

## 7. Metode de analiză a circuitelor electrice în regim permanent

Un circuit electric cu  $\ell$ -laturi,  $n$ -noduri și  $s$ -subrețele funcționează în regim permanent sinusoidal, deci mărimile de stare pot fi transpuse în complex. Fiecare latură are o *sursă de tensiune electromotoare (t.e.m)*  $\underline{E}_k$  (sau o sursă de curent  $\underline{I}_{sk}$ , uneori, pentru a lucra unitar, se convertesc sursele reale de curent în surse reale de tensiune), are o *impedanță proprie*  $\underline{Z}_k$  și mai multe *impedanțe mutuale*  $\underline{Z}_{kj}$ . Prin fiecare latură circulă câte o *intensitate*  $\underline{I}_k$  iar la bornele fiecărei laturi este o *tensiune*  $\underline{U}_k$ . Problemele care se pun în studiul circuitelor electrice în regim permanent sunt de două categorii.

- *Analiza* unui circuit, sau *a rezolva* circuitul înseamnă a determina intensitățile curenților ( $\underline{I}_k$ ) în fiecare din cele  $\ell$  laturi ( $k = \overline{1, \ell}$ ) atunci când se cunosc tensiunile electromotoare ale surselor de pe laturi ( $\underline{E}_k$ ) și impedanțele proprii și mutuale  $\underline{Z}_k, \underline{Z}_{kj}$  (respectiv parametrii  $R_k, L_k, C_k, L_{kj}$ ). Această problemă este *problema fundamentală* a analizei unui circuit.
- Dacă se cunosc  $\underline{E}_k$  ( $\underline{I}_{sk}$ ) ale surselor și curenții de pe laturi  $\underline{I}_k$  și se cer impedanțele  $\underline{Z}_k$  ( $\underline{Z}_{kj}$ ), respectiv construcția circuitului la o topologie dată, aceasta este problema de *sinteză* a unui circuit.
- Dacă se dau  $\underline{Z}_k, \underline{Z}_{kj}$  și curenții doriți prin fiecare latură și necunoscutele sunt parametrii surselor  $\underline{E}_k$  și  $\underline{I}_{sk}$ , aceasta este o problemă de *sinteză surselor*.

### 7.1 Analiza circuitelor pe baza teoremelor lui [Kirchhoff (TK)]

Pentru un circuit liniar format din  $s$  subrețele, cu  $\ell$  laturi și  $n$  noduri, teoremele lui Kirchhoff se scriu în valori instantanee sub forma (6.9) și (6.16) și reprezintă, din punct de vedere matematic, un sistem de  $\ell$  ecuații integro-diferențiale cu  $\ell$  necunoscute:  $i_1, i_2, \dots, i_\ell$ , sub forma:

$$\begin{cases} \sum_{k \in b} i_k = 0 & b = \overline{1, n-s} \\ \sum_{k \in p} (R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt + \sum_{j=1}^m L_{kj} \frac{di_j}{dt}) = \sum_{k \in p} e_k & p = \overline{1, o} \end{cases} \quad (7.1)$$

iar sub formă complexă ele au expresia (6.21). respectiv:

$$\begin{cases} \sum_{k \in b} \underline{I}_k = 0; & b = \overline{1, n-s} \\ \sum_{k \in p} \left( \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{j=1}^m \underline{Z}_{kj} \underline{I}_j \right) = \sum_{k \in p} \underline{E}_k & p = \overline{1, o} \end{cases} \quad (7.2)$$

Sistemul (7.2) este un sistem de  $\ell$  ecuații algebrice, cu coeficienți complecși din care  $(n-s)$  ecuații se scriu cu T1K în noduri și  $o = \ell - n + s$  ecuații cu T2K pe ochiuri independente, alese cu ajutorul grafului de circuit. Cum sistemul omogen ( $\underline{E}_k = 0$ ) care înseamnă circuitul pasivizat, admite soluție identic nulă (printr-un sistem pasiv nu pot circula curenți, deci toți  $\underline{I}_k = 0$ ), rezultă că soluția sistemului neomogen (7.2) este unică. Deci, cu TK se pot scrie cele  $\ell$  ecuații din (7.2) și prin rezolvarea lor, curenții din laturi  $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3, \dots, \underline{I}_\ell$  au valori unice.

Aplicarea TK pentru a rezolva un circuit se face după următorul algoritm:

- se aleg sensuri de referință arbitrare pentru fiecare latură
- cu ajutorul grafului de circuit se aleg cele  $o$  ochiuri independente, fiecare cu un sens propriu de parcurgere
- în fiecare subrețea se aleg  $(n_s - 1)$  noduri independente, respectiv  $(n - s)$  pentru tot circuitul
- se scriu cele  $(n - s)$  ecuații cu T1K în noduri și “o” ecuații cu T2K pe ochiurile independente de forma (7.2)
- dacă există laturi cu sursă ideală de curent (laturi incomplete, care au  $\underline{Z} = \infty$ , acestea se vor considera corzi în graf și pentru ochiul ce trece prin acea latură nu se va scrie T2K. Vom avea cu o ecuație mai puțin, dar și cu o necunoscută mai puțin (curentul din latura incompletă este chiar  $\underline{I}_{sc}$  al sursei ideale de curent)).

Verificarea rezultatului, după rezolvarea sistemului (7.2) se poate face astfel:

- Aplicăm T1K și în alte noduri decât cele utilizate în sistemul (7.2)
- Aplicăm T2K pe alte ochiuri (bucle), diferite de ochiurile fundamentale
- Tensiunea electrică între două puncte(sau 2 noduri) nu depinde de drumul de integrare, respectiv de succesiunea de laturi prin care a fost calculată
- Verificăm bilanțul puterilor electrice( $\underline{S}$ ,  $P$  sau  $Q$ ) pentru un circuit închis.

### Aplicație:

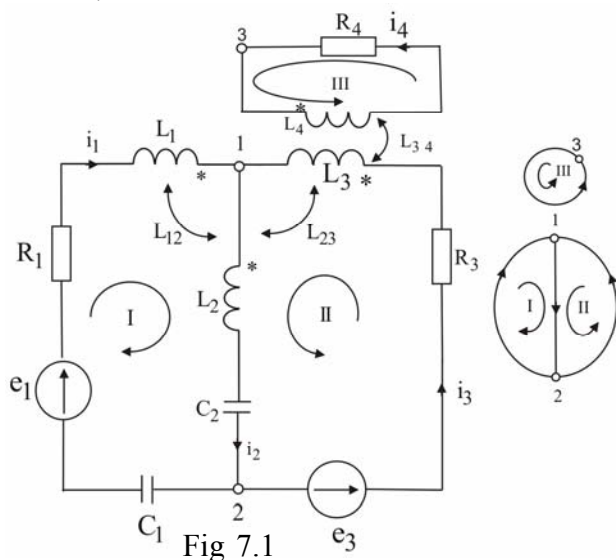


Fig 7.1

Considerăm circuitul din figura 7.1, format din  $s=2$  subrețele cuplate prin  $L_{34}$ ;  $\ell=4$  laturi parcurse de curenții  $i_1, i_2, i_3, i_4$  pentru care s-au adoptat sensuri de referință (acestea n-au nici o semnificație fizică, cum este cazul pentru sensul curenților dintr-un circuit de curent continuu) dar odată

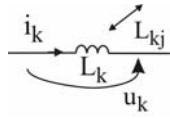
alese, față de ele scriem corect teoremele și interpretăm rezultatele obținute.

Ținând seama cum sunt marcate bornele pentru bobinele cuplate, rezultă semnele inductivităților mutuale de cuplaj:  $L_{12} < 0$ ;  $L_{23} > 0$ ;  $L_{34} > 0$ .

T.e.m ale surselor sunt cunoscute sub forma:

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{2}E_1 \sin(\omega t + \gamma_1) \\ e_3 = \sqrt{2}E_3 \sin(\omega t + \gamma_3) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \underline{E}_1 = E_1 \angle \gamma_1 \\ \underline{E}_3 = E_3 \angle \gamma_3 \end{cases} \quad (7.3)$$

Nodurile sunt marcate cu 1, 2 și 3, poziția nodului (3) pe bucla de sus nu este precizată iar ochiurile independente I, II și III au fost alese și orientate cu ajutorul grafului, desenat alături de circuit.



Tensiunea la bornele bobinei (k) este suma algebrică dintre t.e.m. autoindusă în bobină:  $e_{kk} = L_k \frac{di_k}{dt}$  și t.e.m. induse prin cuplajele bobinei k cu alte bobine din circuit:

Fig 7.2  $e_{kj} = L_{kj} \frac{di_j}{dt}$ , care vor avea același sens cu  $e_{kk}$  dacă

$L_{kj} > 0$  sau sens contrar dacă  $L_{kj} < 0$ . Între parantezele care apar în sistemul (7.4) sunt tensiunile la bornele unei bobine; în fața parantezei este (+) dacă ochiul parcurge bobina în același sens cu orientarea laturii și (-) dacă parcurge bobina în sens invers cu sensul curentului său.

Ecuatiile scrise cu TK în valori instantanee (o ecuație cu T1K și trei ecuații cu T2K) sunt:

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ R_1 i_1 + (L_1 \frac{di_1}{dt} - L_{12} \frac{di_2}{dt}) + (L_2 \frac{di_2}{dt} - L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{23} \frac{di_3}{dt}) + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt = e_1 \\ R_3 i_3 + (L_3 \frac{di_3}{dt} + L_{23} \frac{di_2}{dt} + L_{34} \frac{di_4}{dt}) + (L_2 \frac{di_2}{dt} - L_{12} \frac{di_1}{dt} + L_{23} \frac{di_3}{dt}) + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt = e_2 \\ R_4 i_4 + (L_4 \frac{di_4}{dt} + L_{34} \frac{di_3}{dt}) = 0 \end{cases} \quad (7.4)$$

Sub formă instantanee, ecuațiile integro-diferențiale ale unui circuit, se utilizează la studiul comportării dinamice (regimul tranzitoriu al circuitului) când interesează soluțiile  $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$  și  $i_4(t)$ , în condiții inițiale date.

Dacă interesează studiul regimului permanent, ecuațiile se scriu cu TK în valori complexe sub forma:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 + I_3 = 0 \\ (R_1 + j\omega L_1 - j\omega L_{12} - j\frac{1}{\omega C_1})I_1 + (j\omega L_2 - j\frac{1}{\omega C_2} - j\omega L_{12})I_2 + j\omega L_{23}I_3 = E_1 \\ R_3 I_3 + j(X_{L_3} I_3 + X_{23} I_2 + X_{34} I_4) + j\omega(L_2 I_2 - L_{12} I_1 + L_{23} I_3) + \frac{1}{j\omega C_2} I_2 = E_2 \\ R_4 I_4 + j(X_{L_4} I_4 + X_{34} I_3) = 0 \end{cases} \quad (7.5)$$

S-au utilizat mai multe moduri de scriere a ecuațiilor pe ochiuri, tocmai pentru a remarca diferitele modalități. Ecuațiile în complex (7.5) se pot compara termen cu termen cu forma lor instantanee (7.4).

## 7.2 Forma duală a teoremelor lui Kirchhoff. Circuite duale

În circuite fără inductivități mutuale(fără cuplaje), ecuațiile lui Kirchhoff se pot scrie și sub altă formă, în care necunoscutele nu mai sunt curenții din laturi  $\underline{I}_k$ , ci tensiunile la bornele acestor laturi  $\underline{U}_k$ , asociate cu sensul curenților după convenția de la receptoare (figura 7.3) pentru care putem scrie:

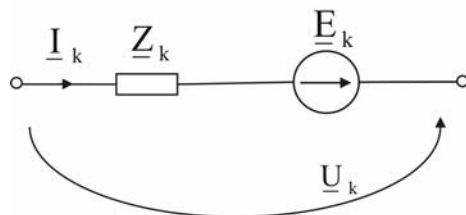


Fig.7.3

$$\begin{cases} \underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k - \underline{E}_k & k = \overline{1, \ell} \text{ ecuație de tensiuni} \\ \underline{I}_k = \underline{Y}_k \underline{U}_k + \underline{Y}_k \underline{E}_k = \underline{Y}_k \underline{U}_k + \underline{I}_{sc_k} & \text{ecuație de curenți} \end{cases} \quad (7.6)$$

în care  $\underline{Y}_k = \frac{1}{\underline{Z}_k}$  este admitanța complexă a laturii  $k$ , iar

$\underline{I}_{sc_k} = \underline{Y}_k \underline{E}_k = (\underline{I}_k)_{\underline{U}_k=0}$  reprezintă *curentul de scurtcircuit al laturii  $k$* .

El poate fi interpretat ca și curentul ce s-ar obține în latura  $k$  dacă aceasta s-ar desprinde din nodurile unde ea este legată și s-ar închide pe ea însăși, (s-ar scurtcircuita bornele sale:  $\underline{U}_k = 0$ ). Dacă o latură este pasivă ( $\underline{E}_k = 0$ ) nu va avea curent de scurtcircuit, iar dacă este activă sensul lui  $\underline{I}_{sc_k}$  va coincide cu sensul lui  $\underline{E}_k$ .

Cu aceste precizări ecuațiile lui Kirchhoff, în cazul circuitelor fără cuplaje, se pot scrie sub forma:

$$\text{(clasic): } \begin{cases} \sum_{k \in b} \underline{I}_k = 0 & \text{(T1K) nod } b \\ \sum_{k \in p} \underline{Z}_k \underline{I}_k = \sum_{k \in p} \underline{E}_k & \text{(T2K) ochi } p \end{cases} \quad \text{(dual): } \begin{cases} \sum_{k \in b} \underline{Y}_k \underline{U}_k = \sum_{k \in b} (-\underline{I}_{sc_k}) - \text{(T1K) nod } b \\ \sum_{k \in p} \underline{U}_k = 0 & \text{-(T2K) ochi } p \end{cases} \quad (7.7)$$

Între ecuațiile scrise cu TK clasic sau dual (7.7) există un izomorfism matematic (o analogie de formă a ecuațiilor), pe baza căruia se poate construi o clasă de corespondență între circuite clasice și circuite duale (mai precis între circuitul clasic dat și dualul său) sub forma:

Circuit clasic	Circuit dual	
Variabilele $\underline{I} \longleftrightarrow \underline{U}$		În circuitul dual necunoscutele vor fi tensiunile la bornele fiecărei laturi ( $\underline{I}^A = \underline{U}^V$ )
Elementele circuitului $\underline{Z} \longleftrightarrow \underline{Y}$		Cele valori ale $\underline{Z}[\Omega]$ în circuitul clasic aceeași valoare numerică va avea $\underline{Y}[\Omega^{-1}]$ în circuitul dual
Sursele $\underline{E} \longleftrightarrow -\underline{I}_{sc}$ $-\underline{I}_{sc} \longleftrightarrow \underline{E}$		Sursa $\underline{E}$ este (+) dacă are orientarea sensului trigonometric al ochiului iar $\underline{I}_{sc}$ este (+) când este injectat în nod. Și aici este egalitate numerică a valorilor $\underline{E}[\text{V}] = \underline{I}_{sc}[\text{A}]$
Topologia Nod $\longleftrightarrow$ Ochi Ochi $\longleftrightarrow$ Nod		Numărul de ochiuri al circuitului dual ( $o^d$ ) este egal cu numărul de noduri independente ( $n-1$ ) ale circuitului clasic și invers $(n-1)^d = o$
$\text{T1K} \longleftrightarrow \text{T2K}$ $\text{T2K} \longleftrightarrow \text{T1K}$		Așa cum rezultă din ecuațiile (7.7).
Circuit serie $\longleftrightarrow$ Circuit paralel Circuit paralel $\longleftrightarrow$ Circuit serie		Cel serie clasic are un $\underline{I}$ , cel paralel dual are un $\underline{U}$

Sub formă duală, TK se enunță astfel:(vezi relațiile (7.7)):

T1K: Curentul de scurtcircuit injectat într-un nod este suma algebrică a curenților de scurtcircuit a tuturor laturilor ce concură în acel nod

T2K: Pentru un ochi de circuit, suma algebrică a tensiunilor la bornele tuturor laturilor care compun ochiul este nulă.

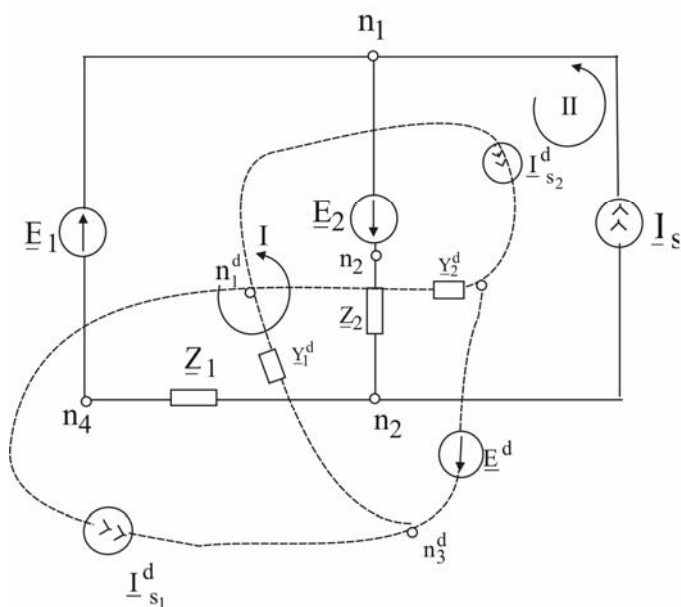
**Circuite duale:**

Două circuite se numesc *duale* (unul altuia) dacă între elementele celor două circuite se poate stabili o corespondență biunivocă așa cum s-a arătat în paragraful precedent. Oricărei ecuații în curenți (tensiuni), scrisă pentru unul dintre ele, să-i corespundă o relație analoagă (de același tip) scrisă în tensiuni (curenți) pentru al doilea circuit.

- Un element cu *tensiune dată* va avea dual un element de circuit cu *intensitate dată*; o sursă de curent este dualul unei surse de tensiune.
- Un receptor de *impedanță*  $\underline{Z}$  dată, are ca element dual un receptor cu *admitanță*  $\underline{Y}$  dată.
- *Egalitatea tensiunilor* (pe elementele în paralel), corespunde *egalității curenților* (prin elemente serie) în circuitul dual: elemente conectate *serie* vor corespunde elementelor conectate *paralel* în circuitul dual și reciproc.
- Ecuația  $\sum \underline{I}_k = 0$  aplicată într-un nod va corespunde ecuației

$\sum \underline{U}_k = 0$  scrisă pentru un ochi al circuitului dual. Deci nodurile

( $n_1$ ) dintr-un circuit dat le corespund ochiurile ( $o_2$ ) în circuitul dual ( $n_1 = o_2$ ) și reciproc  $o_1 = n_2$ , respectiv în ambele circuite  $n_1 + o_1 = n_2 + o_2$ , se vor scrie tot atâtea ecuații și pentru circuitul dual.



Stabilirea circuitului dual unui circuit dat se face după următorul algoritm:

- Se plasează câte un nod al circuitului dual ( $n_1^d, n_2^d$ ) în fiecare ochi al circuitului dat și cum numărul de noduri față de cele

$n_2$  independente este  $(n_2 + 1)$ , se mai plasează un nod  $n_3^d$  în afara circuitului (fig 7.4)

- Fiecărui nod  $(n_1, n_2, n_3, n_4)$  al circuitului dat (nod este punctul unde sunt legate minim două elemente) îi corespunde un ochi dual.
- Laturile duale între ele se întretaie (graful lor este ortogonal cu graful circuitului dat, curenții converg în nodul  $n_2^d$  dacă sursele  $\underline{E}$  sunt parcurse în sens trigonometric (figura 7.4).

Egalitatea valorilor numerice a mărimilor ce caracterizează elementele duale ( $\underline{Z} = \underline{Y}^d; \underline{E} = \underline{I}_{sc}^d; \underline{I}_{sc} = \underline{E}^d \dots$ ) implică, datorită analogiei ecuațiilor, egalitatea valorilor numerice a tuturor mărimilor pentru laturile duale între ele ( $\underline{U} = \underline{I}^d, \underline{I} = \underline{U}^d$ ), acesta constituind *teorema dualității*. În tabelul din figura 7.5 sunt prezentate câteva perechi de laturi duale:

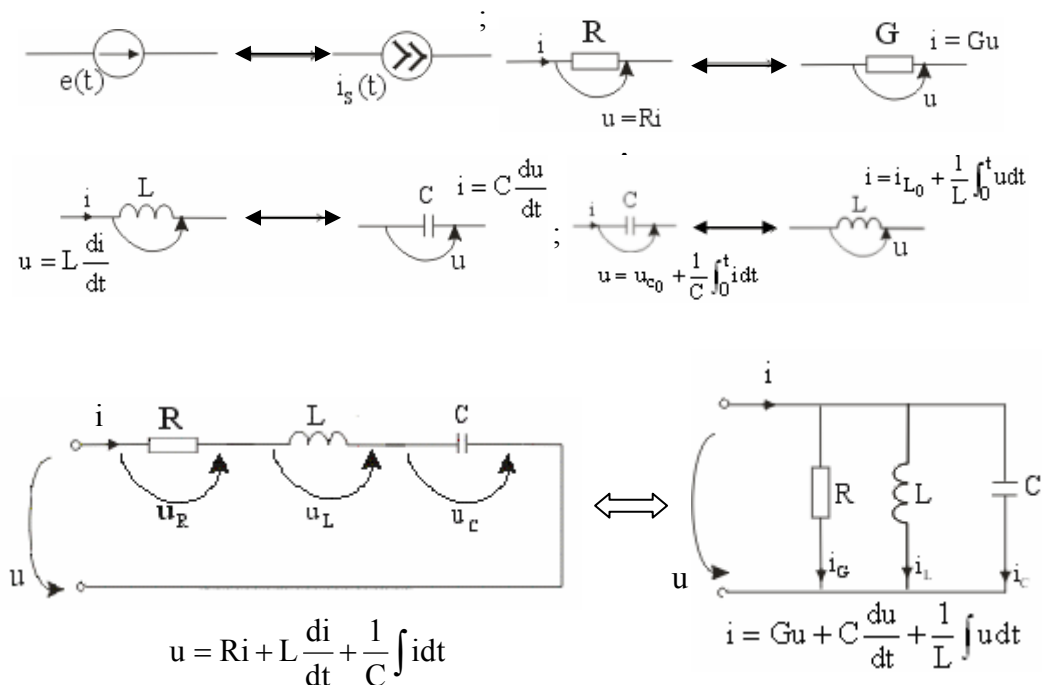


Fig 7.5



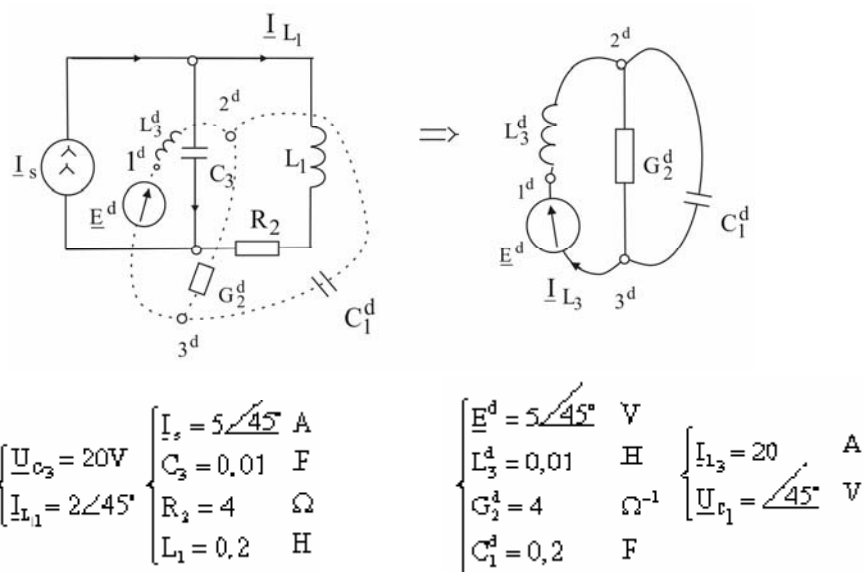
**Aplicație:**

Fig 7.6

Circuitului  $R_2 - L_1$  serie îi corespunde  $G_2 - C_1$  paralel (cele două circuite sunt duale dacă sursa de curent  $\underline{I}_s$  și cea duală de tensiune  $\underline{E}^d$  au aceeași frecvență).

În figura 7.6 se poate verifica teorema dualității privind valorile numerice atât ale parametrilor cât și pentru tensiuni/curenți duali între ei.

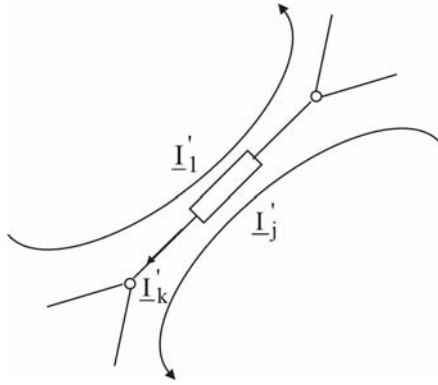
### 7.3 Metoda curenților ciclici (de ochiuri, de contur)

Metoda curenților ciclici (de ochiuri) este o metodă sistematică de rezolvare a unui circuit. Conform acestei metode, sistemul (7.2) de  $\ell$  ecuații scrise cu TK se poate reduce la un sistem de  $o = \ell - n + s$  ecuații (egal cu numărul ochiurilor independente) în care necunoscutele să nu mai fie curenții reali din laturi, ci niște *necunoscute auxiliare*, curenții care s-ar închide de-a lungul fiecărui ochi independent (*curent ciclic*, curent de ochi).

Ideea metodei vine din algebră unde se arată că dacă într-un sistem algebric de ecuații se face o schimbare convenabilă de variabile (necunoscute), se poate reduce numărul de ecuații ale sistemului. Se rezolvă sistemul redus și în final, prin schimbarea inversă de variabile se revine la variabilele inițiale, în număr mai mare.

*Curentul ciclic* (de ochi, de contur) este un curent fictiv care se încheie fiecare de-a lungul unuia dintre cele  $o$  ochiuri independente și au sensul de parcurgere al ochiului. Deci în loc de curenții reali din laturi  $I_1, I_2, \dots, I_\ell$  se lucrează cu curenți ciclici  $I'_1, I'_2, \dots, I'_o$ .

Intensitățile curenților ciclici au astfel de valori încât curentul real din latură  $I_k$  este suma algebrică a tuturor curenților ciclici care trec prin latura  $k$  (figura 7.7).



$$I_k = \sum_{j \in k} I'_j \quad (7.8)$$

unde suma din (7.8) este suma acelor curenți ciclici  $I'_j$  care trec prin latura  $k$  ( $j \in k$ ) și intră în sumă cu (+) dacă sensul curentului ciclic coincide cu sensul de referință al laturii  $k$  (cu sensul curentului  $I_k$ ) și cu (-) dacă parcurg latura  $k$  în sens invers cu  $I_k$ .

Fig 7.7

Prin trecerea la noile variabile primele  $(n-s)$  ecuații din (7.2), cele scrise cu T1K, vor fi satisfăcute în mod identic, fiecare curent ciclic și intră și iese dintr-un nod în care scriem T1K, aducând o contribuție nulă la curentul ce intră (sau iese) din acel nod.

Rămân cele  $o$  ecuații scrise cu T2K, a căror număr este egal cu cel al noilor variabile:  $I'_1, I'_2, \dots, I'_o$ . Sistemul celor " $o$ " ecuații satisfăcute de curenții ciclici se obțin din ecuațiile scrise cu T2K în care se înlocuiesc curenții reali prin curenții ciclici de tipul (7.8).

$$\sum_{k \in p} (Z_k I_k + \sum_q Z_{kq} I_q) = \sum_{k \in p} E_k \Leftrightarrow \sum_{k \in p} \left( \sum_{q=1}^o Z_{kq} \sum_{j \in q} I'_j \right) = \sum_{k \in p} E_k \quad (7.9)$$

Schimbând ordinea de sumare, se obține o sumă multiplă de termeni de forma  $Z_{kq} I'_j$  în care pot fi grupați toți termenii care conțin pe  $I'_j$ . Prin ordonare, întreaga expresie capătă forma:

$$\sum_{j=1}^o \left[ \sum_{\substack{k \in p \\ q \in j}} Z_{kq} \right] I'_j = \sum_{k \in p} E_k = E'_p \quad (7.10)$$

$$\text{unde } \begin{cases} \underline{E}'_p = \sum_{k \in p} \underline{E}_k, \text{este t.e.m a ochiului } p. \\ \underline{Z}'_{pj} = \sum_{\substack{k \in p \\ q \in j}} \underline{Z}_{kq} = \underline{Z}'_{pj}, \text{este impedanța de cuplaj dintre ochiurile } (p) \end{cases}$$

și  $j$  ( $p \neq j$ ), respectiv impedanța proprie a ochiului  $p$  ( $p = j$ ).

Cu aceste notații sistemul (7.10) se scrie sub forma:

$$\sum_{j=1}^0 \underline{Z}'_{pj} \underline{I}'_j = \underline{E}'_p; \quad p = \overline{1, 0} \quad (7.11)$$

relație care explicitată devine un sistem algebric de ecuații de forma:

$$\begin{cases} \underline{Z}'_{11} \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{12} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}'_{10} \underline{I}'_0 = \underline{E}'_1 \\ \underline{Z}'_{21} \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{22} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}'_{20} \underline{I}'_0 = \underline{E}'_2 \\ \text{-----} \\ \underline{Z}'_{01} \underline{I}'_1 + \underline{Z}'_{02} \underline{I}'_2 + \dots + \underline{Z}'_{00} \underline{I}'_0 = \underline{E}'_0 \end{cases} \quad (7.12)$$

Pe diagonala sistemului (7.12) apar *impedanțele proprii ale ochiurilor*:

$$\underline{Z}'_{pp} = \sum_{k \in p} \underline{Z}_k + \sum_{(k,q) \in p} j\omega L_{kq} \quad (7.13)$$

Primul termen este suma impedanțelor proprii a tuturor laturilor care compun ochiul  $p$ , iar al doilea termen este suma impedanțelor mutuale dintre bobinele  $L_k$  și  $L_q$ , dacă ambele aparțin ochiului  $p$ . Deoarece  $L_{kq} = L_{qk}$ , fiecare impedanță mutuală va intra în sumă de două ori, semnul lui  $L_{kq}$  depinde de modul cum se asociază sensul curentului ciclic  $\underline{I}'_p$  cu bornele marcate ale bobinelor ( $k$ ) și ( $q$ ).

Coeficienții nediagonali din (7.12) reprezintă *impedanțele de cuplaj* dintre ochiul ( $p$ ) și ( $j$ ), sub forma:

$$\underline{Z}'_{pj} = \sum_{k \in (p,j)} \underline{Z}_k + \sum_{\substack{k \in p \\ q \in j}} j\omega L_{kq} \quad (7.14)$$

Primul termen este suma algebrică a impedanțelor proprii  $\underline{Z}_k$  pentru laturile comune ochiurilor  $p$  și  $j$ , luate cu (+) dacă ochiurile au același sens prin latura comună și cu (-) dacă au sensuri contrarii. Al doilea termen arată că ochiurile ( $p$ ) și ( $j$ ), în afară de laturi comune, mai au cuplaje care leagă o

bobină din ochiul (p) cu altă bobină din ochiul (j). Semnul cuplajului depinde de modul cum se asociază sensurile curenților ciclici din cele două ochiuri  $\underline{I}'_p$  și  $\underline{I}'_j$  cu bornele marcate ale bobinelor  $L_k$  și  $L_q$  din cele două ochiuri.

După modul cum sunt definite impedențele de cuplaj (7.14), ele satisfac o relație de reciprocitate  $\underline{Z}'_{pj} = \underline{Z}'_{jp}$ , respectiv sistemul (7.12) este simetric față de diagonala principală.

La stabilirea semnelor pentru inductivitățile mutuale prin această metodă nu contează sensurile de referință ale laturilor, motiv pentru care laturile nici nu se orientează decât în finalul algoritmului.

T.e.m se compun în  $\underline{E}'_p$  însumându-se față de sensul de parcurgere ale ochiului p.

Aplicarea metodei curenților ciclici se face după următorul algoritm:

- Se aleg ochiurile independente (o) cu ajutorul grafului și se orientează. Fiecare ochi va avea coarda lui proprie și orientat la fel cu ea.
- Se calculează coeficienții  $\underline{Z}'_{pp}, \underline{Z}'_{pj}, \underline{E}'_p$  cu relațiile (7.13) și (7.14).
- Se scriu ecuațiile sistemului sub forma (7.12) și se rezolvă sistemul.
- În final se aleg sensuri de referință pe laturi și față de acestea se suprapun curenții ciclici ce trec printr-o latură cu relația (7.8).

#### Observații:

- Dacă ochiurile p și j nu au nici o latură comună, nici nu există cuplaje între elementele lor, atunci  $\underline{Z}'_{pj} = 0$
- Dacă circuitul conține o latură incompletă (cu sursă ideală de curent care are  $\underline{Z}_i = \infty$ ), am avea în sistemul (7.12) unul dintre coeficienți  $\infty$ , deci imposibil. Există mai multe posibilități:
- Parametrizat: latura incompletă are o impedență  $\underline{Z}_i$  dată parametric (fără valoare); se rezolvă sistemul (7.12) și toți curenții vor depinde de  $\underline{Z}_i$ . În soluția finală se face  $\lim_{\underline{Z}_i \rightarrow \infty} \underline{I}'_p$
- Latura cu sursă ideală de curent se alege (ca la TK) să fie coardă și ochiul ce trece prin ea va avea curentul ciclic egal cu curentul din coardă, respectiv cu  $I_{sc}$  al acelei surse. Acel curent ciclic fiind cunoscut, pentru ochiul respectiv nu se mai scrie ecuație; o ecuație mai puțin (cea cu coeficientul  $\infty$ ) dar și o necunoscută mai puțin.

- Cu ajutorul *T2 Vaschy* se elimină latura incompletă. Dacă avem un circuit care are o latură incompletă cu  $I_{sc1}$  (figura 7.8);

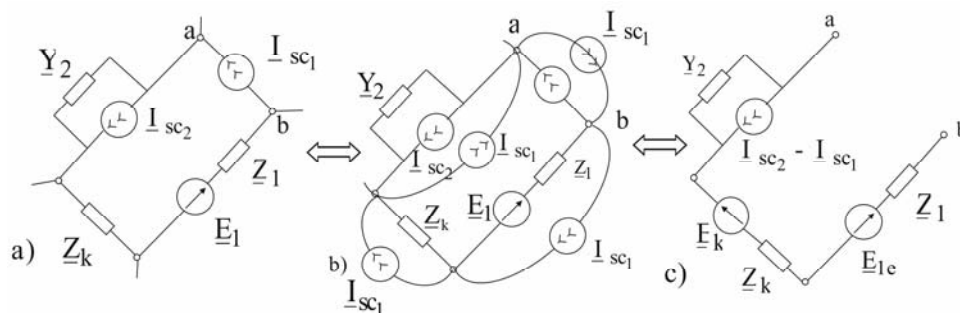


Fig 7.8

$$\begin{cases} E_{1c} = E_1 - Z_1 I_{sc1} \\ E_k = Z_k I_{sc1} \end{cases}$$

Se poate introduce câte o sursă ideală de curent identică în paralel cu toate laturile ce formează un ochi (orientate la fel față de un sens de parcurgere a ochiului) ca în figura 7.8-b fără a se modifica funcționarea circuitului.

O sursă ideală de curent ar putea modifica ecuațiile de curenți scrise în noduri, dar în figura 7.8 în orice nod (de exemplu nodul (a) din figura 7.8-b sursele cu  $I_{sc1}$ , nou introduse, ies și intră în nodul (a), deci nu modifică ecuația de curenți a aceluia nod.

Cu *T2 Vaschy* se elimină laturile incomplete, cum a fost cea cu  $I_{sc1}$  (între nodurile a și b), între cele două noduri rămâne mers în gol, (ca în figura 7.8-c). Au apărut surse  $I_{sc1}$  în paralel cu celelalte laturi din ochi, pe care le introduc în parametrii acestor laturi așa cum se vede în figura 7.8-c.

*Observație:* În circuite de curent continuu metoda se aplică similar, doar că  $Z'_{pp} \rightarrow R'_{pp}$  (suma tuturor rezistențelor din ochi) iar  $Z'_{pj} \rightarrow R'_{pj}$  ( $R'_{pj} \leq 0$  este rezistența laturilor comune dintre ochiul p și j, aici nu există cuplaje, deci nici impedanțe de cuplaj între ochiuri).

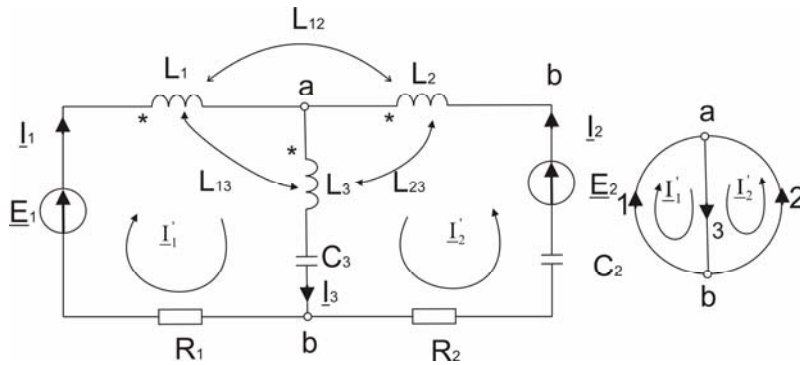
**Aplicație:**

Fig 7.9

Considerăm circuitul din figura 7.9 pentru care dorim să scriem ecuația de funcționare prin metoda curenților

ciclici. Parametrii topologici ai circuitelor sunt:  $s=1$ ,  $n=2$ ,  $l=3$ ,  $o=2$ . Cele două ochiuri le alegem cu ajutorul grafului desenat alături de circuit. Curenții ciclici  $I_1'$  și  $I_2'$  au sensurile alese pe figură și satisfac ecuații de forma:

$$\begin{cases} Z_{11}' I_1' + Z_{12}' I_2' = E_1' \\ Z_{21}' I_1' + Z_{22}' I_2' = E_2' \end{cases} \quad (7.15)$$

unde coeficienții au semnificațiile date de (7.13) și (7.13);

$$\begin{aligned} (1) & \quad Z_{11}' = (R_1 + jX_{L_1} + jX_{L_3} - jX_{C_3}) + j2X_{13} \\ (2) & \quad Z_{22}' = (R_2 + jX_{L_3} + jX_{L_3} - jX_{C_3}) - j2X_{23} \\ (3) & \quad Z_{21}' = (jX_{L_3} - jX_{C_3}) + (-jX_{12} + jX_{13} - jX_{23}) \\ (4) & \quad \begin{cases} E_1' = E_1; & E_2' = E_2 \end{cases} \end{aligned}$$

(1)-curentul  $I_1'$  intră în bornele marcate la  $L_1$  și  $L_3$  ( $L_{13} > 0$ )

(2)-  $I_2'$  la  $L_2$  intră în borna nemarcată iar la  $L_3$  în cea marcată ( $L_{23} < 0$ )

(3)-dacă circuitul n-ar conține cuplaje atunci  $Z_{12}'$  ar conține doar impedanțele laturilor comune celor două ochiuri. În cazul nostru conține și cuplaje ( $L_{12}$ ,  $L_{13}$ ,  $L_{23}$ ).

Curenții reali din laturi sunt:  $I_1 = I_1'$ ,  $I_2 = I_2'$ ,  $I_3 = I_1' + I_2'$ . Curenții ciclici, se observă că nu sunt chiar fictivi, ei coincid cu curenții reali din corzile circuitului.

### 7.4 Teorema reciprocității

Teorema reciprocității este o consecință a caracterului liniar al circuitelor, respectiv a ecuațiilor care descriu funcționarea lor; este, deci, valabilă doar în circuitele liniare.

Dacă sistemul (7.12) scris în curenți ciclici se rezolvă cu regula lui Cramer, curentul ciclic din ochiul (j) va putea fi scris sub forma:

$$\underline{I}'_j = \frac{\Delta_{j1}}{\Delta} \underline{E}'_1 + \frac{\Delta_{j2}}{\Delta} \underline{E}'_2 + \dots = \sum \frac{\Delta_{jk}}{\Delta} \underline{E}'_k = \sum_{k=1}^n \underline{Y}'_{jk} \underline{E}_k \quad (7.16)$$

unde:

$\Delta$  - este determinantul sistemului (7.12), întotdeauna simetric ( $\underline{Z}'_{jk} = \underline{Z}'_{kj}$ )

$\Delta_{jk}$  - complementul elementului  $\underline{Z}'_{jk}$  din  $\Delta$  (are pe coloana (j) sursele  $\underline{E}'_k$ )

$\Delta_{jk} / \Delta = \underline{Y}'_{jk}$  - admitanța de transfer între ochiul (k) și (j)

Cum  $\underline{Z}'_{jk} = \underline{Z}'_{kj}$  rezultă că și  $\Delta_{jk} = \Delta_{kj}$  (liniile unuiu sunt egale cu coloanele celuilalt), respectiv  $\underline{Y}'_{jk} = \underline{Y}'_{kj}$

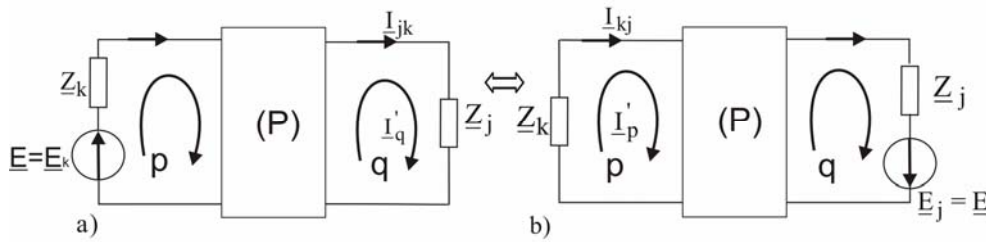


Fig 7.10

Presupunem un circuit liniar în care *există o singură sursă* de t.e.m  $\underline{E}$  plasată în latura (k) din ochiul (p) (figura 7.10-a) și care produce în ochiul (q) curentul ciclic  $\underline{I}'_q$  (am separat latura cu sursă, deci restul circuitului este pasiv (P)).

Curentul ciclic este:

$$\underline{I}'_q = \frac{\Delta_{qp}}{\Delta} \underline{E} \quad (7.17)$$

Dacă mutăm sursa cu tensiune electromotoare  $\underline{E}$  în latura (j) (figura 7.10 - b) care aparține ochiului q, ea va produce prin ochiul (p) curentul ciclic  $\underline{I}'_p$ :

$$\underline{I}'_p = \frac{\Delta_{pq}}{\Delta} \underline{E} \quad (7.18)$$

Dar cum:  $\Delta_{pq} = \Delta_{qp} \rightarrow \underline{Y}'_{pq} = \underline{Y}'_{qp} = \frac{\Delta_{pq}}{\Delta} \rightarrow \underline{I}'_p = \underline{I}'_q$  (7.19)

Putem alege laturile (k) și (j) corzi și atunci curenții ciclici  $\underline{I}'_p$  și  $\underline{I}'_q$  sunt chiar curenții reali din corzi ( $\underline{I}'_p = \underline{I}_{kj}$ ,  $\underline{I}'_q = \underline{I}_{jk}$ ), respectiv :

$$(\underline{I}_{jk})_{\underline{E}_k} = \underline{E} = (\underline{I}_{kj})_{\underline{E}_j} = \underline{E} \quad (7.20)$$

Expresia (7.20) este *teorema reciprocității* și se exprimă prin: “Curentul  $\underline{I}_{jk}$  produs într-o latură (j) a unui circuit de către o sursă aflată în latura (k) – fără să mai existe și alte surse în circuit – este egal cu curentul  $\underline{I}_{kj}$  pe care l-ar produce prin latura (k) aceeași sursă mutată în latura (j)”.

Într-un circuit liniar, transferul de curent de la latura (k) la (j) este același ca de la (j) la (k) fiindcă admitanțele de transfer sunt egale ( $\underline{Y}'_{jk} = \underline{Y}'_{kj}$ ).

La curentul  $\underline{I}_{jk}$ , primul indice (j) arată pe unde trece și al doilea (k), unde este sursa care l-a produs.

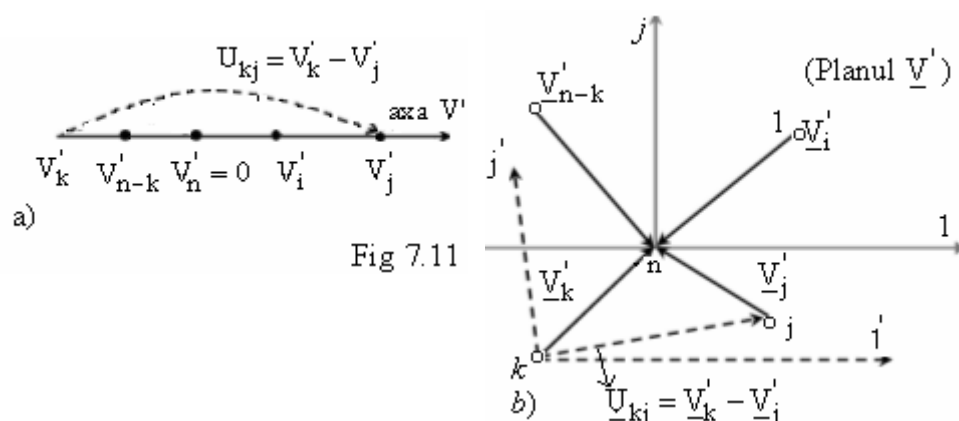
## 7.5 Metoda potențialelor nodurilor

Metoda potențialelor nodurilor este o metodă sistematică de rezolvare a circuitelor, în care se operează în loc de variabilele reale (curenții din laturi) cu noi variabile auxiliare, *potențialele nodurilor*, în număr de (n-1), deci egal cu numărul nodurilor independente:  $\underline{V}'_1, \underline{V}'_2 \dots \underline{V}'_{n-1}$  a căror valoare se definește în raport cu o *origine de*



*potențial*, care se consideră cel de-al  $n^{\text{lea}}$  nod ( $\underline{V}_n' = 0$ ). Sub această formă metoda se aplică doar *circuitelor conexe* (fără cuplaje) care are o singură subrețea ( $s=1$ ).

Noile variabile, potențialele celor  $(n-1)$  noduri independente, definite în raport cu nodul referință  $n$  ( $\underline{V}_n' = 0$ ) se pot reprezenta pe o axă (*axa potențialelor*) pentru circuite de curent continuu (fig 7.11 – a) sau într-un plan complex (*planul potențialelor*) pentru circuite de curent alternativ sinusoidal (figura 7.11 – b).



- În *circuite de curent continuu* (figura 7.11 – a) nodul referință, având potențialul  $\underline{V}_n' = 0$ , se va afla în originea axei  $\underline{V}'$ ; nodurile cu potențial mai mic decât  $\underline{V}_n'$  se vor afla în stânga iar cele cu potențial mai mare, în dreapta sa. Potențialul unui nod exprimă distanța de la acel punct până la originea axei. Dacă am alege alt nod ca referință (de exemplu nodul  $k$ ,  $\underline{V}_k' = 0$ ) se mută originea din  $(n)$  în  $(k)$  și astfel se schimbă valorile tuturor potențialelor. *Tensiunea între două noduri* (tensiunea nodală) este distanța pe axa  $\underline{V}'$  între cele două puncte ( $U_{kj} = \underline{V}_k' - \underline{V}_j'$ , definită ca *diferență de potențial* între cele două puncte) reprezintă segmentul între  $k$  și  $j$ , ele (tensiunile nodale) nu sunt afectate de alegerea nodului referință.

- În *circuite de curent alternativ* (figura 7.11 – b) potențialele sunt mărimi complexe  $\underline{V}_1', \underline{V}_2', \dots, \underline{V}_{n-1}'$ , ele se reprezintă într-un *plan complex al potențialelor* (planul  $\underline{V}'$ ), în originea planului este plasat nodul de referință ( $\underline{V}_n' = 0$ ). Potențialul nodului  $(k)$   $\underline{V}_k'$  este segmentul orientat ce unește

punctul (k) cu originea planului (0) iar tensiunea dintre două noduri (k) și (j) este fazorul care unește cele două puncte  $\underline{U}_{kj} = \underline{V}'_k - \underline{V}'_j$ , modulul  $|\underline{U}_{kj}|$  este

segmentul  $\overline{kj}$  iar faza sa este unghiul format cu axa reală (1). Dacă s-ar schimba originea de potențial din (n) în (k) ( $\underline{V}'_k = 0$ ), atunci s-ar muta sistemul de axe din originea (0) în (k), sistemul ( $1' \ j'$ ) și față de noua origine se schimbă valorile tuturor potențialelor, însă tensiunile dintre noduri  $\underline{U}_{kj}$  rămân aceleași, invariabile la schimbarea originii de potențial.

În curent continuu potențialele au valori de forma:  $V'_k = \pm 3,5 \text{ V}$ , iar în curent

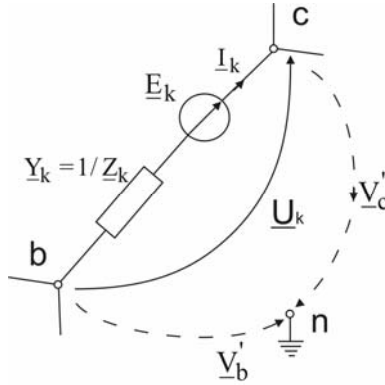


Fig 7.12

alternativ sunt de forma:  $\underline{V}'_k = 24 \angle \pi/6 \text{ V}$

Tensiunea la bornele laturii (k) din figura 7.12 este:  $\underline{U}_k = \underline{V}'_b - \underline{V}'_c$  și conform cu T2K dual se scriu ecuațiile:

$$\sum_{k \in p} \underline{U}_k = 0 \rightarrow \sum_{k \in p} (\underline{V}'_b - \underline{V}'_c) = 0 \quad (7.21)$$

Suma (7.21) este nulă și fiindcă la parcurgerea ochiului (p), fiecare potențial intră în sumă de două ori, o dată cu (-) când latura intră în nodul (b) și altă dată cu (+) când latura iese din nodul (b). Deci "o" ecuații de tipul (7.21) scrise cu T2K dual vor fi satisfăcute identic, cele (n-1) noi variabile (potențialele nodurilor) vor fi univoc determinate de cele (n-1) ecuații scrise cu T1K sub forma duală (7.7):

$$\sum_{k \in b} \underline{Y}_k \underline{U}_k = \sum_{k \in b} -\underline{I}_{sc_k} \Leftrightarrow \sum_{k \in b} \underline{Y}_k (\underline{V}'_b - \underline{V}'_c) = \sum_{k \in b} (-\underline{I}_{sc_k}) \quad (7.22)$$

Suma din membrul stâng se poate ordona după potențialele nodurilor sub forma:

$$\underline{V}'_b \sum_{k \in b} \underline{Y}_k - \sum_{k \in (b,c)} \underline{Y}_k \underline{V}'_c = \sum_{k \in b} (-\underline{I}_{sc_k}); \quad b = \overline{1, n-1} \quad (7.23)$$

unde:

- $\underline{Y}'_{bb} = \sum_{k \in b} \underline{Y}_k$  - este *admitanța proprie* a nodului (b); reprezintă suma



Coeficienții de pe diagonala sistemului (7.26) sunt admitanțele proprii ale nodurilor, de forma  $\underline{Y}_{bb}'$ , coeficienții nediagonali sunt admitanțele de cuplaj dintre noduri de forma  $\underline{Y}_{bc}'$  iar în membrul drept sunt curenții de scurtcircuit injectați în noduri  $\underline{I}_{sc_b}'$ .

Aplicarea metodei potențialelor nodurilor (pentru circuite fără cuplaje magnetice) se face după următorul algoritm:

- se alege nodul referință ( $\underline{V}_n' = 0$ ), marcându-se simbolic pe circuit punerea lui la masă
- se calculează coeficienții  $\underline{Y}_{kk}', \underline{Y}_{kj}', \underline{I}_{sc_k}'$  din sistemul (7.26) și se rezolvă apoi sistemul, obținându-se:  $\underline{V}_1', \underline{V}_2', \dots, \underline{V}_{n-1}', \underline{V}_n' = 0$
- se aleg sensuri de referință pe laturi și se calculează tensiunile pe laturi ( $\underline{U}_k$ ) sub forma (7.21)
- curenții prin laturi vor fi de forma:  $\underline{I}_k = \underline{Y}_k(\underline{U}_k + \underline{E}_k)$
- în circuite de curent continuu mărimile vor fi reale, de forma:  
 $\underline{Y}_k \rightarrow G_k (G_{kk}, G_{kj}); \underline{E}_k \rightarrow E_k; \underline{I}_{sc_k}' \rightarrow I_{sc_k}'; \underline{V}_k' \rightarrow V_k'$

#### Observație:

Dacă circuitul conține o latură incompletă cu sursă ideală de tensiune  $\underline{E}$  (care are  $\underline{Z}_l = 0 \rightarrow \underline{Y}_l = \infty$ ) un coeficient al sistemului (7.26) va fi  $\infty$  (cel scris pentru nodul unde concură această latură) iar în membrul doi curențul de scurtcircuit al aceluia nod va fi de asemenea  $\infty$ . În acest caz se procedează astfel:

- *Parametrizat*: latura incompletă (k) admitem că are un  $\underline{Z}_k \neq 0$ , dat parametric și se rezolvă sistemul (7.26); toate potențialele vor depinde de  $\underline{Z}_k$  și în soluția finală se calculează  $\lim_{\underline{Z}_k \rightarrow 0} \underline{V}_k'$ .

• Dacă în nodul (b) concură o latură incompletă, nu se va scrie ecuație de forma (7.26) pentru acel nod. Scăderea numărului de ecuații este compensată de faptul că în locul acelei ecuații se pot scrie ecuații de potențiale de forma:

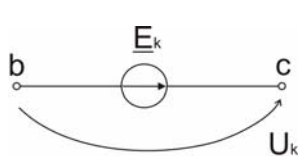


Fig 7.14

$$\underline{U}_k = \underline{V}_b' - \underline{V}_c' = -\underline{E}_k \quad (7.27)$$

având semnificația din figura 7.14.

- Cu ajutorul *TI Vaschy* se elimină latura incompletă. Dacă în circuit există o latură incompletă, cu sursa ideală de tensiune  $\underline{E}_1$  ca în fig. 7.15-a, cu *TI Vaschy* această latură poate fi suprimată.

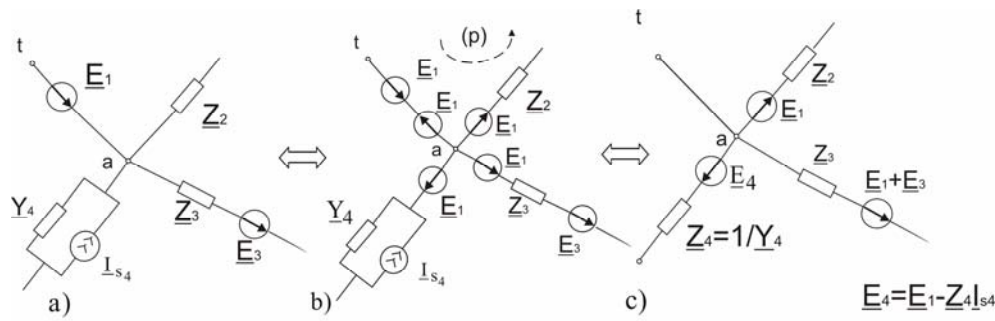


Fig 7.15

Introducând aceeași sursă ideală de tensiune pe toate laturile care concură într-un nod (a) de circuit, la fel orientate față de nod (figura 7.15- b), această operație nu modifică funcționarea circuitului (respectiv nu modifică curenții din laturile circuitului). O sursă ideală de tensiune ar putea modifica ecuațiile de tensiune scrise pe ochiuri de circuit; dar pentru ochiul (p) din fig. 7.15- b cele două t.e.m.  $\underline{E}_1$  introduse se compensează reciproc, de-a lungul ochiului ele apar cu  $\pm$ .

Cu T1 Vaschy se pot astfel suprima laturile cu sursă ideală de tensiune, cum a fost latura cu  $\underline{E}_1$  în figura 7.15- a. Sursele nou introduse se vor compune cu celelalte surse de pe ochiuri ca în figura 7.15- c, iar latura incompletă dispare, nodul (a) devine identic cu (t), a dispărut, deci nu mai trebuie scrisă ecuație de tipul (7.26).

**Observație:**

- Dacă circuitul are două noduri (O și N) (cum este cazul circuitelor trifazate, capitolul 9) iar unul dintre noduri îl considerăm nod de referință  $\underline{V}'_0 = 0$ , atunci din sistemul (7.26) a mai rămas o singură ecuație (avem o singură necunoscută  $\underline{V}'_n$ ).

$$\underline{V}'_n \sum_{k \in N} \underline{Y}_k = \sum_{k \in N} \underline{Y}_k \underline{E}_k \rightarrow \underline{V}'_n = \frac{\sum_{k \in N} \underline{Y}_k \underline{E}_k}{\sum_{k \in N} \underline{Y}_k} \quad (7.28)$$

Relația (7.28), ce decurge din (7.26) pentru circuite cu două noduri, este cunoscută sub numele de *teorema lui Millman*.

Pentru circuitele trifazate unde laturile sunt fazele sistemului alimentate cu  $\underline{U}_1, \underline{U}_2$  și  $\underline{U}_3$  și firul de nul pasiv având  $\underline{Y}_N$ , iar  $\underline{V}'_N$  este potențialul în raport cu "O", deci este

tensiunea între cele două puncte  $\underline{U}_N = \underline{V}_N' - \underline{V}_0' = \underline{V}_N'$ , expresia (7.28) se va scrie sub forma:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_1 + \underline{Y}_2 \underline{U}_2 + \underline{Y}_3 \underline{U}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N} \quad (7.29)$$

• Când se cere a se rezolva un circuit prin metoda *cea mai eficientă*, înseamnă a face un studiu topologic și a arăta care dintre metodele posibile duce la un sistem cu număr minim de ecuații.

## Aplicații

1. Se consideră circuitul din fig. 7.16. Să se stabilească expresiile curenților din laturi folosind metoda potențialelor nodurilor.

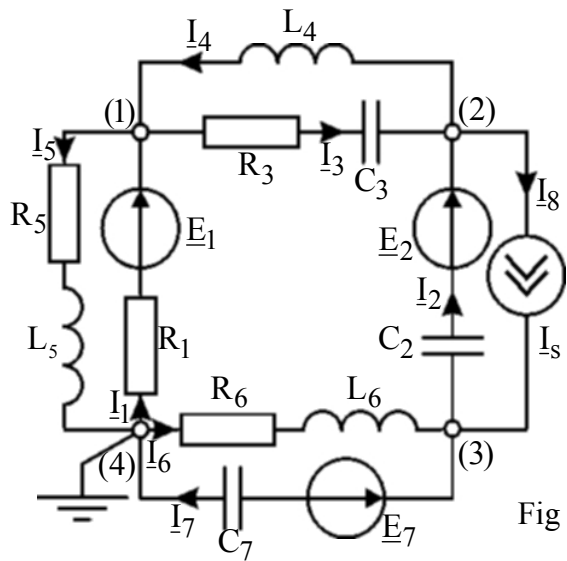


Fig 7.16

Circuitul are topologia  $s=1$ ,  $n=4$ ,  $l=8$  și alegem nodul (4) ca referință ( $\underline{V}_4' = 0$ ) potențialele celorlalte trei noduri definite în raport cu nodul (4) sunt  $\underline{V}_1'$ ,  $\underline{V}_2'$ ,  $\underline{V}_3'$ , care se determină din sistemul:

$$\begin{cases} \underline{Y}_{11}' \underline{V}_1' + \underline{Y}_{12}' \underline{V}_2' + \underline{Y}_{13}' \underline{V}_3' = \underline{I}_{sc1}' \\ \underline{Y}_{21}' \underline{V}_1' + \underline{Y}_{22}' \underline{V}_2' + \underline{Y}_{23}' \underline{V}_3' = \underline{I}_{sc2}' \\ \underline{Y}_{31}' \underline{V}_1' + \underline{Y}_{32}' \underline{V}_2' + \underline{Y}_{33}' \underline{V}_3' = \underline{I}_{sc3}' \end{cases} \quad (7.30)$$

Coeficienții din sistemul (7.30) au expresiile:

$$\underline{Y}'_{11} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_5 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3 - jX_{C_3}} + \frac{1}{jX_{L_4}} + \frac{1}{R_5 + jX_{L_5}}$$

$$\underline{Y}'_{22} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_4 + \underline{Y}_8 = j\omega C_2 + \frac{1}{R_3 - jX_{C_3}} - j\frac{1}{\omega L_4} + 0$$

$$\underline{Y}'_{33} = \underline{Y}_2 + \underline{Y}_6 + \underline{Y}_7 + \underline{Y}_8 = j\omega C_2 + \frac{1}{R_6 + jX_{L_6}} + j\omega C_7 + 0$$

$$\underline{Y}'_{12} = \underline{Y}'_{21} = -(\underline{Y}_3 + \underline{Y}_4) = -\left(\frac{1}{R_3 - jX_{C_3}} - j\frac{1}{\omega L_4}\right)$$

$$\underline{Y}'_{13} = \underline{Y}'_{31} = 0$$

$$\underline{Y}'_{23} = \underline{Y}'_{32} = -(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_8) = -(j\omega C_2 + 0)$$

$$\underline{I}'_{sc1} = \frac{\underline{E}_1}{R_1} ; \underline{I}'_{sc2} = j\omega C_2 \underline{E}_2 - \underline{I}_s ; \underline{I}'_{sc3} = -j\omega C_2 \underline{E}_2 + \underline{I}_s + j\omega C_7 \underline{E}_7$$

Înlocuiți acești coeficienți în sistemul (7.30) și cu valorile lor numerice s-ar putea rezolva sistemul obținându-se potențialele:  $\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3, \underline{V}'_4 = 0$ . Curenții din laturi de forma:  $\underline{I}_k = \underline{Y}_k(\underline{U}_k + \underline{E}_k)$  vor avea expresiile:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 + \underline{E}_1}{R_1} = \frac{1}{R_1}(-\underline{V}'_1 + \underline{E}_1)$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2(\underline{U}_2 + \underline{E}_2) = j\omega C_2(\underline{V}'_3 - \underline{V}'_2 + \underline{E}_2)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{U}_3 = \frac{\underline{V}'_1 - \underline{V}'_2}{R_3 - jX_{C_3}} ; \underline{I}_4 = \underline{Y}_4 \underline{U}_4 = -j\frac{1}{\omega L_4}(\underline{V}'_2 - \underline{V}'_1)$$

$$\underline{I}_5 = \underline{Y}_5 \underline{U}_5 = \frac{1}{R_5 + jX_{L_5}} \underline{V}'_1 ; \underline{I}_6 = \underline{Y}_6 \underline{U}_6 = \frac{1}{R_6 + jX_{L_6}}(-\underline{V}'_3)$$

$$\underline{I}_7 = \underline{Y}_7(\underline{U}_7 - \underline{E}_7) = j\omega C_7(\underline{V}'_3 - \underline{E}_7) ; \underline{I}_8 = \underline{I}_s$$

**2.** Pentru circuitul din figura 7.17 se cere să se scrie ecuațiile de funcționare prin metoda potențialelor nodurilor iar expresia curentului  $\underline{I}_{12}$  să se verifice cu teorema lui Thevenin.

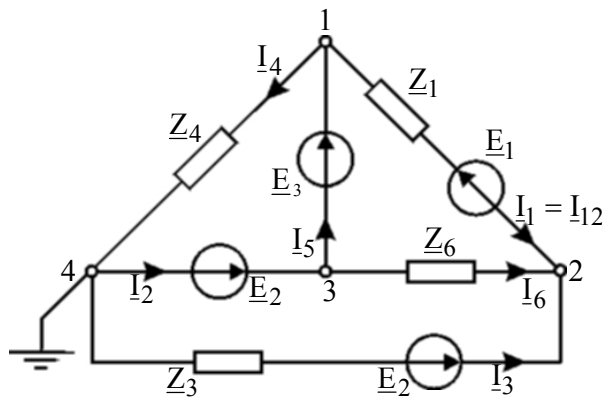


Fig 7.17

Alegem nodul (4) ca referință ( $\underline{V}'_4 = 0$ ). Circuitul are noduri în care concură laturi incomplete (nodurile 3 și 1) pentru care nu vom scrie ecuații (care ar fi cu coeficienți infiniți) ci vom scrie ecuații suplimentare, de forma (7.27):

$$\underline{V}'_4 = 0 ; \underline{V}'_3 = \underline{E}_2 ; \underline{V}'_1 = \underline{V}'_3 + \underline{E}_3 = \underline{E}_2 + \underline{E}_3$$

Mai rămâne să scriem o singură ecuație de tipul (7.26) pentru nodul (2) sub forma:

$$-\underline{Y}_1 \underline{V}'_1 + (\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_6) \underline{V}'_2 - \underline{Y}_6 \underline{V}'_3 = -\underline{Y}_1 \underline{E}_1 + \underline{Y}_3 \underline{E}_2$$

ecuație din care putem deduce expresia potențialului  $\underline{V}'_2$  (în raport cu nodul (4) luat referință):

$$\begin{aligned} \underline{V}'_2 &= \frac{\underline{Y}_1 (\underline{V}'_1 - \underline{E}_1) + \underline{Y}_3 \underline{E}_2 + \underline{Y}_6 \underline{V}'_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_6} = \\ &= \frac{\underline{Y}_1 (\underline{E}_2 + \underline{E}_3 - \underline{E}_1) + \underline{Y}_3 \underline{E}_2 + \underline{Y}_6 \underline{E}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_6} = \underline{E}_2 + \frac{\underline{Y}_1 (\underline{E}_3 - \underline{E}_1)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_6} \end{aligned}$$

Având expresiile tuturor potențialelor se pot calcula curenții din laturi. Curentul din latura (1), cea conectată între nodurile (1) și (2) este:

$$\begin{aligned} I_1 = I_{12} &= \underline{Y}_1 (\underline{U}_{12} - \underline{E}_1) = \underline{Y}_1 (\underline{V}'_1 - \underline{V}'_2 - \underline{E}_1) = \\ &= \underline{Y}_1 (\underline{E}_3 - \underline{E}_1) \cdot \left( 1 - \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_6} \right) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Cu teorema lui Thevenin, curentul  $I_{12}$  se scrie astfel:



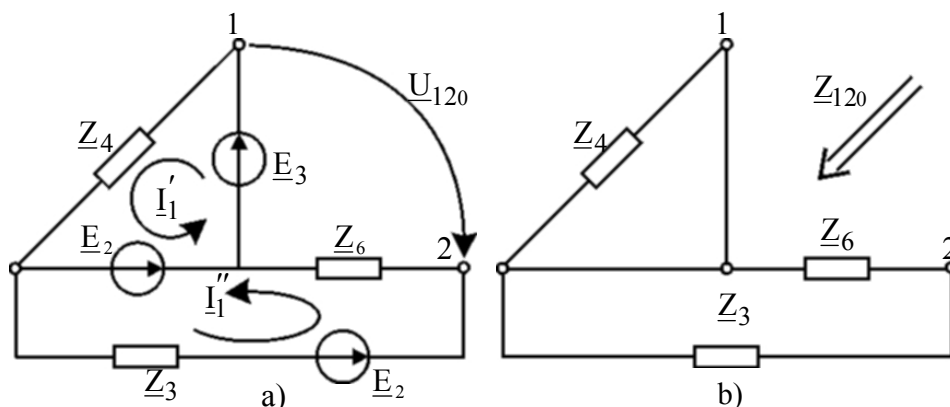


Fig 7.18

$$I_{12} = \frac{U_{120} - E_1}{Z_1 + Z_{120}} \quad (7.32)$$

unde  $U_{120}$  și respectiv  $Z_{120}$  au semnificațiile din figura 7.18-a, respectiv figura 7.18-b.

$$U_{120} = E_3 ; Z_{120} = \frac{Z_3 \cdot Z_6}{Z_3 + Z_6} \quad (7.33)$$

Atunci curentul  $I_1 = I_{12}$  dat de relația (7.32) va fi de forma:

$$\begin{aligned} I_{12} &= \frac{E_3 - E_1}{Z_1 + Z_{120}} = \frac{E_3 - E_1}{\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_3 + Y_6}} = \\ &= (E_3 - E_1) Y_1 \left( 1 - \frac{Y_1}{Y_1 + Y_3 + Y_6} \right) \end{aligned}$$

identică cu (7.31), deci teorema lui Thevenin pentru curentul  $I_{12}$  se verifică.

## 7.6 Metode matriciale de analiză a circuitelor electrice

### 7.6.1 Operații elementare cu matrici

Matricea  $[A]_{m \times n}$  este un tablou de elemente  $a_{jk}$  aranjate pe linii și pe coloane. Elementele sale  $a_{jk}$  pot fi: numere (reale sau complexe) și avem o

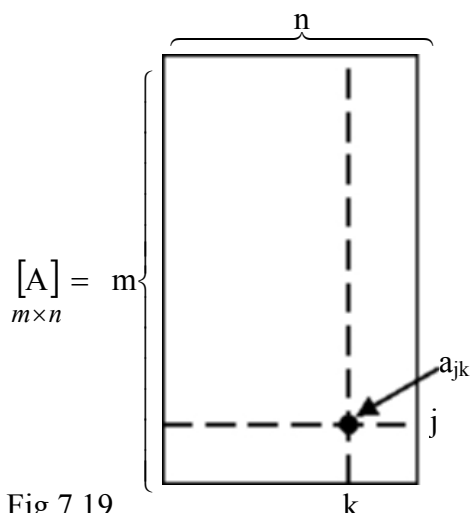


Fig 7.19

matrice de numere; funcții și avem o matrice de funcții sau matrici și avem o matrice compusă. Dacă  $m=n$  avem o matrice pătrată; dacă are dimensiunea  $(m \times 1)$  – matrice coloană; dacă are dimensiunea  $(1 \times n)$  – matrice linie iar  $(1 \times 1)$  este un scalar. Matricea coloană se mai numește vector.

O matrice diagonală are elemente nenule doar pe diagonala principală ( $a_{jj} \neq 0$ ,  $a_{jk} = 0$ ) iar dacă

$a_{jj}=1$  și  $a_{jk}=0$  avem o matrice unitate,  $[1]$ .

- matricea simetrică are  $a_{jk}=a_{kj}$ , deci simetrie față de diagonala principală.
- matricea transpusă a matricei  $[A]$  este  $[A]^t$  și se obține înlocuind liniile cu coloanele. Pentru o matrice simetrică  $[A] = [A]^t$ .
- matricea adjunctă a matricei  $[A]$  este  $[A]^x$  și se obține dacă fiecare element  $a_{jk}$  din matricea transpusă  $[A]^t$  se înlocuiește prin cofactorul său (minorul  $M_{jk}$  înmulțit cu  $(-1)^{j+k}$ , prin urmare ținând seama de paritatea elementului).

$$a_{jk} \rightarrow \Gamma_{jk} = (-1)^{j+k} \cdot M_{jk}$$

- matricea inversă  $[A]^{-1}$  se definește prin  $[A]^{-1} = [A]^x / |A|$  și are proprietatea  $[A] \cdot [A]^{-1} = [A]^{-1} \cdot [A] = [1]$ , fiind singurul produs matricial comutativ. Admit inversă numai matricile nesingulare ( $|A| \neq 0$ ) și acestea sunt matrici pătratice. Dacă  $|A| = 0$  matricea este singulară (degenerată) iar inversarea unei matrici diagonale se obține inversând fiecare element de pe diagonală.
- Adunarea (scăderea) a două matrici: se adună (scad) elementele corespunzătoare din cele două matrici,  $a_{jk} = a'_{jk} \pm a''_{jk}$ . Dacă matricile nu sunt de aceeași dimensiuni se completează cu linii și coloane nule (operație fictivă).

- Înmulțirea a două matrici:  $[A] \cdot [B] = [M]$ . Elementul  $m_{jk}$  din

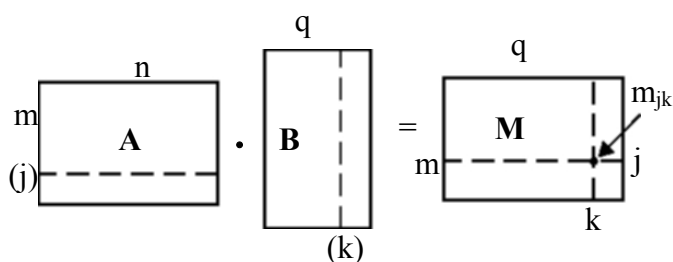


Fig 7.20

matricea produs  $[M]$  se obține înmulțind elementele liniei (j) din  $[A]$  cu elementele coloanei (k) din  $[B]$  și însumând rezultatul (figura 7.20). Dacă  $p \neq n$  se completează virtual cu linii (sau coloane) nule.

- Împărțirea a două matrici:  $\frac{[A]}{[B]} = [B]^{-1} \cdot [A]$ , deci nu se poate face împărțirea cu matrici singulare, care nu au inversă. Împărțirea se reduce tot la o înmulțire de două matrici.

- Transpusul unui produs de două matrici:

$$([A] \cdot [B])_t = [B]_t \cdot [A]_t ; ([A]_t)_t = [A] ; ([A] \cdot [B])_t = [B] \cdot [A]_t \quad (7.34)$$

- Derivarea (integrarea) unei matrici (la fel ca și înmulțirea cu un coeficient) se aplică asupra tuturor elementelor  $a_{jk}$  ale matricei (matrice de funcții).

Utilizarea *metodelor matriciale* în analiza unui circuit electric prezintă câteva avantaje în raport cu metodele “clasice” de analiză, cele bazate pe scrierea unor sisteme de ecuații:

- face mai simplă și mai *condensată scrierea* ecuațiilor circuitelor, scriind o singură ecuație matriceală în loc de un sistem de ecuații algebrice.
- permite stabilirea unor *relații generale* pentru calculul curenților și tensiunilor, care au o formă independentă de structura particulară a circuitelor. Toate softurile (de firmă) pentru studiul circuitelor electrice sunt prezentate în formă matricială.
- Dau o *formă sistematică* operațiilor de calcul, adecvată utilizării calculatoarelor. Un sistem de  $n=26$  ecuații algebrice cu  $n=26$  necunoscute, rezolvat cu Cramer necesită  $(n+1)! = 27! \approx 10^{27}$  înmulțiri, iar prin metode matriciale necesită  $n^3/3 \approx 6.500$  înmulțiri, deci timp de calcul redus.

– *fizic*, metodele matriciale nu aduc un conținut nou. Orice problemă de analiză a unui circuit rezolvabilă matricial este, în principiu, rezolvabilă cu una dintre metodele clasice (TK, curenți ciclici, potențiale noduri, superpoziție etc.)

### 7.6.2 Premisele reprezentării tensoriale și matriciale a parametrilor și a mărimilor de stare a unui circuit

Într-un circuit cu  $l$  laturi,  $n$  noduri și  $s$  subrețele, numărul necunoscutelor (curenții din laturi  $\underline{I}_k$  sau tensiunile de pe laturi  $\underline{U}_k$ ) este  $l$  iar al datelor problemei este  $(l \times l)$  pentru impedanțe și  $l$  pentru surse ( $\underline{E}_k, \underline{I}_{s_k}$ ).

– Cei  $l$  curenți din laturi sau  $o=l-n+s$  curenți ciclici dintr-un circuit reprezintă *componentele unui tensor* ( $\bar{\underline{I}}$  - *tensorul curent*) reprezentat într-un spațiu Hilbert cu  $l$ , respectiv  $o$  axe, astfel încât fiecare latură (sau ochi independent) constituie o axă de simetrie a acestui spațiu generalizat, numite *spațiul laturilor* (sau *spațiul ochiurilor*). Lucrăm cu o singură variabilă, tensorul curent  $\bar{\underline{I}}$ , a cărui matrice  $[\underline{I}]$  are ca elemente proiecțiile

tensorului pe cele  $l$  axe ale spațiului laturilor sau dacă îl raportăm la spațiul ochiurilor, matricea sa are dimensiunea  $[\underline{I}']$  și elementele sale (curenții din ochiuri) sunt proiecțiile tensorului pe cele “ $o$ ” axe. Trecerea de la curenții din laturi la curenții ciclici înseamnă schimbarea sistemului de referință față de care raportăm tensorul și această operație se poate face dacă la baza sa stă un invariant (în circuitele electrice puterea electrică produsă (consumată) este invariantul care stă la baza schimbării sistemului de referință).

– Cele  $n$  sau  $(n-1)$  potențiale ale nodurilor într-un circuit sunt proiecțiile unui *potențial tensor*  $\bar{\underline{V}}$  raportat la un spațiu Hilbert cu  $n$  axe, numit *spațiul nodurilor*, matricea tensorului  $\bar{\underline{V}}$  este de dimensiuni  $(n \times 1)$  și elementele sale sunt potențialele tuturor nodurilor din circuit.

Într-un circuit electric, diverselor mărimi li se asociază tensorii:

- tensori de ordinul zero (scalari): puterile, energiile într-un circuit.
- tensori de ordinul unu (vectori): tensiuni  $\underline{U}_k$ , t.e.m.  $\underline{E}_k$ , curenți  $\underline{I}_k$ , matricea lor este un vector de dimensiuni  $(l \times 1)$ .
- tensori de ordinul doi: impedanțele și admitanțele circuitelor. Matricile acestora sunt cu două dimensiuni  $[\underline{Z}]$ ,  $[\underline{Y}]$ .

$l \times l \quad l \times l$

- tensori de ordinul trei: matricile  $[Z]$  și  $[Y]$  pentru circuite parametrice cu un singur parametru ( $p$ ). Matricile lor sunt spațiale (cu trei dimensiuni). Ele se studiază pe secțiuni, pentru o valoare constantă a parametrului  $p$ , se obține o secțiune plană prin matrice.
- tensori de ordinul  $n$ : elementele unui circuit depind de  $n$  parametri,  $Z(p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Matricile lor sunt matrici spațiale cu  $n$  dimensiuni. Pentru valori constante a tuturor parametrilor (deci în secțiune) ele se reduc la matrici plane cu două dimensiuni.

Matricea impedanțelor unui circuit este o matrice plană, pătratică de dimensiuni  $(l \times l)$ . Pe diagonala sa sunt termeni de forma  $Z_{jj}$  care este impedanța laturii  $j$  (figura 7.21).  $Z_{jk}=Z_{kj}$  este impedanța mutuală

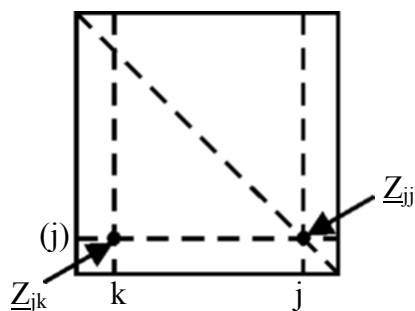


Fig 7.21

dintre laturile  $(j)$  și  $(k)$ . Pentru un circuit fără cuplaje între laturi,  $Z_{jk}=0$  și matricea  $[Z]$  a circuitului este o matrice diagonală. Matricea  $[Z]$  a circuitului se poate completa (desena) de pe circuit.

Matricea admitanțelor se definește prin:  $[Y]=[Z]^{-1}$ , ea se calculează și nu se poate desena de pe circuit (excepție pentru circuitele fără cuplaje, când  $[Z]$  este matrice diagonală, și în acest caz și  $[Y]$  va fi tot o matrice diagonală având elementele  $Y_{jj}=1/Z_{jj}$ ).

Matricile t.e.m  $[E]$ , a curenților  $[I]$  și a tensiunilor la borne  $[U]$  sunt matrici coloană ca în figura 7.22, fiecare element al lor se referă la o anumită latură din circuit.

$$[E] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{E}_1 \\ \underline{E}_2 \\ \vdots \\ \underline{E}_l \end{bmatrix} ; \quad [I] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \vdots \\ \underline{I}_l \end{bmatrix} ; \quad [U] = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ l \end{matrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \vdots \\ \underline{U}_l \end{bmatrix}$$

Fig 7.22

### 7.6.3 Caracterizarea proprietăților topologice ale unui circuit prin matrici

#### I. Matricea de incidență a laturilor la noduri [A]

Elementele acestei matrici sunt *coeficienții de incidență* a laturilor la noduri  $[A]_{l \times n}$  sau a laturilor la nodurile independente  $[A]_{l \times (n-s)}$ , care este *matricea de incidență redusă* și cu care de fapt se operează în studiul circuitelor.

$$[A]_{7 \times 3} = \begin{array}{c|ccc} & 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & -1 & 1 & \\ 4 & & -1 & \\ 5 & & 1 & -1 \\ 6 & & & -1 \\ 7 & & & 1 \end{array}$$

Elementele matricii de incidență sunt definite astfel:

$$a_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{– latura } j \text{ nu concură în nodul } k \\ -1 & \text{– latura } j \text{ intră în nodul } k \\ 1 & \text{– latura } j \text{ iese din nodul } k \end{cases}$$

Alături de graful circuitului desenat în figura 7.23 este desenată matricea de incidență a celor 7 laturi ale sale la cele 3 noduri independente.

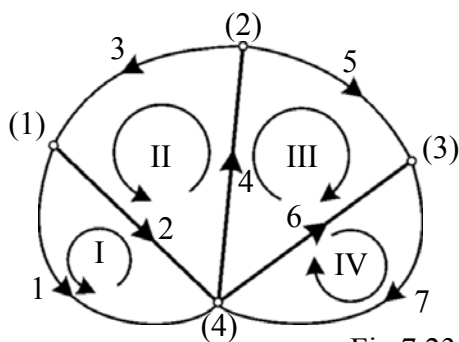


Fig 7.23

Matricea de incidență redusă  $[A]_{l \times (n-s)}$  se interpretează ca fiind

matricea coeficienților sistemului de (n-s) ecuații scrise cu T1K.

$$\text{Ecuația: } [A]_t \cdot [I] = 0 \quad (7.35)$$

este de altfel T1K sub formă matricială. Ea este, de fapt, transpunerea matricială a primelor (n-s) ecuații care s-ar scrie clasic cu T1K.

Matricea  $[A]$  se desenează de pe circuit, completându-se coloană cu coloană cu coeficienții  $\pm 1$  pentru toate laturile care concură în acel nod; pentru laturile care nu concură în nod  $a_{jk}=0$ , dar se lasă liber fără a alocă zero.

#### II. Matricea de conexiune (apartenență) a laturilor la ochiuri [B]

Într-un circuit cu  $l$  laturi considerăm un sistem de  $o=l-n+s$  ochiuri independente, fiecare ochi are un sens de referință în lungul său.

Matricea de conexiune  $[B]$  are dimensiunea  $(l \times o)$  și arată cum sunt conectate (cum aparțin) laturile unui circuit la ochiurile independente. Elementele acestei matrici sunt *coeficienții de conexiune* (apartenență) a laturilor la ochiuri, definiți astfel:

$$b_{jk} = \begin{cases} 0 & \text{– latura } j \text{ nu aparține ochiului } k \\ 1 & \text{– latura } j \text{ aparține ochiului } k \text{ și au același sens de referință} \\ -1 & \text{– latura } j \in k \text{ și au sensuri de referință contrare.} \end{cases}$$

	I	II	III	IV
1	1			
2	-1	1		
3		1		
4		1	1	
5			1	
6			-1	1
7				1

Fig 7.24

Pentru graful circuitului din figura 7.23 matricea de conexiune este desenată în figura 7.24. Matricea  $[B]$  se scrie completând pe orizontală (linie cu linie) apartenența celor 7 laturi la ochiurile: I, II, III, IV.

Elementele matricii  $[B]$  sunt coeficienții sistemului de ecuații care explicită curenții reali din laturi în funcție de curenții ciclici.

$$\begin{matrix} [I] \\ l \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [B] \\ l \times o \end{matrix} \cdot \begin{matrix} [I'] \\ o \times 1 \end{matrix} \quad (7.36)$$

așa cum matricea de incidență  $[A]$  reprezintă matricea coeficienților sistemului prin care se explicită tensiunile pe laturi în funcție de potențialele nodurilor independente:

$$\begin{matrix} [U] \\ l \times 1 \end{matrix} = \begin{matrix} [A] \\ l \times (n-s) \end{matrix} \cdot \begin{matrix} [V'] \\ (n-s) \times 1 \end{matrix} \quad (7.37)$$

Tot bazat pe semnificația elementelor matricii  $[B]$  se poate scrie T2K dual sub forma:

$$[B]_t \cdot [U] = 0 \quad (7.38)$$

Înlocuind (7.36) în (7.35), respectiv (7.37) în (7.38) se obține:

$$\begin{cases} [A]_t \cdot [B] \cdot [I'] = 0 \\ [B]_t \cdot [A] \cdot [V'] = 0 \end{cases} \quad (7.39)$$

Cum matricile  $[I']$  și  $[V']$  nu sunt nule, rezultă că:

$$[A]_t \cdot [B] = [B]_t \cdot [A] = 0 \quad (7.40)$$

ceea ce arată că  $[A]_t$  și  $[B]$  sunt două *matrici ortogonale*; la fel  $[B]_t$  și  $[A]$ . (aceasta prin analogie cu terminologia operațiilor cu vectori, când produsul scalar  $\underline{A} \cdot \underline{B} = 0$  numai dacă cei doi vectori sunt perpendiculari (ortogonali)).

Dacă *matricile topologice*  $[A]$  și  $[B]$  sunt definite pentru un *circuit dat* iar  $[\tilde{A}]$  și  $[\tilde{B}]$  pentru *circuitul dual* celui dat, având în vedere teorema dualității, vom putea scrie egalitățile:

$$[A] = [\tilde{B}] \quad ; \quad [B] = [\tilde{A}] \quad (7.41)$$

Deoarece  $[A]$  și  $[B]$  satisfac condiția de ortogonalitate (7.40), vom putea scrie că:

$$[\tilde{B}]_t \cdot [B] = [\tilde{A}]_t \cdot [A] \quad (7.42)$$

ceea ce înseamnă că graful  $G$  al circuitului dat și graful  $\tilde{G}$  al circuitului dual sunt două *grafuri ortogonale*. Și sub acest aspect se justifică algoritmul prin care se construiește graful (circuitul) dual unui graf (circuit) dat.

#### 7.6.4 Forma matricială a TK

Pentru o latură de circuit cu sursă reală de tensiune (sau de curent) ca în figura 7.25, se pot scrie ecuații de tensiuni (sau de curenți) sub forma:

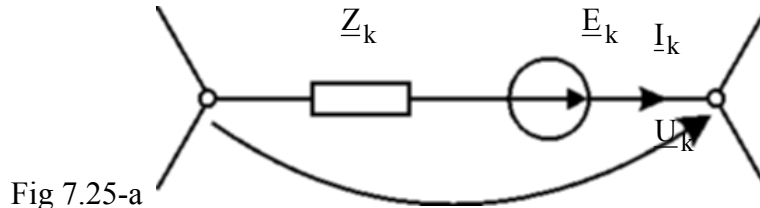


Fig 7.25-a

$$\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k - \underline{E}_k \leftrightarrow \underline{I}_k = \underline{Y}_k (\underline{U}_k + \underline{E}_k) \quad (7.43)$$

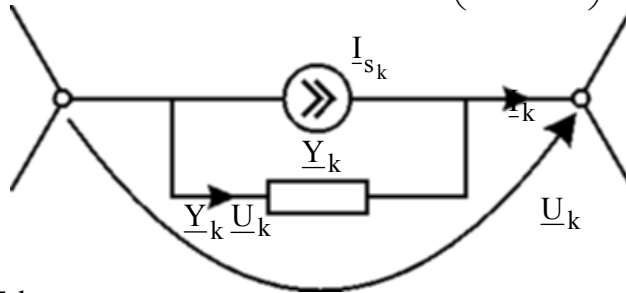


Fig 7.25-b

$$\underline{I}_k = \underline{I}_{s_k} + \underline{Y}_k \underline{U}_k \leftrightarrow \underline{U}_k = \underline{Z}_k (\underline{I}_k - \underline{I}_{s_k}) \quad (7.44)$$



Dacă pentru fiecare latură putem scrie câte o ecuație de tipul (7.43) și (7.44), pentru întregul circuit se vor scrie *ecuații matriciale de tensiuni*.

$$[U] = [Z] \cdot [I] - [E] \quad (7.45) \quad ; \quad [U] = [Z] \cdot ([I] - [I_s]) \quad (7.46)$$

respectiv *ecuații matriciale de curenți* sub forma:

$$[I] = [Y] \cdot ([U] + [E]) \quad (7.47) \quad ; \quad [I] = [Y] \cdot [U] + [I_s] \quad (7.48)$$

dacă la transpunerea matricială s-a păstrat același sens de referință unic pentru toate mărimile care aparțin aceleiași laturi ( $\underline{U}$ ,  $\underline{I}$ ,  $\underline{E}$ ,  $\underline{I}_s$ ).

Ecuațiile (7.35) și (7.38) reprezintă T1K – clasic, respectiv T2K – dual:

$$[A]_t \cdot [I] = 0 \quad \text{și} \quad [B]_t \cdot [U] = 0$$

Înmulțim la stânga ecuațiile (7.47), (7.48) cu  $[A]_t$  și ținând seama de (7.35) se obține:

$$[A]_t \cdot [Y] \cdot [U] = -[A]_t \cdot [I_s] \quad (7.49)$$

$$[A]_t \cdot [I] = [A]_t \cdot [Y] \cdot [U] + [A]_t \cdot [Y] \cdot [E] = [A]_t \cdot ([Y] \cdot [E] - [I_s]) \quad (7.50)$$

Respectiv, dacă se înmulțesc la stânga relațiile (7.45), (7.46) cu  $[B]_t$ , în contextul ecuației (7.38), se poate scrie succesiv:

$$[B]_t \cdot [Z] \cdot [I] = [B]_t \cdot [E] \quad (7.51)$$

$$[B]_t \cdot [U] = [B]_t \cdot [Z] \cdot [I] - [B]_t \cdot [Z] \cdot [I_s] = [B]_t \cdot ([E] - [Z] \cdot [I_s]) \quad (7.52)$$

Compactând într-o singură ecuație relațiile (7.50) și (7.51), care operează cu aceeași necunoscută  $[I]$ , se obține *forma clasică a TK matricială*:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [A]_t \\ [B]_t \cdot [Z] \end{bmatrix}}_{[K]} \cdot [I] = \underbrace{\begin{bmatrix} [A]_t \cdot ([Y] \cdot [E] - [I_s]) \\ [B]_t \cdot [E] \end{bmatrix}}_{[S]} \quad (7.53)$$

unde matricea compusă  $[K]_{l \times l}$  se numește *matricea Kirchhoff* iar matricea

compusă  $[S]_{l \times 1}$  se numește *matricea surselor*.

Matricile  $[K]$  și  $[S]$  se completează de pe circuit în funcție de matricile lor componente:  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[E]$ ,  $[I_s]$ ,  $[Z]$  și  $[Y] = [Z]^{-1}$ .

*Forma matricială a TK* scrise compact este:

$$[K] \cdot [I] = [S] \rightarrow [I] = [K]^{-1} \cdot [S] \rightarrow \begin{cases} [U] = [Z] \cdot [I] - [E] \\ [U] = [Z] \cdot ([I] - [I_s]) \end{cases} \quad (7.54)$$

Sub formă duală (necunoscuta este vectorul tensiunilor la bornele laturilor de circuit  $[U]_{l \times 1}$ ), TK scrise matricial se obțin prin compactarea relațiilor (7.49) și (7.52) care operează cu necunoscuta  $[U]$  și se obține *forma duală a TK matricială*, sub forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [A]_t \cdot [Y] \\ [B]_t \end{bmatrix}}_{[K]^d} \cdot [U] = \underbrace{\begin{bmatrix} -[A]_t \cdot [I_s] \\ [B]_t \cdot ([E] - [Z] \cdot [I_s]) \end{bmatrix}}_{[S]^d} \quad (7.55)$$

unde  $[K]^d_{l \times l}$  este *matricea Kirchhoff duală* iar  $[S]^d_{l \times 1}$  este *matricea surselor duală*. TK matricial operează cu matrice de dimensiuni  $(l \times l)$  a lui  $[K]$  și  $[K]^d$  așa cum clasic presupune sisteme de  $l$  ecuații cu  $l$  necunoscute.

Forma matricială a TK duală se scrie compact sub forma:

$$[K]^d \cdot [U] = [S]^d \rightarrow [U] = ([K]^d)^{-1} \cdot [S]^d \rightarrow \begin{cases} [I] = [Y] \cdot ([U] + [E]) \\ [I] = [Y] \cdot [U] + [I_s] \end{cases} \quad (7.56)$$

Puterea complexă absorbită de laturile circuitului este:

$$\underline{S} = [U]_t \cdot [I]^* \quad (7.57)$$

iar puterea complexă produsă de sursele de tensiune  $[E]$  respectiv de sursele de curent  $[I_s]$  are expresia:

$$\underline{S}_g = [E]_t \cdot [I]^* + [U]_t \cdot [I_s]^* \quad (7.58)$$

Dacă în circuit nu există surse de curent (sau au fost echivalate în prealabil prin surse reale de tensiune echivalente), atunci în toate relațiile precedente se consideră  $[I_s] = 0$ .

### 7.6.5 Forma matricială a metodei curenților ciclici

Dacă  $[I]$  este matricea curenților reali din laturi iar  $[I']$  este matricea curenților ciclici din ochiuri, între cele două matrici este relația:

$$[I] = [B] \cdot [I'] \quad (7.36)$$

Înlocuind în ecuația matricială (7.51) curenții reali în funcție de curenții ciclici se obține:

$$[B]_t \cdot [E] = [B]_t \cdot [Z] \cdot [I] = [B]_t \cdot [Z] \cdot [B] \cdot [I'] \quad (7.59)$$

Facem notațiile:

$[Z'] = [B]_t \cdot [Z] \cdot [B]$  - matricea pătratică ( $o \times o$ ) a impedanțelor de ochiuri

$[E'] = [B]_t \cdot [E]$  - matricea t.e.m ale ochiurilor

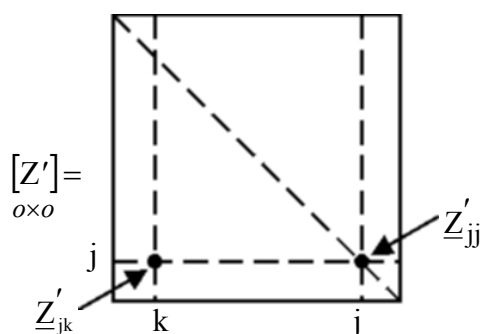


Fig 7.26

Matricea  $[Z']$  din figura 7.26 are pe diagonală impedențele proprii ale ochiurilor  $Z'_{jj}$  iar nediamonal  $Z'_{jk} = Z'_{kj}$  impedențele comune ochiului  $j$  și  $k$ .

Ecuația (7.59) se poate scrie sub forma:

$$[Z'] \cdot [I'] = [E'] \quad (7.60)$$

care este ecuația matricială corespunzătoare metodei curenților ciclici. Ea poate fi privită ca transpunerea matricială a sistemului de ecuații (7.12) scris clasic cu metoda curenților ciclici.

Algoritmul bazat pe forma matricială a curenților ciclici este prezentat în figura 7.27.

Să arătăm că la trecerea de la curenții din laturi, la curenții ciclici, tensorul curent  $\bar{I}$  își schimbă sistemul de referință: se trece de la spațiul laturilor cu  $l$  axe la spațiul ochiurilor cu  $o$  axe și că această transformare are la bază un invariant, puterea electrică:

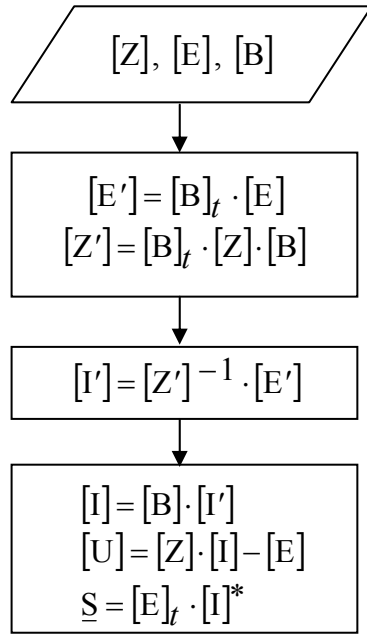


Fig 7.27

$$\underline{S} = [\underline{E}]_t \cdot [\underline{I}]^* = [\underline{E}]_t \cdot [\underline{B}] \cdot [\underline{I}']^* = (\underline{B}_t \cdot [\underline{E}])_t \cdot [\underline{I}']^* = [\underline{E}']_t \cdot [\underline{I}']^* = \underline{S}' \quad (7.61)$$

Puterea în spațiul laturilor este  $\underline{S}$  iar puterea în spațiul ochiurilor este  $\underline{S}'$ .

Puterea consumată în circuit este:

$$\underline{S}_c = ([\underline{Z}] \cdot [\underline{I}])_t \cdot [\underline{I}]^* = ([\underline{Z}'][\underline{I}'])_t \cdot [\underline{I}']^* \quad (7.62)$$

*Observație* Pentru circuite cu laturi incomplete cu  $\underline{E}$  ( $\underline{Z}_i = 0$ ) sau  $\underline{I}_s$  ( $\underline{Z}_s = \infty$ ) se aplică în preambul teoremele lui Vaschy pentru a elimina aceste laturi și apoi se pot aplica algoritmi matriciali.

În algoritmul din figura 7.27 pasul cel mai costisitor este inversarea unei matrici, operativitatea unui algoritm este cu atât mai mare cu cât sunt mai puține astfel de operații.

### 7.6.6 Forma matricială a metodei potențialelor nodurilor

Într-un circuit cu  $s$ -subrețele  $l$ -laturi și  $n$ -noduri considerând în fiecare subrețea câte un nod referință (de potențial zero) vom avea  $(n-s)$  noduri cu potențiale necunoscute, respectiv matricea  $[\underline{V}']$  a potențialelor nodurilor are dimensiunea  $[(n-s) \times 1]$ . Vectorul tensiunilor la bornele laturilor este  $[\underline{U}]_{l \times 1}$ , legat de vectorul  $[\underline{V}']$  prin relația (7.37):

$$[\underline{U}] = [\underline{A}] \cdot [\underline{V}'] \quad (7.37)$$

Din relația (7.50), ținând seama că  $[\underline{A}]_t \cdot [\underline{I}] = 0$  rezultă:

$$[\underline{A}]_t \cdot [\underline{Y}] \cdot [\underline{U}] = -[\underline{A}]_t \cdot [\underline{Y}] \cdot [\underline{E}] = -[\underline{A}]_t \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_{sc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I}'_{sc} \end{bmatrix} \quad (7.59)$$

unde  $[\underline{I}_{sc}]_{l \times 1} = [\underline{Y}] \cdot [\underline{E}]$  este matricea coloană a curenților de scurtcircuit a tuturor laturilor, iar

$\begin{bmatrix} \underline{I}'_{sc} \end{bmatrix}_{(n-s) \times 1}$  este matricea coloană a curenților de scurtcircuit injectați în cele  $(n-s)$  noduri independente.

Înlocuind (7.37) în (7.59) se obține succesiv:

$$[A]_t \cdot [Y] \cdot [U] = [A]_t \cdot [Y] \cdot [A] \cdot [V'] = \begin{bmatrix} I'_{sc} \end{bmatrix} \quad (7.60)$$

Cu notațiile:  $\begin{cases} [Y'] = [A]_t \cdot [Y] \cdot [A] & \text{- matricea admitanțelor în metoda} \\ & \text{potențialelor nodurilor} \\ \begin{bmatrix} I'_{sc} \end{bmatrix} = -[A]_t \cdot [Y] \cdot [E] & \text{- matricea curenților de scurt} \\ & \text{injectați în noduri} \end{cases}$

Ecuția matricială specifică metodei este:

$$\begin{aligned} [Y'] \cdot [V'] &= \begin{bmatrix} I'_{sc} \end{bmatrix} \rightarrow [V'] = [Y']^{-1} \cdot \begin{bmatrix} I'_{sc} \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} [U] = [A] \cdot [V'] \\ [I] = [Y] \cdot ([U] + [E]) \end{cases} \end{aligned} \quad (7.61)$$

Algoritmul metodei din figura 7.28 implică două inversări de matrici; dacă circuitul ar fi fără cuplaje,  $[Z]$  ar fi diagonală și  $[Y]$  s-ar scrie direct de pe circuit.

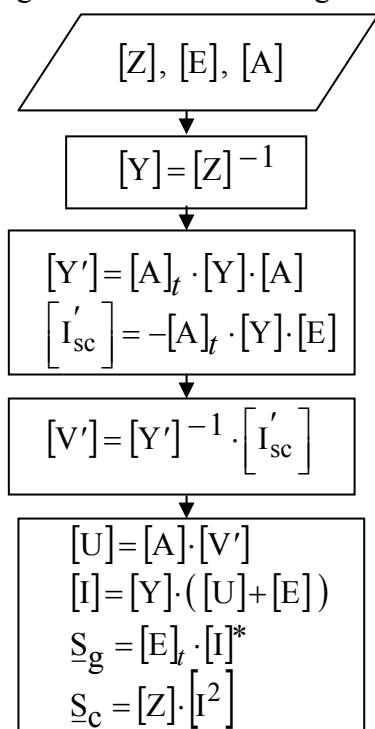


Fig 7.28

Sub formă matricială (spre deosebire de forma clasică a metodei), algoritmul se poate aplica și pentru circuite cu cuplaje mutuale (când  $[Y]$  nu se mai poate scrie de pe circuit). În acest caz însă, elementele matricei  $[Y']$  nu mai sunt coeficienții sistemului de ecuații (7.26), cum ar fi fost pentru circuite fără cuplaje.

Matricial se introduc în program, ca date de intrare, matricile  $[Z]$ ,  $[E]$ ,  $[A]$ .

Și în acest caz, la trecerea de la spațiul laturilor la spațiul nodurilor (independente) puterea este invariantul care stă la baza schimbării sistemului de referință:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= [U]_t \cdot [I_{sc}]^* = ([A] \cdot [V'])_t [I_{sc}]^* = \\ &= [V']_t \cdot ([A]_t [I_{sc}]^*) = [V']_t \cdot \begin{bmatrix} I'_{sc} \end{bmatrix}^* = \underline{S}' \end{aligned} \quad (7.62)$$

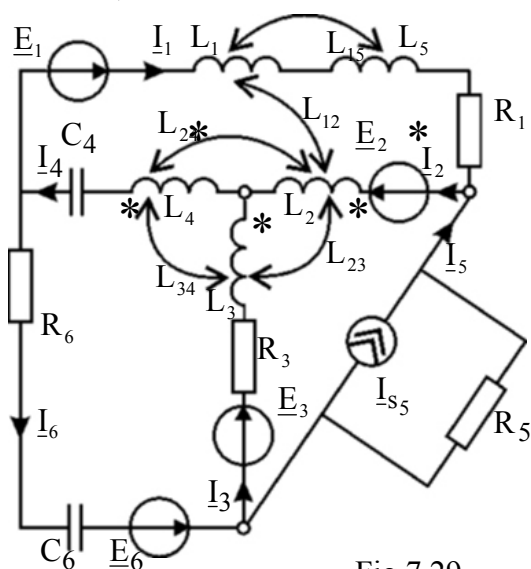
**Aplicații**

Fig 7.29

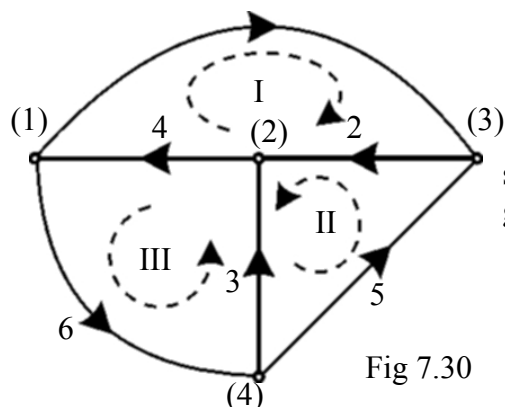
1. Pentru circuitul din figura 7.29 se cere să se deseneze matricile  $[Z]$ ,  $[E]$ ,  $[A]$  și  $[B]$ .

În prealabil sursa de curent de pe latura (5) o transformăm în sursă de tensiune echivalentă având:  $\underline{E}_5 = R_5 \underline{I}_{s5}$  și  $\underline{Z}_5 = R_5$ .

Matricea  $[Z]$  de dimensiuni  $(l \times l) = (6 \times 6)$  este:

	1	2	3	4	5	6
1	$R_1 + j(X_{L1} + X_{L5} - 2X_{L15})$	$jX_{L12}$	-	-	-	-
2	$jX_{L12}$	$jX_{L2}$	$-jX_{L23}$	$-jX_{L24}$	-	-
3	-	$-jX_{L23}$	$R_3 + jX_{L3}$	$jX_{L34}$	-	-
4	-	$-jX_{L24}$	$jX_{L34}$	$jX_{L4} - jX_{C4}$	-	-
5	-	-	-	-	$R_5$	-
6	-	-	-	-	-	$R_6 - jX_{C6}$

M

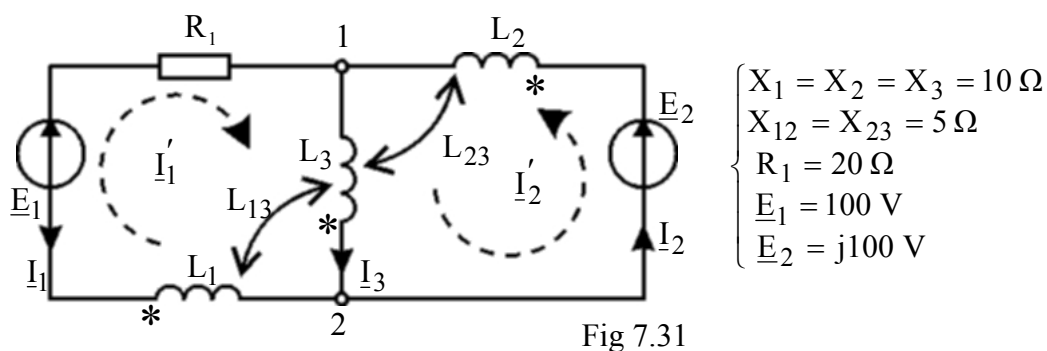


) Matricile  $[E]$ ,  $[A]$  și  $[B]$  le scriem de pe circuit, respectiv de pe graful circuitului (figura 7.30):

Fig 7.30

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|}
\hline 1 & \underline{E}_1 \\
\hline 2 & \underline{E}_2 \\
\hline 3 & \underline{E}_3 \\
\hline 4 & \\
\hline 5 & R_5 \underline{I}_{-s_5} \\
\hline 6 & \underline{E}_6 \\
\hline
\end{array}
&
; \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline & \text{I} & \text{II} & \text{III} \\
\hline 1 & 1 & & \\
\hline 2 & 1 & 1 & \\
\hline 3 & & -1 & 1 \\
\hline 4 & 1 & & 1 \\
\hline 5 & & 1 & \\
\hline 6 & & & 1 \\
\hline
\end{array}
&
; \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|}
\hline & 1 & 2 & 3 \\
\hline 1 & 1 & & -1 \\
\hline 2 & & -1 & 1 \\
\hline 3 & & -1 & \\
\hline 4 & -1 & 1 & \\
\hline 5 & & & -1 \\
\hline 6 & 1 & & \\
\hline
\end{array}
\end{array}
\end{array}$$

**2.** Se consideră circuitul din figura 7.31 având elementele:



Se cere:

- să se deseneze matricile  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[E]$ ,  $[Z]$
- să se rezolve circuitul prin metoda curenților ciclici: clasic și matricial
- să se facă bilanțul puterilor

a)

$$[A] = \begin{matrix} 3 \times 1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \end{matrix} ; \quad [B] = \begin{matrix} 3 \times 2 \\ \begin{matrix} & 1' & 2' \\ \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix} ; \quad [E] = 100 \cdot \begin{matrix} 3 \times 1 \\ \begin{bmatrix} 1 \\ j \\ \end{bmatrix} \end{matrix} ;$$

$$[Z] = \begin{matrix} 3 \times 3 \\ \begin{matrix} & 1 & 2 & 3 \\ \begin{bmatrix} R_1 + jX_1 & & jX_{13} \\ & jX_2 & -jX_{23} \\ jX_{13} & -jX_{23} & jX_3 \end{bmatrix} \end{matrix} \end{matrix} = 5 \cdot \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1+j2 & & j \\ & j2 & -j \\ j & -j & j2 \end{bmatrix} \end{matrix} [\Omega]$$

b)

$$\begin{cases} Z'_{11} = R_1 + jX_1 + jX_3 + j2X_{13} = 20 + j30 \\ Z'_{22} = jX_2 + jX_3 - j2X_{23} = j10 \\ Z'_{12} = Z'_{21} = jX_3 + jX_{13} - jX_{23} = j10 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow [Z'] = [B]_t \cdot [Z] \cdot [B] = 10 \cdot \begin{matrix} 2 \times 2 \\ \begin{bmatrix} 2+j3 & j \\ j & j \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} Z'_{11}I'_1 + Z'_{12}I'_2 = E'_1 \\ Z'_{21}I'_1 + Z'_{22}I'_2 = E'_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I'_1 = -j5 \text{ A} \\ I'_2 = 5(2+j) \text{ A} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I_1 = -j5 \text{ A} \\ I_2 = 5(2+j) = \sqrt{125} \angle \varphi_2 \\ I_3 = 10 \text{ A} \end{cases}$$

$$[Z']^{-1} = \frac{[Z']^x}{|Z'|} = \frac{10 \begin{bmatrix} j & -j \\ -j & 2+j3 \end{bmatrix}}{200(-1+j)} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1-j & -1+j \\ -1+j & 1-j5 \end{bmatrix}$$

$$[I'] = [Z']^{-1} \cdot [E'] = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 1-j & -1+j \\ -1+j & 1-j5 \end{bmatrix} \cdot 100 \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j5 \\ 5(2+j) \end{bmatrix} [\text{A}]$$



c)

$$\underline{S}_g = \underline{E}_1 \underline{I}_1^* + \underline{E}_2 \underline{I}_2^* = 100(j5) + j100 \cdot 5(2 - j) = (500 + j1500) \text{ VA}$$

$$P_R = R_1 I_1^2 = 20 \cdot 5^2 = 500 \text{ W}$$

$$Q_x = X_1 I_1^2 + X_2 I_2^2 + X_3 I_3^2 + 2X_{13} I_1 I_3 \cos \varphi_{13} + 2(-X_{23}) I_2 I_3 \cos \varphi_{23} =$$

$$= 10(5^2 + 125 + 100) + 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \cos 90^\circ - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot \sqrt{125} \cdot \frac{10}{\sqrt{125}} = 1500 \text{ VAR}$$

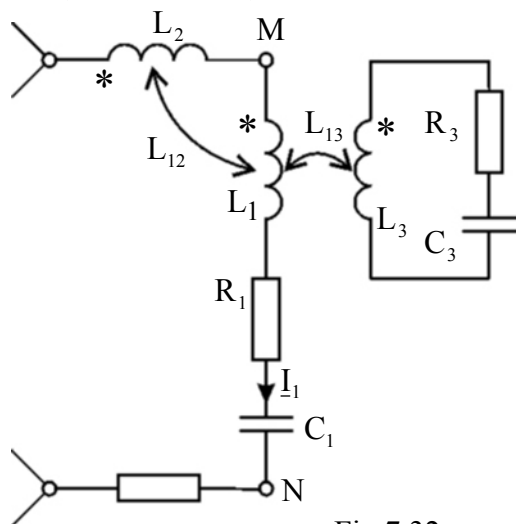


Fig 7.32

3. Pentru secțiunea de circuit din figura 7.32 se cere să se arate în ce condiții defazajul dintre tensiunea  $\underline{U}_{MN}$  și  $\underline{I}_1$  este  $\alpha$ .

Scriem tensiunea între punctele M și N sub forma:

$$\underline{U}_{MN} = jX_{12} \underline{I}_1 + (R_1 - jX_{C1}) \underline{I}_1 + [jX_{L1} - \alpha_{13}^2 (R_3 - j(X_{L3} - X_{C3}))] \underline{I}_1$$

$$\underline{U}_{MN} = \left[ \underbrace{(R_1 + \alpha_{13}^2 R_3)}_{R_{MN}} + j \underbrace{(X_{L1} - X_{C1} + X_{12} - \alpha_{13}^2 (X_{L3} - X_{C3}))}_{X_{MN}} \right] \cdot \underline{I}_1 =$$

$$= (R_{MN} + jX_{MN}) \cdot \underline{I}_1$$

unde  $\alpha_{13}^2 = \frac{X_{13}^2}{R_3^2 + (X_{L3} - X_{C3})^2}$  este coeficientul de reflexie al impedanțelor.

$$\text{Unghiul } \alpha = \angle(\underline{U}_{MN}, \underline{I}_1) \text{ se realizează dacă } \operatorname{tg} \alpha = \frac{X_{MN}}{R_{MN}}$$

dacă  $\alpha = 0 \rightarrow X_{MN} = 0$  ;  $\alpha > 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{X_{MN}}{R_{MN}}$  ( $I_1$  în urma lui

$\underline{U}_{MN}$ );  $\alpha < 0 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{-X_{MN}}{R_{MN}}$

4. Pentru schema din figura 7.33 se cere să se determine “circuitul echivalent Thevenin”.  $R_3 = X_{C_2} = 2 \text{ k}\Omega$  ;  $X_{L_5} = 1 \text{ k}\Omega$  ;  $I_{s_1} = 3 \text{ mA}$ ;  $I_{s_2} = 2I_2$

Cu potențialele la noduri se scriu ecuațiile:

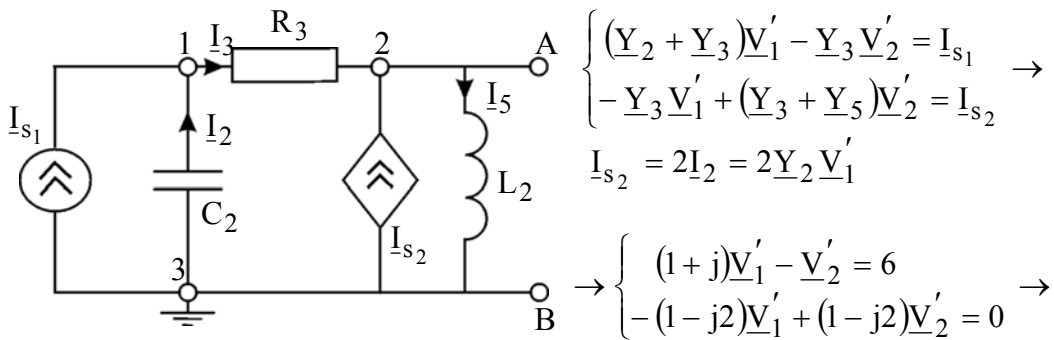


Fig 7.33

$$\rightarrow \underline{V}'_1 = \underline{V}'_2 = -j6 \rightarrow$$

$$\rightarrow \underline{U}_{AB0} = \underline{E}_e = -j6 \text{ V}$$

Pentru a determina  $\underline{Z}_{AB0}$  vom pasiviza schema din figura 7.33:

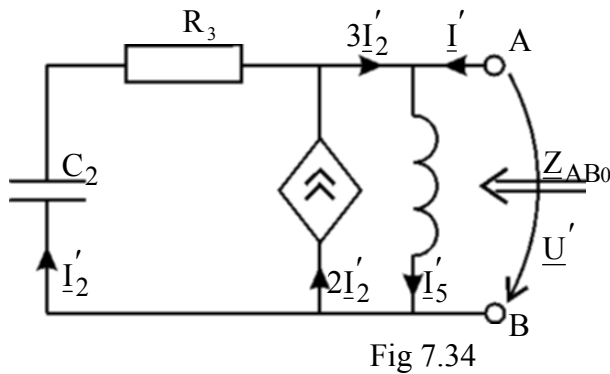


Fig 7.34

$$\begin{aligned} I' &= I'_5 - 2I'_2 - I'_2 = \\ &= \frac{U'}{jX_{L_5}} - 3 \frac{U'}{R_3 - jX_{C_2}} = \\ &= U' \left( \frac{1}{j} - \frac{3}{2 - j2} \right) \end{aligned}$$

$$\underline{Z}_{AB0} = \frac{U'}{I'} = \frac{2}{5}(3 - j)\Omega$$

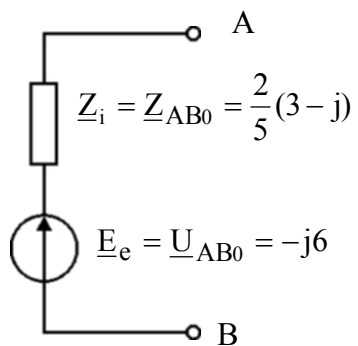


Fig 7.35

Cu parametrii  $\underline{E}_e = \underline{U}_{AB0}$  și  $\underline{Z}_i = \underline{Z}_{AB0}$  se alcătuiește generatorul echivalent de tensiune (figura 7.35), numit și *circuitul echivalent Thevenin*.