveni periculoase.

Ca să putem determina L_{12} cu (6.72) trebuie ca cele două circuite să nu se intersecteze (atingă); dacă au un punct comun, acolo $R_{12} = 0$ și L_{12} nu are sens în acest caz.

Aplicație:

Să se determine inductivitatea mutuală de calcul între două segmente de lungime a , situate la distanța d (figura 6.23).



Cu (6.73) putem scrie succesiv:

$$L_{aa} = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \int_0^a \frac{dx_1 dx_2}{\sqrt{d^2 + (x_1 - x_2)^2}} =$$

$$\begin{aligned} & \text{Fig 6.23} \\ & = \frac{\mu}{4\pi} \int_0^a \ln \frac{a - x_2 + \sqrt{d^2 + (a - x_2)^2}}{-x_2 + \sqrt{d^2 + x_2^2}} dx_2 = \frac{\mu a}{2\pi} \left[\ln \frac{\sqrt{d^2 + a^2} + a}{d} - \frac{\sqrt{d^2 + a^2} - d}{a} \right] \end{aligned} \quad (6.74)$$

Dacă $a \gg d$ atunci:

$$L_{aa} \cong \frac{\mu a}{2\pi} \left(\ln \frac{2a}{d} - 1 \right);$$

6.5.4 Metode de calcul a inductivităților

a) metode directe de calcul

Dacă avem un sistem de n circuite aflate în prezență și se cunoaște geometria circuitelor (forma, dimensiunea, poziția reciprocă), curenții din circuite $i_1, i_2 \dots i_n$ și proprietățile mediului din jur, atunci:

- se presupune circuitul (bobina) k parcursă de curentul i_k ;
- se calculează inducția \vec{B}_k creată de i_k (posibil pentru configurații simple);
- se calculează fluxul prin suprafața circuitului k și prin suprafața circuitului j și apoi inductivitățile:

$$\begin{cases} \Phi_{f_k} = \int_{S_k} \vec{B}_k \cdot d\vec{s} \rightarrow \Phi_k = N_k \Phi_{f_k} \rightarrow L_k = L_{kk} = \frac{N_k \Phi_{f_k}}{i_k} \\ \Phi_{f_{jk}} = \int_{S_j} \vec{B}_k \cdot d\vec{s} \rightarrow \Phi_{jk} = N_j \Phi_{f_{jk}} \rightarrow L_{jk} = \frac{N_j \Phi_{f_{jk}}}{i_k} \end{cases} \quad (6.75)$$

b) calculul inductivităților plasate pe miezuri magnetice

Dacă bobina este așezată pe un miez magnetic (și toate bobinele din joasă și medie frecvență sunt cu miez magnetic) atunci:

- se calculează reluctanța echivalentă a miezului prin care bobina produce flux (în raport cu capetele bobinei) R_m .
- inductivitatea bobinei va fi de forma:

$$L = \frac{N \Phi_f}{i} = \frac{N}{i} \cdot \frac{\theta}{R_m} = \frac{N}{i} \cdot \frac{Ni}{R_m} = \frac{N^2}{R_m} = N^2 \Lambda_m \quad (6.76)$$

c) calculul cu ajutorul energiei magnetice

Energia magnetică înmagazinată în câmpul magnetic al unei bobine este:

$$W_m = \frac{1}{2} Li^2 \rightarrow L = \frac{2W_m}{i^2} \quad (6.77)$$

aplicabilă mai ales pentru inductivitatea interioară a unui circuit: $L_{int} = \frac{2W_{int}}{i^2}$.

d) calculul inductivității mutuale cu teorema lui Neumann

Am văzut că se poate determina inductivitatea mutuală dintre două circuite cu (6.72) sau cea de calcul între două porțiuni de circuite (6.73) dacă acestea sunt așezate în mediu omogen ($\mu = \text{cst}$) și nu se intersectează.

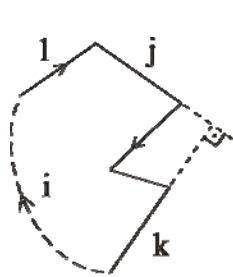


Fig 6.24

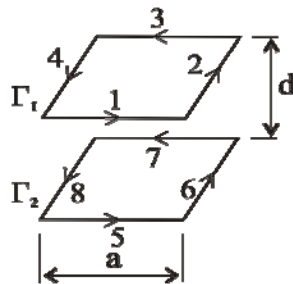


Fig 6.25

Dacă segmentul j din circuit este \perp pe segmentul k (figura 6.24) atunci $L_{kj} = 0$.

Dacă avem două circuite Γ_1 și Γ_2 de forma a două spire pătrate cu latura a , situate paralel pe aceeași axă la distanța d (figura

6.25) în mediu omogen cu μ , ne propunem să determinăm inductivitatea mutuală dintre ele.

Inductivitatea de calcul între două segmente paralele L_{aa} este de forma (6.74) și în această categorie intră: $L_{15} = L_{37} = L_{26} = L_{48} = L_{aa}$ iar dacă în (6.74) se înlocuiește d prin $\sqrt{d^2 + a^2}$ se obține valoarea L'_{aa} :
 $L_{17} = L_{28} = L_{35} = L_{46} = L'_{aa}$.

Pentru segmente \perp inductivitatea mutuală este nulă:

$$L_{16} = L_{18} = L_{25} = L_{27} = L_{36} = L_{38} = L_{45} = L_{47} = 0.$$

Sumând inductivitățile mutuale de calcul pentru cele două spire Γ_1 și Γ_2 din figura 6.25, inductivitatea mutuală dintre ele este:

$$L_{\Gamma_1\Gamma_2} = \sum_{j=1}^4 \sum_{k=5}^8 \pm L_{jk} = 4L_{aa} - 4L'_{aa} =$$

$$= \frac{2\mu_0 a}{\pi} \left[\ln \frac{\sqrt{d^2 + a^2} (\sqrt{d^2 + a^2} + a)}{d (\sqrt{d^2 + 2a^2} + a)} + \frac{\sqrt{d^2 + 2a^2} - 2\sqrt{d^2 + a^2} + d}{a} \right] \quad (6.78)$$

6.6 Aplicații

1) Să se determine inductivitatea unui solenoid (bobină cilindrică cu N spire a căror secțiune este A iar lungimea bobinei ℓ , dacă ℓ este mult mai mare decât diametrul spirei).

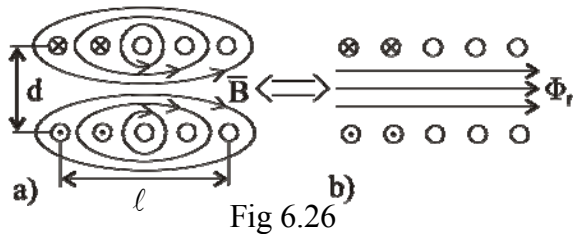


Fig 6.26

Pentru o bobină scurtă (figura 6.26a) fluxul magnetic este diferit prin fiecare spirală, cel mai mare este prin spirele centrale. Fluxul magnetic total este $\Phi_t = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$

Dacă $\ell/d \gg 1$ bobina reală o putem privi ca un solenoid (figura 6.26b) la care există câmp magnetic doar în interiorul bobinei și este un câmp uniform (cu liniile paralele), prin toate spirele avem același flux (valoarea medie a fluxurilor din bobina reală) numit *flux fascicular* Φ_f .

În acest caz fluxul magnetic total este $\Phi_t = N\Phi_f$. Neglijând câmpul magnetic exterior, cu teorema lui Ampère determinăm H iar apoi L :

$$B = \mu H = \mu \frac{Ni}{\ell} \rightarrow \Phi_f = B \cdot A \rightarrow L = \frac{N\Phi_f}{i} = \mu \frac{N^2 i A}{\ell} \quad (6.79)$$

2) Două bobine cu N_1 și N_3 spire sunt așezate pe un miez magnetic de permeabilitate μ și geometria din figura 6.27. Să se determine inductivitățile proprii L_{11} , L_{33} și inductivitatea mutuală dintre ele $L_{13} = L_{31}$.

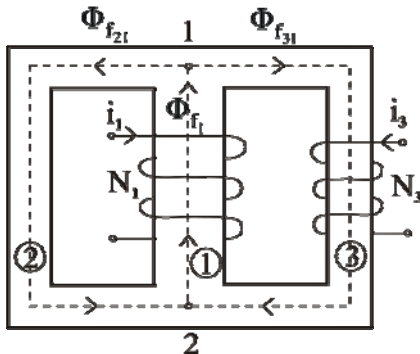


Fig 6.27

Bobinele fiind așezate pe miez magnetic vom determina inductivitățile cu (6.76). Inductivitatea bobinei 1 este:

$$L_1 = L_{11} = \frac{N_1^2}{R_{me_1}}, \text{ unde } R_{me_1} \text{ este reluctanța}$$

echivalentă prin care stabilește flux bobina 1 dacă ar acționa singură:

$$R_{me_1} = R_{m_1} + \frac{R_{m_2} R_{m_3}}{R_{m_2} + R_{m_3}} \quad (6.80)$$

Inductivitatea bobinei 3 se scrie analog:

$$L_3 = L_{33} = \frac{N_3^2}{R_{me_3}} ; R_{me_3} = R_{m_3} + \frac{R_{m_1} \cdot R_{m_2}}{R_{m_1} + R_{m_2}} \quad (6.81)$$

Bobina 1 parcursă de curentul i_1 produce fluxul fascicular Φ_{f1} care în nodul 1 se ramifică în Φ_{f21} și Φ_{f31} ; aplicând regula divizorului de flux (analog cu regula divizorului de curent) se scrie succesiv:

$$\Phi_{f1} = \frac{N_1 i_1}{R_{me_1}} ; \Phi_{f31} = \Phi_{f1} \cdot \frac{R_{m_2}}{R_{m_2} + R_{m_3}} ; L_{13} = L_{31} = \frac{N_3 \Phi_{f31}}{i_1} = \frac{N_1 N_3}{R_{me_1}} \frac{R_{m_2}}{R_{m_2} + R_{m_3}} \quad (6.82)$$

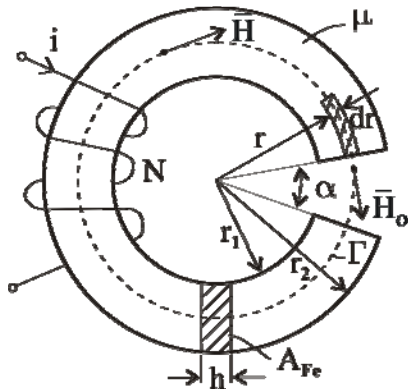


Fig 6.28

3) O bobină cu N spire este așezată pe un miez magnetic toroidal cu secțiune dreptunghiulară $A_{Fe} = h (r_2 - r_1)$ și permeabilitate μ având un întrefier cu o deschidere la centru α . Să se determine inductivitatea bobinei.

a) prin metode directe de calcul (6.75) înseamnă:

- liniile de câmp \vec{H} sunt cercuri în

lungul miezului; fie o linie de câmp Γ (cerc de rază $r \in (r_1, r_2)$):

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \theta_{S_{\Gamma}} \leftrightarrow H\ell + H_0 \ell_0 = Ni \leftrightarrow H(2\pi - \alpha)r + H_0 \alpha r = Ni \quad (6.83')$$

▪ la trecerea liniilor de câmp \vec{B} din fier în aer se conservă componenta normală a lui \vec{B} :

$$B_{Fe} = B_{aer} \leftrightarrow \mu H = \mu_0 H_0 \quad (6.83'')$$

Din ecuațiile (6.83') și (6.83'') rezultă:

$$H = \frac{Ni}{(2\pi - \alpha) + \mu_r \alpha} \cdot \frac{1}{r} = \frac{k_1}{r} \quad (6.84)$$

Fluxul fascicular de-alungul miezului este de forma:

$$\Phi_f = \int_{A_{Fe}} B \, ds = \int_{r_1}^{r_2} (\mu H) h \, dr = \mu \frac{Nih}{(2\pi - \alpha) + \mu_r \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.85)$$

Expresia inductivității rezultă din relația sa de definiție:

$$L = \frac{N\Phi_f}{i} = \mu \frac{N^2 h}{(2\pi - \alpha) + \mu_r \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.86)$$

b) Bobina fiind așezată pe un miez magnetic, inductivitatea o putem calcula cu (6.76), reluctanța echivalentă este formată din porțiunea de fier în serie cu întrefierul (parcursă de același flux Φ_f): $R_m = R_{mf} + R_{m_0}$.

Permeanța porțiunii de fier o determinăm prin metoda tuburilor de flux, tuburi luate de-alungul miezului:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{mf} &= \int_{A_{Fe}} \frac{\mu \, ds}{\ell} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu (h \, dr)}{(2\pi - \alpha)r} = \frac{\mu h}{2\pi - \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \\ \text{Analog: } \Lambda_{m_0} &= \frac{\mu_0 h}{\alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \end{aligned} \right\} \quad (6.87)$$

Reluctanța echivalentă este de forma:

$$R_m = R_{mf} + R_{m_0} = \frac{1}{\Lambda_{mf}} + \frac{1}{\Lambda_{m_0}} \Rightarrow L = \frac{N^2}{R_m} = \mu \frac{N^2 h}{(2\pi - \alpha) + \mu_r \alpha} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.88)$$

expresie identică cu (6.86) obținută prin definiția clasică a lui L .

Dacă miezul este toroidal fără întrefier, atunci în expresiile precedente se consideră $\alpha = 0$ și rezultă valoarea L' :

$$L' = L|_{\alpha=0} = \frac{\mu N^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (6.89)$$

4) Să se determine inductivitatea mutuală dintre un fir rectiliniu și o spiră Γ triunghiulară având o latură paralelă cu firul (figura 6.29).

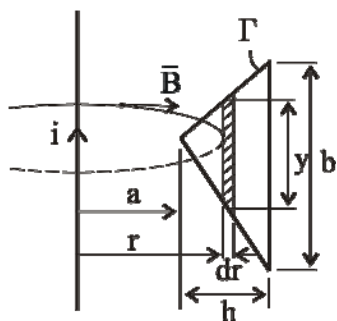


Fig 6.29

Firul creează câmpul $\vec{B} = \frac{\mu i}{2\pi r} \vec{u}_\varphi$ care

determină prin spira Γ un flux:

$$\Phi_{S_\Gamma} = \int_{S_\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int \frac{\mu i}{2\pi r} y dr = \int_a^{a+h} \frac{\mu i}{2\pi r} \frac{b}{h} (r-a) dr$$

$$\Phi_{21} = \Phi_{S_\Gamma} = \frac{\mu b i}{2\pi h} \left(h - a \ln \frac{a+h}{a} \right)$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i} = \frac{\mu b}{2\pi h} \left(h - a \ln \frac{a+h}{a} \right) \quad (6.90)$$

5) Două linii bifilare vecine sunt așezate ca în figura 6.30. Se cere inductivitatea mutuală dintre linii și t.e.m indusă în linia Γ_2 .

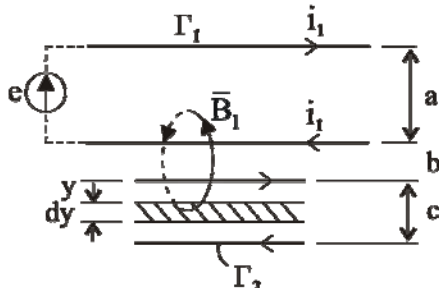


Fig 6.30

Linia 1 creează câmpul magnetic \vec{B}_1 :

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi} \left(\frac{1}{y+b} - \frac{1}{y+a+b} \right)$$

care produce un flux magnetic prin suprafața circuitului 2:

$$\Phi_{21} = \int_0^c B_1(\ell dy) = \frac{\mu_0 i_1 \ell}{2\pi} \ln \frac{1 + \frac{c}{b}}{1 + \frac{c}{a+b}} \quad (6.91)$$

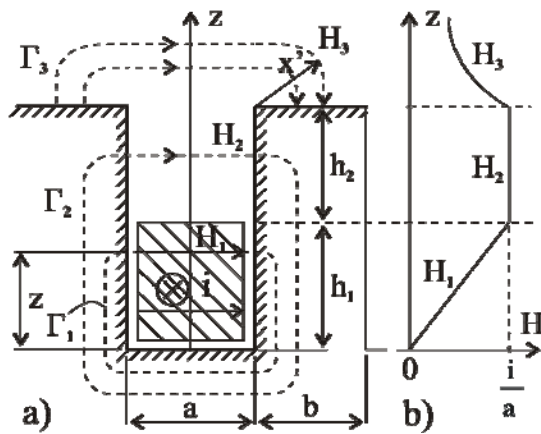
Inductivitatea mutuală are expresia: $L_{12} = L_{21} = \frac{\Phi_{21}}{i_1}$ iar t.e.m indusă

în linia Γ_2 va fi:

$$e_2 = -L_{21} \frac{di_1}{dt} = -\frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{1 + \frac{c}{b}}{1 + \frac{c}{a+b}} \frac{di_1}{dt} \quad (6.92)$$

6) Să se determine inductivitatea de disepresie a unei creștături feromagnetice (figura 6.31).

Într-o creștătură de lungime ℓ , adâncime $(h_1 + h_2)$ și lățime a , într-un material feromagnetic (creștătura rotorului la o mașină electrică rotativă)



este introdusă o bară de secțiune ah_1 parcursă uniform de curentul i . Aplicând teorema lui Ampère succesiv pe curbele Γ_1 , Γ_2 și Γ_3 se obțin succesiv expresiile câmpurilor H_1 , H_2 și H_3 din cele trei porțiuni:

← Fig 6.31

$$\begin{cases} \oint_{\Gamma_1} H_1 d\ell = i_{S_{\Gamma_1}} \rightarrow H_1 a = i \frac{z}{h_1} \rightarrow H_1 = \frac{i}{ah_1} \cdot z \\ \oint_{\Gamma_2} H_2 d\ell = i_{S_{\Gamma_2}} \rightarrow H_2 a = i \rightarrow H_2 = \frac{i}{a} \\ \oint_{\Gamma_3} H_3 d\ell = i_{S_{\Gamma_3}} \rightarrow H_3 (a + \pi x') = i \rightarrow H_3 = \frac{i}{a + \pi x'} \end{cases} \quad (6.93)$$

Distribuția câmpului \vec{H} între pereții creștăturii (câmpul de dispersie) este reprezentată în figura 6.31-b pe baza expresiilor (6.93). La fundul creștăturii câmpul este nul iar la partea de sus a barei ($a = h_1$) câmpul are valoarea maximă (i/a).

Fluxul de dispersie printr-o porțiune de înălțime dz este $d\Phi_d = B\ell dz = i d\Lambda_{m_z}$. Fluxul de dispersie total între pereții creștăturii este:

$$\begin{aligned} \Phi_d &= \int_0^{h_1} \frac{\mu_0 i}{ah_1} \cdot \ell z dz + \int_0^{h_2} \frac{\mu_0 i}{a} \cdot \ell dz + \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\mu_0 i}{a + \pi x'} \cdot \ell dx' = \\ &= \mu_0 i \ell \left[\frac{h_1}{2a} + \frac{h_2}{a} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{a + \pi \frac{b}{2}}{a} \right] \end{aligned}$$

iar inductivitatea de dispersie a creștăturii este $L_d = \frac{\Phi_d}{i}$.

•) Fluxul de dispersie (cel care se închide de la un perete la altul al creștăturii feromagnetice) parcurge trei permeanțe în paralel a căror valori sunt de forma:

$$\Lambda_{m_1} = \frac{\mu_0 S_{lmed}}{a} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \ell h_1}{a}$$

$$\Lambda_{m_2} = \frac{\mu_0 S_2}{a} = \frac{\mu_0 \ell h_2}{a}$$

$$\Lambda_{m_3} = \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\mu_0 \ell dx}{a + \frac{\pi}{2}x} = \frac{2\mu_0 \ell}{\pi} \ln \frac{a + \frac{\pi}{2}b}{a}$$

iar inductivitatea de dispersie se scrie astfel:

$$L_d = N^2 \Lambda_{me} = \Lambda_{me} = \Lambda_{m_1} + \Lambda_{m_2} + \Lambda_{m_3}$$

deci aceeași expresie ca prin definiția sa clasică.