

4. Impedanțe și admitanțe echivalente

4.1 Teorema lui Joubert

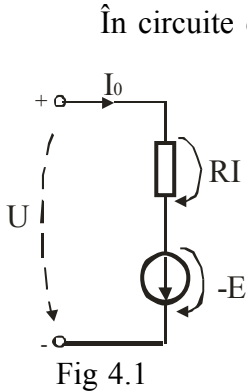


Fig 4.1

În circuite de c.c. pentru un dipol pasiv ecuația de tensiuni se scrie $U_0 = RI_0$, iar pentru laturi active care conțin surse de t.e.m. se scrie $E \pm U_0 = RI_0$, în funcție de modul de asociere a sensului de referință pentru U (+ pentru dipol receptor și – pentru dipol generator).

Pentru un dipol pasiv în regim sinusoidal, prima relație ar avea echivalent: $\underline{U} = \underline{Z}\underline{I}$, iar pentru un dipol (o latură) activă ecuația de tensiuni echivalentă este dată de teorema lui Joubert.

Considerăm o latură de circuit activă cu sursa e_g , care are elementele R, L, C, și a cărei bobină este cuplată magnetic cu alte bobine de pe alte laturi ale circuitului, fluxul rezultat al acestora prin suprafața bobinei considerate este Φ_{ext} .

Fluxul rezultat al bobinei este superpoziția dintre fluxul propriu (Li) și fluxul exterior creat de alte bobine: $\Phi = Li + \Phi_{ext}$.

Curba închisă Γ trece prin latura de circuit și prin linia tensiunii la bornele laturii “ u_b ”. T.e.m. de-

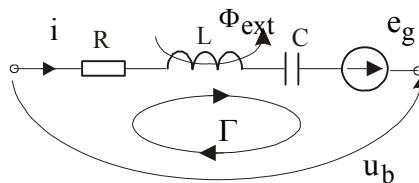


Fig 4.2

alungul curbei Γ este suma dintre t.e.m. a sursei proprii e_g și t.e.m. indusă de fluxul rezultat ($e_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt}$).

Deci:

$$e_{\Gamma} = e_g + e_{ind} = e_g - \frac{d\Phi}{dt} = e_g - L \frac{di}{dt} - \frac{d\Phi_{ext}}{dt} \quad (4.1)$$

Totodată:

$$e_{\Gamma} = u_R + u_C - u_b = Ri + \frac{1}{C} \int i dt - u_b$$

Egalând cele două expresii ale t.e.m. e_{Γ} se obține:

$$e_g - \frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt} + u_b = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (4.2)$$

Notăm:

$$u_a = e_g - \frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt} + u_b \quad (4.3)$$

Mărimea u_a din (4.3) este numită *tensiune aplicată* laturii de circuit. Tensiunea aplicată unei laturi de circuit este acea tensiune care determină circulația curentului prin latura respectivă: curentul circulă prin latură dacă latura o alimentăm cu o *tensiune la borne* (u_b), datorită faptului că latura conține o *sursă de t.e.m.* e_g și datorită faptului că latura e cuplată magnetic cu alte laturi și *fluxul magnetic de cuplaj* induce în latură o t.e.m. ($-\frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt}$).

Tensiunea aplicată u_a conține în expresia sa (4.3) toate *cauzele fizice* care pot genera curent prin acea latură. Dacă latura este pasivă ($e_g = 0$) și nu este cuplată magnetic cu alte laturi ($\Phi_{\text{ext}} = 0$), atunci curentul circulă doar datorită tensiunii u_b cu care este alimentată latura.

Dacă circuitul funcționează în regim sinusoidal, ecuația (4.2) poate fi transpusă în complex sub forma :

$$\underline{E}_g - j\omega \underline{\Phi}_{\text{ext}} + \underline{U}_b = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = \left[R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \underline{I} = \underline{Z} \underline{I} \quad (4.4)$$

Suma termenilor din membrul stâng este *tensiunea aplicată* sub formă complexă:

$$\underline{U}_a = \underline{E}_g - j\omega \underline{\Phi}_{\text{ext}} + \underline{U}_b \quad (4.5)$$

și are aceeași interpretare fizică cu tensiunea sub formă instantanee " u_a " dată de (4.3).

Cu notațiile făcute, relația (4.4) se scrie :

$$\underline{U}_a = \underline{Z} \underline{I} \quad (4.6)$$

Și *teorema lui Joubert* se enunță astfel: "tensiunea aplicată unei laturi de circuit este egală cu produsul dintre impedanța laturii și curentul din acea latură". Evident tensiunea aplicată conține mai mulți termeni (4.5).

4.2 Circuite cuplate magnetic

Considerăm două bobine de inductivități proprii L_k și L_j , parcurse de curenții i_k și i_j (care fac parte dintr-un circuit mai mare), și care sunt cuplate magnetic între ele, o parte din fluxul produs de bobina k ajunge să treacă și prin bobina j și reciproc: $L_{jk} = L_{kj}$ este inductivitatea mutuală, de cuplaj între cele două bobine (figura 4.3).

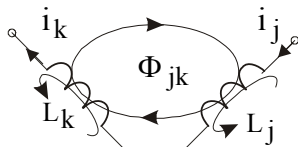


Fig 4.3

Bobina L_k produce un flux magnetic, o parte din acesta (Φ_{jk}) trece și prin bobina L_j . Dacă fluxul mutual Φ_{jk} (primul indice arată prin care bobină trece și al doilea cine l-a creat) are același sens cu fluxul propriu al bobinei L_j (întărindu-l pe acesta) se spune că

bobinele sunt cuplate magnetic *adițional* ($L_{jk} > 0$).

Dacă fluxul magnetic mutual Φ_{jk} slăbește fluxul magnetic propriu al bobinei L_j (sens contrar cu acesta), deci $\Phi_{jk} < 0$, se spune că cele două bobine sunt cuplate magnetic *diferențial* ($L_{jk} < 0$).

Semnul inductivității mutuale dintre două bobine depinde de trei factori:

- poziția spațială relativă a celor două bobine; (rotind una dintre bobine cu π , se schimbă semnul cuplajului)
- sensul de înfășurare a spirelor fiecărei bobine;
- sensul curenților prin cele două bobine.

Primii doi factori depind de construcția bobinelor (proiectant) și se marchează bornele bobinelor pe schemă cu un asterisc (*), rămânând a se judeca semnul cuplajului doar în raport cu sensurile celor doi curenți (dacă ambii intră sau ambii ies din bornele marcate, cuplajul este

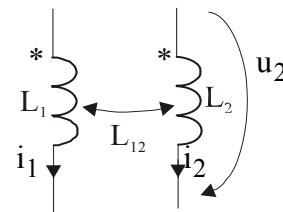


Fig 4.4

adițional). Când unul intră în borna marcată și celălalt iese, evident cuplajul este diferențial. Pentru situația din figura 4.4, cuplajul este adițional ($L_{12} = L_{21} > 0$) și tensiunea la bornele bobinei L_2 este formată atât din tensiunea autoindusă cât și de tensiunea indusă de către curențul i_1 prin cuplajul L_{12} :

$$u_2 = \frac{d\Phi_{22}}{dt} + \frac{d\Phi_{21}}{dt} = \underbrace{L_2 \frac{di_2}{dt}}_{\text{tensiunea autoindusă}} + \underbrace{L_{21} \frac{di_1}{dt}}_{\text{tensiunea indusă prin cuplaj magnetic}} \quad (4.7)$$

Expresia acestei tensiuni în regim sinusoidal poate fi scrisă în valori complexe sub forma:

$$\underline{U}_2 = j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega L_{12} \underline{I}_1 \quad (4.8)$$

Dacă tensiunea autoindusă și cea indusă prin cuplaj magnetic la bornele unei bobine au același sens (deci se adună), atunci cuplajul este adițional.

4.3 Impedanțe mutuale

Considerăm o bobină j dintr-un circuit având inductivitatea proprie L_j care este *cuplată magnetic* cu alte m bobine din circuit, fluxul magnetic total (obținut prin suprapunerea algebrică a fluxurilor componente) produs de cele m bobine prin suprafața bobinei j este $\Phi_{j\text{ext}}$ (figura 4.5).

Acest flux, se poate scrie sub forma:

$$\Phi_{j\text{ext}} = \sum_{k=1}^m L_{jk}^{\pm} i_k \quad (4.9)$$

unde $(\pm L_{jk})$ este *inductivitatea mutuală* dintre bobina j și k (la poziție relativă și sens de înfășurare date, semnul lui L_{jk} depinde doar de sensul celor doi curenți i_j și i_k).

T.e.m. indusă în bobina j de fluxul mutual este:

$$e_{j\text{ext}} = -\frac{d\Phi_{j\text{ext}}}{dt} = -\sum_{k=1}^m L_{jk} \frac{di_k}{dt} \quad (4.10)$$

Scrisă în valori complexe această t.e.m. devine:

$$\underline{E}_{j\text{ext}} = -\sum_{k=1}^m j\omega L_{jk} \underline{I}_k \quad (4.11)$$

$$\text{Notăm:} \quad \underline{Z}_{jk} = j\omega L_{jk} = jX_{jk} = \underline{Z}_{kj} \quad (4.12)$$

Unde $\underline{Z}_{jk} = \underline{Z}_{kj}$ este *impedanța mutuală* dintre cele două bobine (X_{jk}^{\pm}) este *reactanța de cuplaj*.

T.e.m. \underline{E}_{jk} indusă prin cuplajul L_{jk} este o parte din t.e.m. $\underline{E}_{j\text{ext}}$. Mărimea $\underline{U}_{jk} = -\underline{E}_{jk} = jX_{jk} I_k$ este *căderea de tensiune pe impedanța mutuală* egală și de sens contrar cu t.e.m. indusă prin cuplajul L_{jk} .

Ținând seama de aceste mărimi, tensiunea aplicată laturii j se poate scrie (pe baza relației 4.5) sub forma:

$$\underline{U}_{aj} = \underline{E}_{gj} + \underline{U}_{bj} - \sum_{k=1}^m \underline{Z}_{jk} I_k \quad (4.13)$$

Și cum $\underline{U}_{aj} = \underline{Z}_j I_j$, teorema lui Joubert se scrie în complex sub forma:

$$\underline{E}_{gj} + \underline{U}_{bj} = \underline{Z}_j I_j + \sum_{k=1}^m \underline{Z}_{jk} I_k \quad (4.14)$$

Dacă \underline{U}_{bj} se asociază cu I_j după regula de la generatoare, se schimbă semnul lui \underline{U}_{bj} în relația (4.14), iar dacă sensul t.e.m. a sursei \underline{E}_{gj} este contrar cu I_j se schimbă sensul lui \underline{E}_{gj} . De obicei, ca să nu se greșească și pentru a scrie unitar relațiile, toate mărimile care se referă la o latură ($\underline{I}, \underline{E}, \underline{U} \dots$) au același *sens de referință*.

4.4. Impedanțe și admitanțe echivalente

Impedanța echivalentă în raport cu două borne ale unui circuit se definește ca raportul dintre \underline{U} și \underline{I} la bornele respective:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = R_e + jX_e \quad (4.15)$$

iar admitanța echivalentă este: $\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = G_e + jB_e \quad (4.16)$

4.4.1 Circuite în serie, necuplate inductiv

Considerăm un circuit format din mai mulți dipoli activi legați în serie, fiecare având impedanțele $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \dots$ și t.e.m. $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \dots$.

Ansamblul acestora poate fi înlocuit cu dipolul echivalent având parametrii

\underline{Z}_e și \underline{E}_e (figura 4.6).

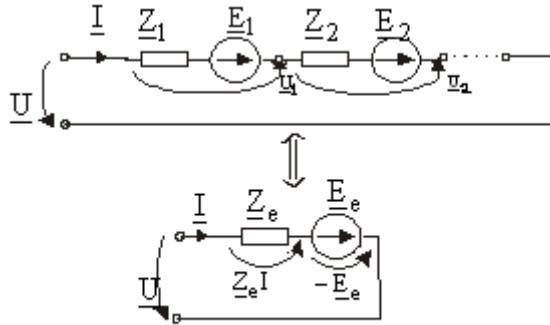


Fig 4.6

este:

Tensiunea la bornele dipolului k va fi :

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I} - \underline{E}_k \quad (4.17)$$

iar la bornele ansamblului ea este (ținând seama că $\underline{I}_1 = \underline{I}_2 = \dots = \underline{I}_n = \underline{I}$)

Pentru dipolul echivalent ecuația de tensiuni

$$\begin{cases} \underline{U} = \sum_{k=1}^n \underline{U}_k = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \underline{I} - \sum_{k=1}^n \underline{E}_k = \underline{I} \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k - \sum_{k=1}^n \underline{E}_k \\ \underline{U} = \underline{Z}_e \underline{I} - \underline{E}_e \end{cases} \quad (4.18)$$

Prin identificare între relațiile precedente se poate scrie:

$$\begin{cases} \underline{Z}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n \\ \underline{E}_e = \sum_{k=1}^n \underline{E}_k = \underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \dots + \underline{E}_n \end{cases} \begin{cases} R_e = \sum_{k=1}^n R_k^+ \\ X_e = \sum_{k=1}^n X_k^{\mp} \end{cases} \quad (4.19)$$

Expresia $\underline{Z}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$ spune că impedanța echivalentă la legarea în

serie se poate obține prin compunerea geometrică a impedanțelor componente în planul \underline{Z} (figura 4.7).

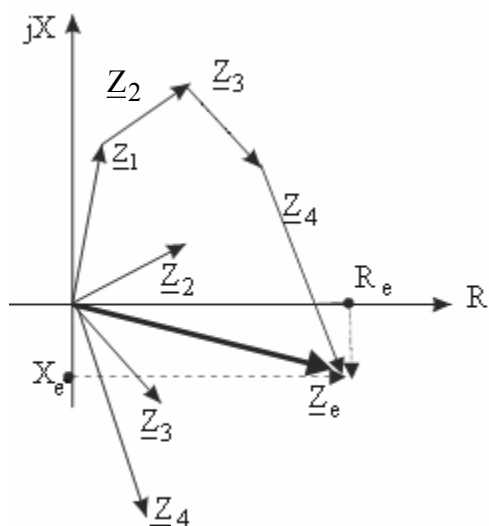


Fig 4.7

Proiecția lui \underline{Z}_e pe axa reală este rezistența echivalentă $R_e > 0$ iar proiecția pe axa imaginară este X_e ($X_e > 0$ – circuit inductiv, iar $X_e < 0$ – circuit capacitiv). Deci:

$$\begin{cases} R_e = \sum R_k^+ \\ X_e = \sum X_k^\pm \end{cases} \quad (4.20)$$

Dacă se conectează în serie mai multe surse reale de curent (fiecare având un curent \underline{I}_{sc_k} în paralel cu impedanța internă \underline{Z}_k) ca în figura 4.8, se poate arăta că dipolul echivalent va avea parametrii:

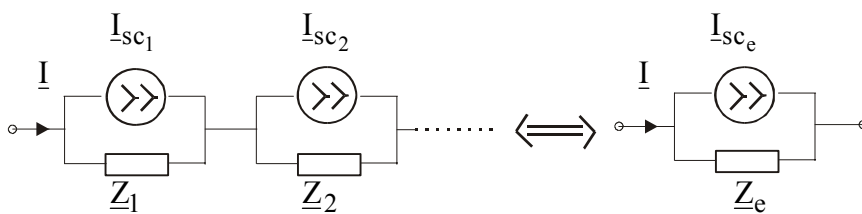


Fig 4.8

$$\underline{Z}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k ; \quad \underline{I}_{sc_e} = \frac{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k \underline{I}_{sc_k}}{\sum_{k=1}^n \underline{Z}_k} \quad (4.21)$$

Circuitul echivalent serie în c.c. este caracterizat prin rezistența echivalentă R_e și t.e.m. echivalentă E_e :

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k ; \quad E_e = \sum_{k=1}^n E_k \quad (4.22)$$

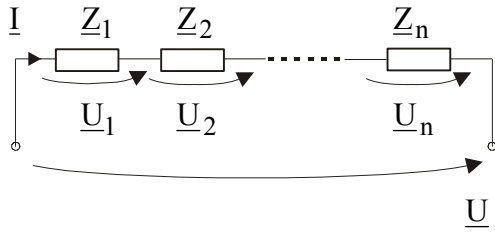
Divizoare de tensiune

Fig 4.9

Mai multe impedanțe în serie (figura 4.9) se spune că divid tensiunea la borne \underline{U} în mai multe fracțiuni:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_e} \underline{U}; \underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I} = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_e} \underline{U} \quad (4.23)$$

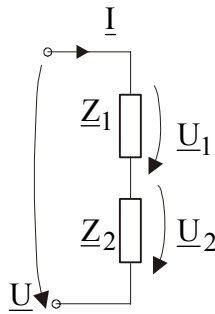


Fig 4.10

Divizoarele de tensiune frecvent utilizate divid tensiunea \underline{U} în două fracțiuni \underline{U}_1 și \underline{U}_2 :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U} = \underline{k}_1 \underline{U} \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U} = \underline{k}_2 \underline{U} \end{cases} ; \text{ sau } \begin{cases} \underline{U}_1 = \frac{\underline{Y}_e}{\underline{Z}_1} \underline{U} \\ \underline{U}_2 = \frac{\underline{Y}_e}{\underline{Z}_2} \underline{U} \end{cases}$$

(4.24)

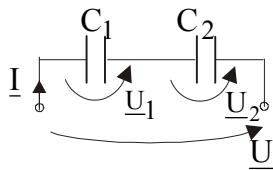


Fig 4.11

Se obține o divizare propriu-zisă doar dacă $\underline{k}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ și \underline{k}_2 sunt în modul mai mici ca 1, respectiv $|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2| > \underline{Z}_1$ și $|\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2| > \underline{Z}_2$.

O divizare se obține cu două rezistențe în serie (divizor rezistiv) utilizat frecvent în tehnica curenților slabi sau cu două condensatoare în serie (divizor capacitiv) utilizat în tehnica curenților tari (nu consumă putere).

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \frac{1}{j\omega C_1} \underline{I} = \frac{1}{j\omega C_1} (j\omega C_e \underline{U}) = \frac{C_e}{C_1} \underline{U} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \underline{U} \\ \underline{U}_2 = \frac{C_e}{C_2} \underline{U} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \underline{U} \end{cases} \quad (4.25)$$

În acest caz \underline{U}_1 și \underline{U}_2 sunt mai mici ca \underline{U} și în faza cu aceasta, deci este o divizare corectă.

Observație: Pentru o conexiune de elemente simple în serie se obține:

$$R_e = \sum_{k=1}^n R_k; L_e = \sum_{k=1}^n L_k; \frac{1}{C_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}; \left(S_e = \sum_{k=1}^n S_k \right) \quad (4.26)$$

unde $S = \frac{1}{C}$ este elastața unui condensator $[F^{-1}]$.

4.4.2 Circuite paralel, necuplate inductiv

Considerăm n dipoli activi (fiecare cu \underline{Y}_k și \underline{E}_k în serie) legați în paralel ca în figura 4.12 și dorim să determinăm parametrii \underline{Y}_e și \underline{E}_e ai dipolului echivalent.

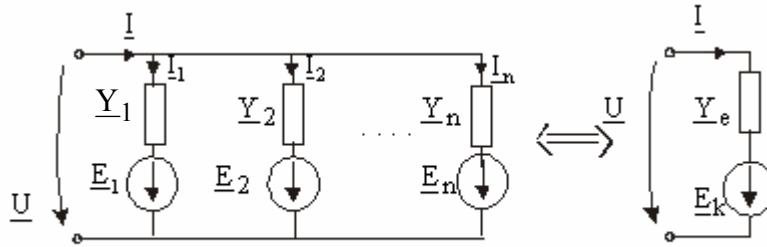


Fig 4.12

Curentul absorbit pe la borne este: $\underline{I} = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \dots + \underline{I}_n \quad (4.27)$

Pentru dipolul de pe ramura k se poate scrie: $\underline{I}_k = \underline{Y}_k (\underline{U} + \underline{E}_k)$.
Deci:

$$\underline{I} = \sum_{k=1}^n \underline{I}_k = \underline{U} \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k + \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \underline{E}_k = \left[\underline{U} + \frac{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \underline{E}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k} \right] \cdot \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \quad (4.28)$$

Pentru dipolul echivalent se poate scrie: $\underline{I} = \underline{Y}_e (\underline{U} + \underline{E}_e)$.

Prin identificare între relațiile precedente se obține:

$$\underline{Y}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k = \sum_{k=1}^n (G_k + jB_k) \quad \left\{ \begin{array}{l} G_e = \sum_{k=1}^n G_k^+ \\ B_e = \sum_{k=1}^n B_k^+ \end{array} \right. \quad (4.29)$$

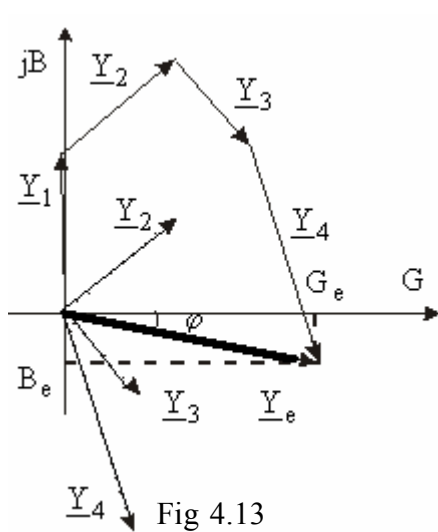


Fig. 4.13

$$\underline{E}_e = \frac{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \underline{E}_k}{\sum_{k=1}^n \underline{Y}_k} \quad (4.30)$$

Admitanța echivalentă dată de (4.29) corespunde unei însumări a admitanțelor în planul \underline{Y} , cu regula poligonului (fig. 4.13). Proiecția lui \underline{Y}_e pe axa reală este G_e , iar proiecția pe axa imaginară este B_e . ($B_e > 0$ – circuit capacitiv, $B_e < 0$ – circuit inductiv).

T.e.m. echivalentă dată de (4.30) este valabilă chiar dacă nu toate ramurile au t.e.m. \underline{E}_k (cele care nu au sursă se consideră $\underline{E}_k = 0$), iar acolo unde sursa \underline{E}_k este așezată invers se consideră cu $-\underline{E}_k$.

Pentru o conexiune de elemente simple în paralel, parametrii echivalenței sunt:

$$\frac{1}{R_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}; \quad G_e = \sum_{k=1}^n G_k; \quad \frac{1}{L_e} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}; \quad C_e = \sum_{k=1}^n C_k \quad (4.31)$$

Dacă vom avea surse reale de curent în paralel (figura 4.14), parametrii dipolului echivalent se deduc similar:

$$\underline{Y}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k \quad ; \quad \underline{I}_{sc_e} = \sum_{k=1}^n \underline{I}_{sc_k} \quad (4.32)$$

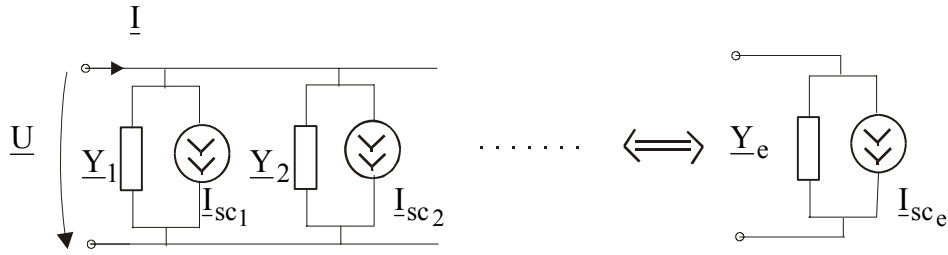


Fig 4.14

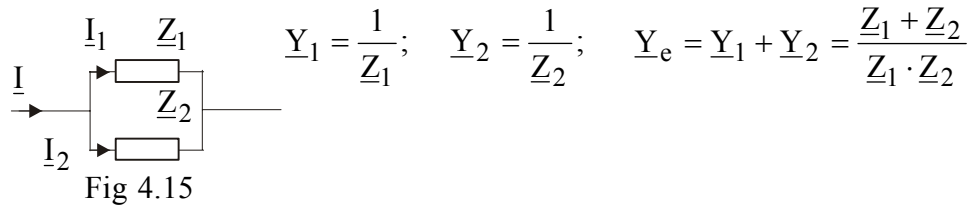
Divizoare de curent

Un circuit pasiv format din mai multe ramuri în paralel

($\underline{Y}_e = \sum_{k=1}^n \underline{Y}_k$) divizează curentul \underline{I} în fracțiunile $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \dots$. Dar:

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{Y}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{Y}_2} = \dots = \frac{\underline{I}_n}{\underline{Y}_n} = \frac{\underline{I}}{\underline{Y}_e} \rightarrow \underline{I}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_e} \underline{I} \quad (4.33)$$

Pe baza relației (4.33) se poate calcula curentul care se ramifică prin ramura k ca o fracțiune din curentul total \underline{I} . Un divizor cu două impedanțe în paralel (fig 4.15) realizează o divizare de curent:



$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_e} \underline{I} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I} = \underline{k}_1 \underline{I} \\ \underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_e} \underline{I} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{I} = \underline{k}_2 \underline{I} \end{cases} \quad (4.34)$$

Relațiile (4.34), numite și *regula divizorului de curent* realizează o divizare propriu-zisă doar dacă $|\underline{k}_1| < 1$ și $|\underline{k}_2| < 1$. Divizoare se realizează cu două rezistențe în paralel; în acest caz cei doi curenți sunt mai mici ca \underline{I} și sunt în fază cu el.

Aplicație: Circuitului din figura 4.16 i se aplică tensiunea $u = \sqrt{2} \sin 314t$, iar elementele au valorile $R = \frac{1}{4} \Omega$; $X_L = \frac{1}{3} \Omega$. Să se determine curenții și puterile absorbite.

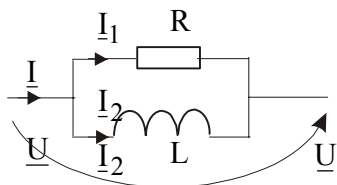


Fig 4.16

$$\underline{Y}_1 = G_1 = \frac{1}{R} = 4 \Omega^{-1};$$

$$\underline{Y}_2 = \frac{1}{jX_L} = -j3 \Omega^{-1};$$

$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = 4 - j3 = 5 \angle -37^\circ \text{ A}$$

Curentul total absorbit este: $\underline{I} = \underline{Y}_e \underline{U} = 100 \angle -37^\circ \text{ A}$

Curenții prin cele două laturi sunt:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_e} \underline{I} = \frac{4}{5 \angle -37^\circ} 100 \angle -37^\circ = 80 \text{ A} \quad \text{sau:} \quad \underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{R} = \frac{20}{1/4} = 80 \text{ A}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_e} \underline{I} = \frac{-j3}{5 \angle -37^\circ} 100 \angle -37^\circ = -j60 \text{ A} \quad \text{sau:} \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{jX_L} = \frac{20}{j1/3} = -j60 \text{ A}$$

și au reprezentarea fazorială din figura 4.17.

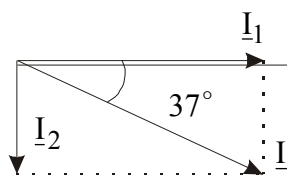


Fig 4.17

Valoarea instantanee a curentului are expresia :

$$i = \sqrt{2} 100 \sin(314t - 37^\circ)$$

Puterea complexă absorbită de circuit are expresia:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = 20 \cdot 100 \angle -37^\circ = 2000 \angle -37^\circ = (1600 + j1200) \text{ VA}$$

Puterile consumate de cele două ramuri sunt:

$$P = RI_1^2 = \frac{1}{4} \cdot 80^2 = 1600 \text{ W} \quad Q = X_L I_2^2 = \frac{1}{3} \cdot 60^2 = 1200 \text{ VAR}$$

4.4.3 Impedanța echivalentă pentru circuite în scară

În figura 4.18 sunt prezentate două circuite formate din mai multe impedanțe conectate în scară (sau în cascadă). Impedanța echivalentă se poate deduce din aproape în aproape considerând că fiecare element este legat în serie (sau în paralel) cu întreg circuitul aflat în dreapta sa. În prima schemă Z_1, Z_3, Z_5, \dots sunt impedanțele longitudinale iar Z_2, Z_4, Z_6, \dots sunt impedanțele transversale.

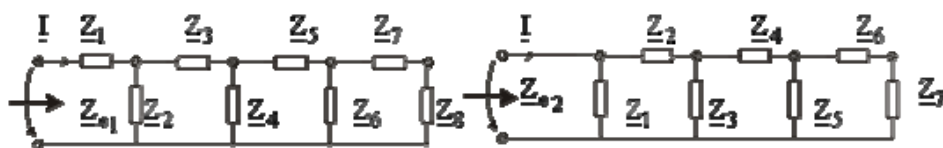


Fig 4.18

$$Z_{e1} = Z_1 + \frac{1}{\frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3 + \frac{1}{\frac{1}{Z_4} + \frac{1}{Z_5 + \frac{1}{\frac{1}{Z_6} + \frac{1}{Z_7 + Z_8}}}}}}$$

$$Z_{e2} = \frac{1}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2 + \frac{1}{\frac{1}{Z_3} + \frac{1}{Z_4 + \frac{1}{\frac{1}{Z_5} + \frac{1}{Z_6 + Z_7}}}}}}$$

Cele două impedanțe echivalente sunt scrise sub forma unor fracții continue (funcții Stieljes), expresia lor diferă dacă la intrare există sau nu un element pe ramura longitudinală.

Observație: Un dipol pasiv admite o impedanță echivalentă cu elementele (R,X) în serie sau o admitanță echivalentă cu (G,B) în paralel, ca în figura 4.19.

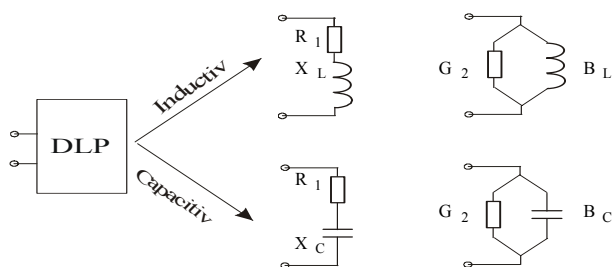


Fig 4.19

Dacă pentru un dipol pasiv, figura 4.19, se cunosc mărimile (R, X) i se asociază o schemă serie de tip RL sau RC în funcție de semnul lui X^\pm . Dacă sunt precizate mărimile (G, B) se asociază o schemă paralel GL sau GC, după semnul lui B^\pm .

4.4.4 Impedanța echivalentă a circuitelor cuplate

A. Circuite cu conexiune serie, cuplate magnetic

Considerăm două bobine cu parametrii (R_1, L_1) și (R_2, L_2) cuplate magnetic (figura 4.20), inductivitatea mutuală dintre ele fiind $\pm L_{12}$, după cum cuplajul este adițional sau diferențial.

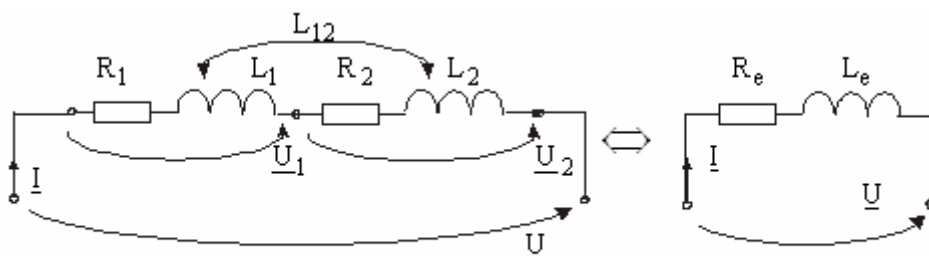
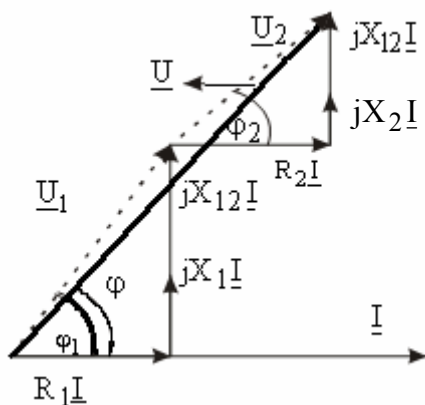


Fig 4.20



Tensiunile de la bornele celor două bobine se pot scrie cu teorema lui Joubert:

$$\underline{U}_1 = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I} \pm j\omega L_{12} \underline{I}$$

$$\underline{U}_2 = (R_2 + j\omega L_2) \underline{I} \pm j\omega L_{12} \underline{I}$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = (\underline{R}_1 + \underline{R}_2) \underline{I} + j\omega(L_1 + L_2 \pm 2L_{12}) \underline{I} \rightarrow \begin{cases} R_e = R_1 + R_2 \\ L_e = L_1 + L_2 \pm 2L_{12} \end{cases} \quad (4.35)$$

Compunerea tensiunilor \underline{U}_1 și \underline{U}_2 este reprezentată în diagrama fazorială din figura 4.20. Parametrii echivalenți (4.35) sunt R_e și L_e . Dacă două bobine se leagă în serie adițional și se măsoară $L_a = L_1 + L_2 + 2L_{12}$ și apoi inversăm bornele la una dintre bobine, atunci ele vor fi legate în serie diferențial: $L_d = L_1 + L_2 - 2L_{12}$. Având valorile L_a și L_d se poate deduce valoarea inductivității mutuale (de cuplaj) dintre ele:

$$L_{12} = \frac{L_a - L_d}{4}$$

Observație: Inductivitatea mutuală L_{12} dintre două bobine separate galvanic se poate măsura pe baza schemei din figura 4.20'. Un ampermetru are $R_A \ll$ deci nu influențează curentul \underline{I}_1 , iar voltmetrul are $R_V \gg$, deci $\underline{I}_2 \ll$, practic nul.

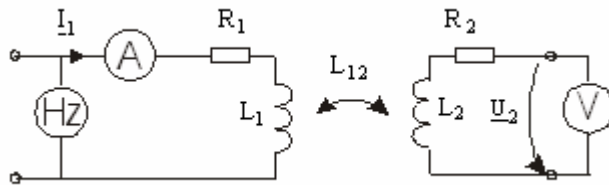


Fig 4.20'

$$\underline{U}_2 = (\underline{R}_2 + jX_2) \underline{I}_2 \pm jX_{12} \underline{I}_1 = \pm jX_{12} \underline{I}_1$$

Curentul I_1 se măsoară la ampermetru, iar U_2 la voltmetru, deci:

$$X_{12} = \omega L_{12} = \frac{U_2}{I_1} \rightarrow L_{12} = \frac{U_2}{\omega I_1} \quad (4.35')$$

Dacă nu se cunoaște frecvența de lucru, se poate monta și un hertzmetru și $\omega = 2\pi f$.

B. Circuite paralel, cuplate mutual

Considerăm două bobine cu parametrii (R_1, L_1) și (R_2, L_2) cuplate magnetic prin L_{12} și legate în paralel ca în figura 4.21 și dorim să determinăm parametrii echivalenți (R_e, L_e) .

Pentru circuitul paralel din figura 4.21 ecuațiile de tensiuni se scriu sub forma:

$$\begin{cases} \underline{U} = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 \pm j\omega L_{12} \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \pm jX_{12} \underline{I}_2 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 \pm \underline{Z}_m \underline{I}_2 \\ \underline{U} = (R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_2 \pm j\omega L_{12} \underline{I}_1 = \pm jX_{12} \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 = \pm \underline{Z}_m \underline{I}_1 + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \\ \underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \end{cases} \quad (4.36)$$

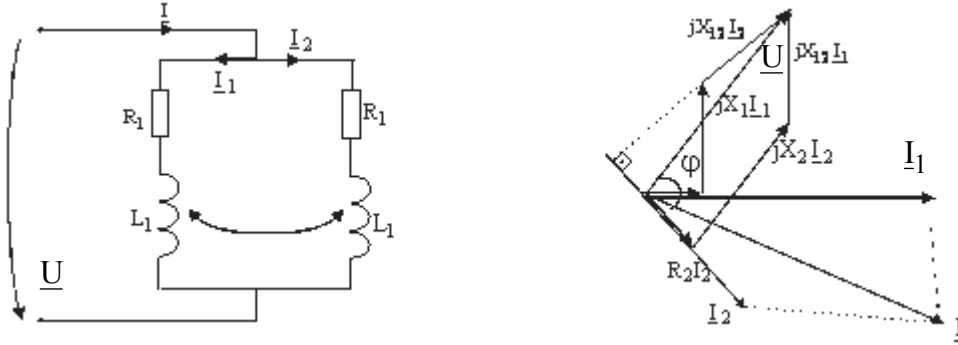


Fig 4.21

Dar :

$$\underline{U} = (\underline{Z}_1 \underline{I}_1 \pm \underline{Z}_m \underline{I}_2) = (\underline{Z}_2 \underline{I}_2 \pm \underline{Z}_m \underline{I}_1) \rightarrow \underline{I}_1 (\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_m) = \underline{I}_2 (\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_m) \quad (4.37)$$

Impedanța echivalentă în raport cu bornele de alimentare este:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}_1 + \underline{I}_2} = \frac{\underline{I}_1 \left[\underline{Z}_1 \pm \underline{Z}_m \frac{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_m}{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_m} \right]}{\underline{I}_1 \left[1 + \frac{\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_m}{\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_m} \right]} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_1 \underline{Z}_m \pm \underline{Z}_1 \underline{Z}_m - \underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_m} \quad (4.38)$$

Impedanța mutuală dintre cele două ramuri este: $\underline{Z}_m = j\underline{X}_m = j\omega L_{12}$ iar $\underline{Z}_m^2 = -X_m^2$, respectiv impedanța echivalentă \underline{Z}_e din (4.38) se scrie astfel:

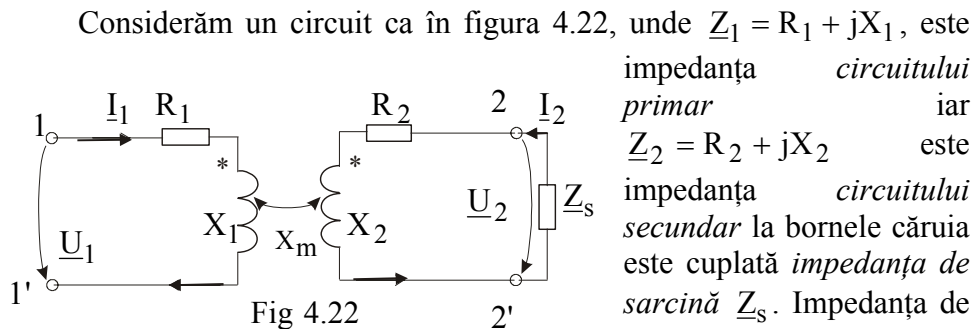
$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_m} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 + X_m^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp j2X_m} \quad (4.39)$$

Primul semn de la numitor corespunde cuplajului adițional, iar al doilea corespunde cuplajului diferențial între ramuri.

În particular, dacă cele două ramuri nu sunt cuplate magnetic se obține cunoscuta expresie pentru impedanța echivalentă a două ramuri în paralel:

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad (4.40)$$

4.4.5 Impedanța echivalentă a circuitelor cuplate de tip transformator



Considerăm un circuit ca în figura 4.22, unde $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$, este impedanța circuitului primar iar $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$ este impedanța circuitului secundar la bornele căruia este cuplată impedanța de sarcină \underline{Z}_s . Impedanța de cuplaj magnetic între primar și secundar este $\underline{Z}_m = jX_m = j\omega L_{12}$. Tensiunea de alimentare la bornele primarului 1-1' este \underline{U}_1 , iar la bornele secundarului 2-2' este \underline{U}_2 .

Dorim să stabilim o schemă echivalentă fără cuplaje mutuale pentru circuitul din figura 4.22, precum și să determinăm impedanța echivalentă $\underline{Z}_{e_{11'}}$ a întregului circuit în raport cu bornele de intrare 1-1'.

Ecuatiile de tensiuni ale circuitului sunt de forma:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{Z}_m \underline{I}_2 \\ 0 = \underline{Z}_m \underline{I}_1 + (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s) \underline{I}_2 \end{cases} \quad (\pm jX_m \underline{I}_1) \Rightarrow \begin{cases} R_1 \underline{I}_1 + j(X_1 - X_m) \underline{I}_1 + jX_m (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = \underline{U}_1 \\ jX_m (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) + R_2 \underline{I}_2 + j(X_2 - X_m) \underline{I}_2 + \underline{Z}_s \underline{I}_2 = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Ecuatiile (4.41) s-au obținut adunând și scăzând în cele două ecuații termenul $jX_m \underline{I}_1$ respectiv $jX_m \underline{I}_2$. Ecuatiilor (4.41) le corespund o schemă echivalentă ca în figura 4.23, care este o *schemă fără cuplaje magnetice*. Scriind ecuațiile de tensiuni pentru cele două ochiuri ale schemei echivalente (figura 4.23), ele sunt identice cu ecuațiile (4.41) scrise pentru schema cu cuplaje din figura 4.22.

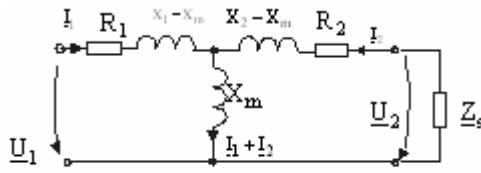


Fig. 4.23

Comparând schemele din figura 4.22 și figura 4.23, se vede care ar fi regula de a elimina cuplajul magnetic dintre două bobine. Prin înlocuirea unei scheme cu cuplaje prin una fără cuplaje, ecuațiile de tensiuni nu trebuie să se modifice.

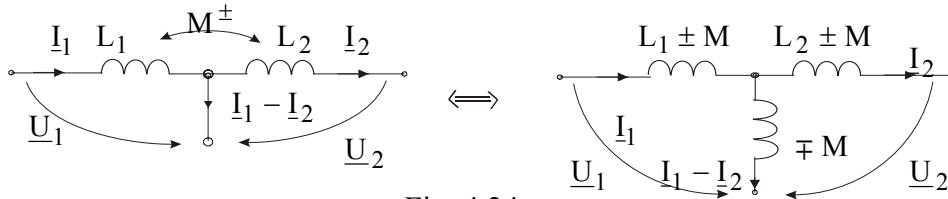


Fig. 4.24

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega L_1 I_1 \pm j\omega M I_2 \\ \underline{U}_2 = -j\omega L_2 I_2 \mp j\omega M I_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega (L_1 \pm M) I_1 \mp jM (I_1 - I_2) \\ \underline{U}_2 = -j\omega (L_2 \pm M) I_2 \mp j\omega M (I_1 - I_2) \end{cases}$$

În figura 4.24 cu M s-a notat inductivitatea mutuală dintre cele două bobine, iar în schema fără cuplaje din dreapta figurii 4.24 prin “ M ” înțelegem o bobină cu inductivitatea proprie M iar prin “ $-M$ ” înțelegem un condensator cu reactanța $X_C = \frac{1}{\omega C} = \omega M \rightarrow C = \frac{1}{\omega^2 M}$. Alte situații posibile

ilustrăm în figura 4.25 pentru cazul în care convenția de asociere a sensurilor (\underline{U}_1, I_1) și (\underline{U}_2, I_2) la cele două porți este diferită.

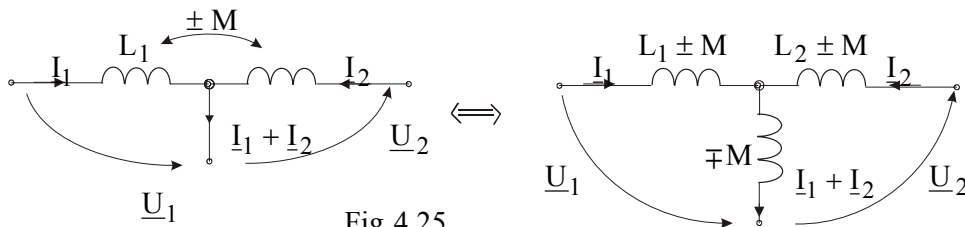


Fig. 4.25

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega L_1 I_1 \pm jM I_2 \\ \underline{U}_2 = -j\omega L_2 I_2 \mp j\omega M I_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \underline{U}_1 = j\omega (L_1 \mp M) I_1 \pm jM (I_1 + I_2) \\ \underline{U}_2 = -j\omega (L_2 \mp M) I_2 \mp j\omega M (I_1 + I_2) \end{cases}$$

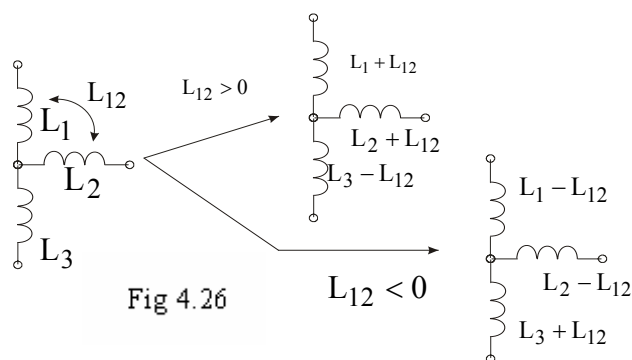


Fig 4.26

O altă situație este prezentată în figura (4.26).

Revenind la impedanțele primare și secundare cuplate ca în figura 4.22, dorim să determinăm *impedanța echivalentă* a întregului circuit în raport cu bornele de intrare 1-1' ($\underline{Z}_{e_{11'}}$):

Din ecuațiile de tensiuni scrise pe circuitul secundar (4.41) rezultă:

$$\underline{I}_2 = \frac{-\underline{Z}_m}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} \underline{I}_1 \rightarrow \underline{U}_1 = \left(\underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} \right) \underline{I}_1 \quad (4.42)$$

$$\text{Atunci: } \underline{Z}_{e_{11'}} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{X}_m^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{X}_m^2}{\underline{Z}_{2t}} \quad (4.43)$$

unde \underline{Z}_{2t} este *impedanța totală* a circuitului secundar:

$$\underline{Z}_{2t} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_s = (R_2 + R_s) + j(X_2 + X_s) = R_{2t} + jX_{2t} \quad (4.44)$$

Impedanța:

$$\underline{Z}'_2 = \frac{-\underline{Z}_m^2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_s} = \frac{\underline{X}_m^2}{\underline{Z}_{2t}^*} \underline{Z}_{2t}^* = \alpha_{12}^2 \underline{Z}_{2t}^* = \alpha_{12}^2 (R_{2t} - jX_{2t}) = R'_2 + jX'_2 \quad (4.45)$$

reprezintă *impedanța secundarului reflectată în primar* iar mărimea:

$$\alpha_{12}^2 = \frac{\underline{X}_m^2}{\underline{Z}_{2t}^2} = \frac{\underline{X}_m^2}{R_{2t}^2 + X_{2t}^2} \quad (4.46)$$

reprezintă *coeficientul de reflexie* al impedanței secundare în primar.

Mărima R_2' este *rezistența secundarului reflectată în primar*:

$$R_2' = \alpha_{12}^2 R_{2t} = \alpha_{12}^2 (R_2 + R_s) \geq 0 \quad (4.47)$$

respectiv $(R_2 + R_s)$ prin reflectare se simt tot ca o rezistență în primar, dar de valoare R_2' . Mărima X_2' este *reactanța secundarului reflectată în primar*:

$$X_2' = -\alpha_{12}^2 (X_2 + X_s) \quad (4.48)$$

respectiv reactanța secundarului $(X_2 + X_s)$ prin reflectare își schimbă atât valoarea cât și semnul, deci se va simți în primar cu valoarea $\alpha_{12}^2 (X_2 + X_s)$ și dacă a avut caracter inductiv va avea după reflectare caracter capacitiv și reciproc.

Conform relației (4.43) impedanța echivalentă la bornele 1-1' se poate scrie sub forma:

$$\underline{Z}_{e_{11'}} = \underline{Z}_1 + \frac{X_m^2}{\underline{Z}_{2t}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2' = [R_1 + \alpha_{12}^2 (R_2 + R_s)] + j[X_1 - \alpha_{12}^2 (X_2 + X_s)] = R_e + jX_e \quad (4.49)$$

Rezistența și reactanța echivalentă vor avea valorile:

$$\begin{cases} R_{e_{11'}} = R_1 + \alpha_{12}^2 (R_2 + R_s) \\ X_{e_{11'}} = X_1 - \alpha_{12}^2 (X_2 + X_s) \end{cases} \quad (4.50)$$

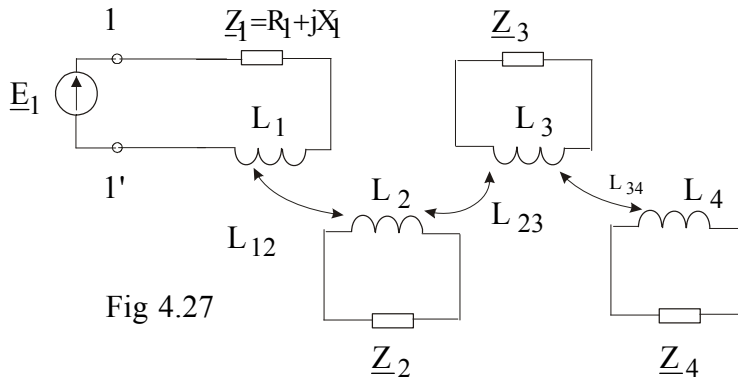


Fig 4.27

Dacă avem un sistem de mai multe circuite cuplate în lanț (figura 4.27), impedanța echivalentă în raport cu bornele 1-1' se deduce succesiv prin reflectarea impedanțelor din circuitul 4 în 3, apoi din 3 în 2 și împreună din 2 în 1 și este $\underline{Z}_{e_{11'}} = R_{e_{11'}} + jX_{e_{11'}}$. Coeficienții de reflexie de forma (4.46)

permit să scriem parametrii echivalenți.

$$\alpha_{12}^2 = \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + (X_2 + \omega L_2)^2}; \alpha_{23}^2 = \frac{X_{23}^2}{R_3^2 + (X_3 + \omega L_3)^2}; \alpha_{34}^2 = \frac{X_{34}^2}{R_4^2 + (X_4 + \omega L_4)^2}$$

$$\begin{cases} R_{e_{11'}} = R_1 + \alpha_{12}^2 \left(R_2 + \alpha_{23}^2 \left(R_3 + \alpha_{34}^2 R_4 \right) \right) \\ X_{e_{11'}} = (X_1 + \omega L_1) - \alpha_{12}^2 \left[(X_2 + \omega L_2) - \alpha_{23}^2 \left((X_3 + \omega L_3) - \alpha_{34}^2 (X_4 + \omega L_4) \right) \right] \\ \underline{Z}_{e_{11'}} = R_{e_{11'}} + jX_{e_{11'}} \end{cases} \quad (4.51)$$

Sau, pentru aceeași schemă din figura 4.27, impedanța echivalentă în raport cu bornele sursei 1-1' se poate scrie sub forma (privite ca circuite în scară)

$$\underline{Z}_{e_{11'}} = (\underline{Z}_1 + j\omega L_1) + \frac{X_{12}^2}{(\underline{Z}_2 + j\omega L_2) + \frac{X_{23}^2}{(\underline{Z}_3 + j\omega L_3) + \frac{X_{34}^2}{(\underline{Z}_4 + j\omega L_4)}}} = R_{e_{11'}} + jX_{e_{11'}} \quad (4.52)$$

Curenții care circulă în subrețelele circuitului din figura 4.27 se pot scrie sub forma:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{e_{11'}}}; \underline{I}_2 = \frac{-jX_{12}}{\underline{Z}_{2e} + j\omega L_2};$$

$$\underline{I}_3 = \frac{-jX_{23}}{\underline{Z}_{3e} + j\omega L_3} \underline{I}_2 = (-j)^2 \frac{X_{12}X_{23}\underline{I}_1}{(\underline{Z}_{2e} + jX_2)(\underline{Z}_{3e} + jX_3)}; \quad (4.53)$$

$$\underline{I}_4 = \frac{-jX_{34}}{\underline{Z}_4 + j\omega L_4} \underline{I}_3 = (-j)^3 \frac{X_{12}X_{23}X_{34}}{(\underline{Z}_{2e} + jX_2)(\underline{Z}_{3e} + jX_3)(\underline{Z}_4 + jX_4)} \underline{I}_1$$

Aplicații:

1. Pentru schema din figura 4.28 se cere să se determine impedanța echivalentă în raport cu bornele A și B.

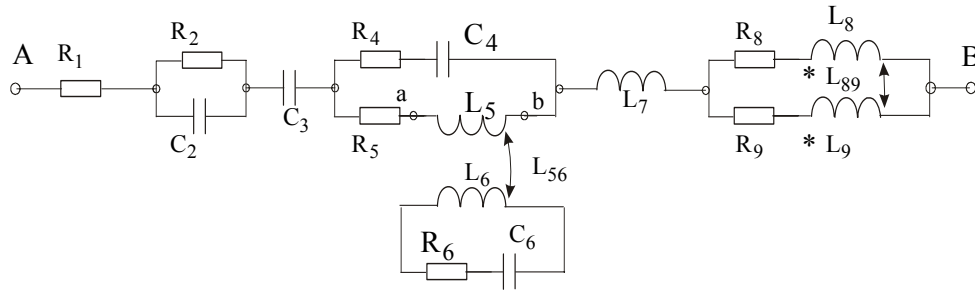


Fig 4.28

Prin cuplajul L_{56} impedanța circuitului 6: $\underline{Z}_6 = R_6 + j \left(\omega L_6 - \frac{1}{\omega C_6} \right)$

se reflectă la bornele a-b ale bobinei L_5 , coeficientul de reflexie este:

$$\alpha_{56}^2 = \frac{X_{56}^2}{R_6^2 + (X_{L_6} - X_{C_6})^2}$$

iar ramurile 8 și 9 sunt două ramuri paralel cuplate magnetic adițional și a căror impedanță echivalentă \underline{Z}_{89} este de forma (4.39).

Între punctele A și B având o structură de circuit serie, impedanța echivalentă se poate scrie succesiv sub forma:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{AB} = & R_1 + \frac{R_2(-jX_{C_2})}{R_2 - jX_{C_2}} - jX_{C_3} + \frac{(R_4 + jX_{C_4}) \cdot \left[(R_5 + \alpha_{56}^2 R_6) + j(X_{L_5} - \alpha_{56}^2 (X_{L_6} - X_{C_6})) \right]}{\left[R_4 + (R_5 + \alpha_{56}^2 R_6) \right] + j \left[-X_{C_4} + X_{L_5} - \alpha_{56}^2 (X_{L_6} - X_{C_6}) \right]} + \\ & + jX_{L_7} + \frac{(R_8 + jX_{L_8}) \cdot (R_9 + jX_{L_9}) + X_{89}^2}{(R_8 + jX_{L_8}) + (R_9 + jX_{L_9}) - j2X_{89}} = R_{AB} + jX_{AB} \end{aligned}$$

2. Pentru schema din figura 4.29 se cere să se determine impedanța (admitanța) echivalentă în raport cu bornele A și B.

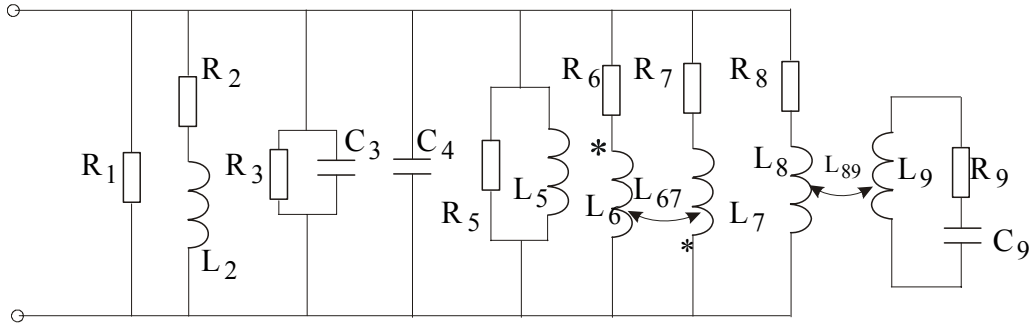


Fig. 4.29

Se observă că impedanța circuitului 9: $\underline{Z}_9 = R_9 + j(X_{L9} - X_{C9})$ se va reflecta prin cuplajul L_{89} la bornele bobinei L_8 . Ramurile 6 și 7 sunt două ramuri paralel cuplate prin L_{67} diferențial.

Circuitul din figura 4.29 fiind o structură de ramuri în paralel (derivație), se va putea scrie impedanța echivalentă \underline{Y}_{AB} sub forma:

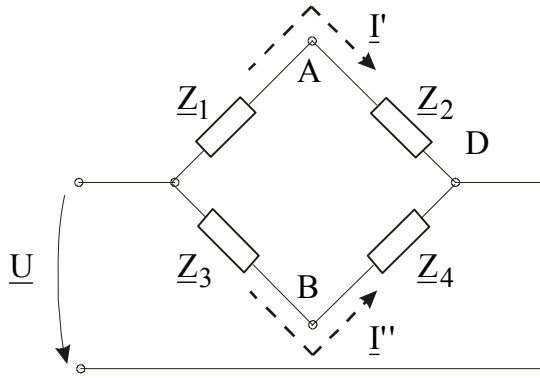
$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + jX_{L2}} + \left(\frac{1}{R_3} + j\omega C_3 \right) + j\omega C_4 + \left(\frac{1}{R_5} - j\frac{1}{X_5} \right) + \frac{(R_6 + jX_{L6}) + (R_7 + jX_{L7}) + j2X_{67}}{(R_6 + jX_{L6})(R_7 + jX_{L7}) + X_{67}^2} +$$

$$+ \frac{1}{(R_8 + \alpha_{89}^2 R_9) + j[X_{L8} - \alpha_{89}^2 (X_{L9} - X_{C9})]} = G_{AB} + jB_{AB}$$

unde α_{89}^2 este coeficientul de reflexie al impedanței \underline{Z}_9 și are expresia:

$$\alpha_{89}^2 = \frac{X_{89}^2}{R_9^2 + (X_{L9} - X_{C9})^2}$$

3. Fie circuitul din figura 4.30 cunoscut sub numele de *puntea Wheastone*, cu multiple utilizări în tehnica măsurărilor. Curenții care circulă în brațele punții au expresiile:



(Fig 4.30)

$$\underline{I}' = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2};$$

$$\underline{I}'' = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4}$$

iar tensiunea între
punctele A și B este:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z}_2 \underline{I}' - \underline{Z}_4 \underline{I}'' = \underline{U} \left(\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} - \frac{\underline{Z}_4}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_4} \right)$$

Puntea este în *echilibru* dacă $\underline{U}_{AB} = 0$, respectiv:

$$\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 + \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_4$$

Respectiv puntea va fi în echilibru dacă impedanțele sale satisfac condiția:

$$\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 \quad \text{sau} \quad \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_4} \quad (4.54)$$

numită *condiția de echilibru* a punții. Dacă $\underline{Z} = R + jX = Z \angle \varphi$ condiția se poate explicita sub formele:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 &\leftrightarrow (R_1 + jX_1)(R_4 + jX_4) = \\ &= (R_2 + jX_2)(R_3 + jX_3); \begin{cases} R_1 R_4 - X_1 X_4 = R_2 R_3 - X_2 X_3 \\ R_1 X_4 + R_4 X_1 = R_2 X_3 + R_3 X_2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.55)$$

respectiv:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3 &\leftrightarrow Z_1 \angle \varphi_1 \cdot Z_4 \angle \varphi_4 = Z_2 \angle \varphi_2 \cdot Z_3 \angle \varphi_3 \\ \begin{cases} Z_1 \cdot Z_4 = Z_2 \cdot Z_3 \\ \varphi_1 + \varphi_4 = \varphi_2 + \varphi_3 \end{cases} & \end{aligned} \quad (4.56)$$

Condiția de echilibru (4.54) se poate explicita sub formele (4.55) și (4.56). Dacă una dintre impedanțe este necunoscută (de exemplu \underline{Z}_4), se aduce puntea în echilibru reglând $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2$ și \underline{Z}_3 și apoi din relația (4.54) se deduce \underline{Z}_4 . Aprecierea stării de echilibru ($\underline{U}_{AB} = 0$) se face cu instrumente de precizie. Este mai ușor de măsurat valoarea unei tensiuni decât să determinăm când este ea nulă.