

1.Semnale electrice

Semnalele electrice sunt mărimi fizice (de tip tensiune sau intensitate curent) cu ajutorul cărora se transmit informații, comenzi, energie electromagnetică etc., iar din punct de vedere matematic sunt reprezentate prin funcții de timp.

Studiul proprietăților semnalelor electrice este legat de următoarele aspecte:

- determinarea *spectrului unui semnal* și a mărimilor sale caracteristice;
- determinarea *puterii și energiei* transmise printr-un semnal;
- determinarea *răspunsului unui circuit* la un semnal dat.

Cel mai simplu semnal este *semnalul continuu* (o constantă în raport cu timpul) motiv pentru care îl vom trata ca o formă particulară (curent continuu) de semnal variabil.

1.1 Semnale alternative

Semnalele alternative sunt semnale periodice a căror valoare medie pe o perioadă este nulă. *Mărime periodică* este mărimea variabilă care se repetă identic după trecerea unor intervale egale de timp:

$$i(t) = i(t + T) = i(t + nT) \quad (1.1)$$

unde T [sec] este *perioada* semnalului și este intervalul de timp după care semnalul se repetă.

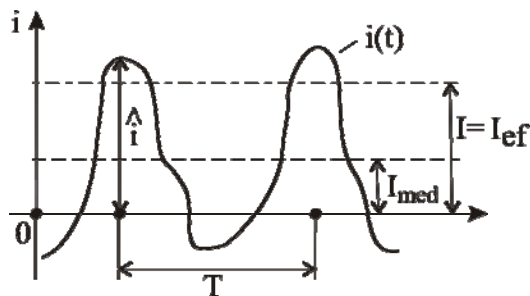


Fig 1.1

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Numărul de perioade cuprinse în unitatea de timp se numește *frecvență* „ f ”, măsurată în hertz [Hz]. Mărimea $\omega = 2\pi f$ este *pulsatia* (frecvența unghiulară) măsurată în rad/sec sau sec^{-1} . Între frecvență, pulsație și perioadă există legăturile:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.2)$$

Legătura $\omega T = 2\pi$ pune în evidență faptul că în timp de o perioadă T faza semnalului se schimbă cu 2π .

Mărimile caracteristice unui semnal alternativ sunt:

- *valoarea instantanee* $i=i(t)$ este valoarea pe care o ia semnalul $i(t)$ la un moment dat „ t ”, oricare în evoluția semnalului; ea este data prin expresia $i(t)$ sau prin graficul ei.
- *valoarea de vârf* \hat{i} este cea mai mare valoare instantanee atinsă în decursul unei perioade. Este importantă pentru semnalele de tip tensiune (întrucât o valoare de vârf „ \hat{u} ” foarte mare este periculoasă pentru multe componente de circuit).
- *valoarea medie* I_{med} reprezintă media aritmetică a valorilor instantanee pe intervalul pe care se face medierea:
 - media pe intervalul de timp (t_1, t_2) este:

$$I_{med} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt \quad (1.3)$$

- media pe o perioadă (când nu se menționează intervalul de mediere, valoarea medie se consideră pe o perioadă) :

$$I_{med} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad (1.4)$$

- valoarea medie redresată este valoarea medie a semnalului $|i(t)|$, respectiv alternanțele negative au fost răsturnate (semnal „redresat”):

$$I_{med_r} = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt \quad (1.5)$$

Pentru o mărime *alternativă* valoarea medie în decursul unei perioade este nulă ($I_{med}=0$), respectiv alternanța (+) și cea (−) ale semnalului închid arii egale cu abscisa.

Semnalul *pulsatoriu* este acela pentru care valoarea sa instantanee nu-și schimbă semnul, el nu are arii \pm .

- *valoarea efectivă (eficace)* a unei mărimi alternative este valoarea medie pătratică a valorilor instantanee pe o perioadă:

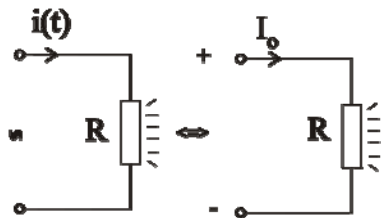


Fig 1.2

$$I = I_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad (1.6)$$

Valoarea efectivă a unui curent variabil $i(t)$ este numeric egală cu intensitatea I_0 a unui curent continuu care, străbătând aceeași rezistență R ca și curentul variabil și în același interval de timp, produce aceeași căldură (prin efect Joule) ca în figura 1.2.

Din cauza inerției mecanice a echipamentului mobil, instrumentele electrice de măsură cu indicație directă nu pot urmări variațiile instantanee ale mărimilor variabile măsurate, de tip u (voltmetre) și i (ampermetre). De aceea, majoritatea indică valorile efective U sau I ale mărimilor măsurate.

1.2 Semnale sinusoidale

1.2.1 Mărimi caracteristice

Semnalul sinusoidal este un semnal de tip alternativ de forma:

$$i = I_m \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (1.7)$$

unde:

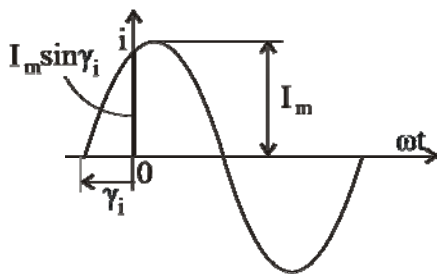


Fig 1.3

I_m – amplitudinea
 semnalului (valoarea de
 vârf)
 $(\omega t + \gamma_i)$ – faza semnalului
 ω – pulsația ($\omega = 2\pi f$; f –
 frecvența)
 γ_i – faza inițială (distanța
 de la originea „O”,
 arbitrar aleasă, până la cea
 mai apropiată trecere prin
 zero în sens crescător)

Valoarea efectivă a semnalului sinusoidal este de forma:

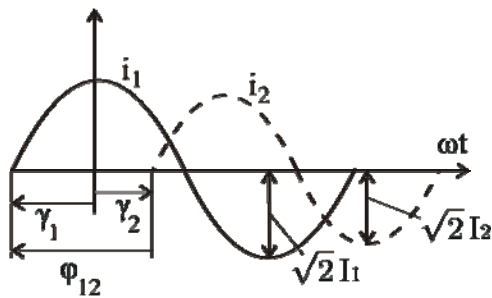
$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} [1 - \cos 2(\omega t + \gamma_i)] dt = \frac{I_m^2}{2} \quad (1.8)$$

respectiv $I = I_{\text{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ sau $I_m = \sqrt{2} I$

Ținând seama de legătura dintre amplitudine și valoarea efectivă, expresia unui semnal sinusoidal se poate scrie sub forma:

$$i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (1.9)$$

care este *forma normală* de scriere a unui semnal sinusoidal.



Defazajul dintre două mărimi sinusoidale este diferența dintre fazele lor inițiale. Considerăm doi curenți sinusoidali de forma:

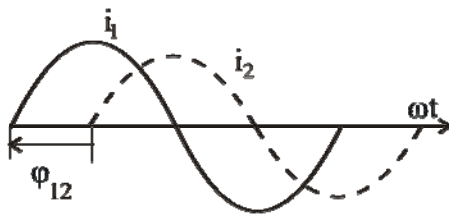
$$\begin{aligned} i_1 &= \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \gamma_1) \\ i_2 &= \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t + \gamma_2) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Fig 1.4

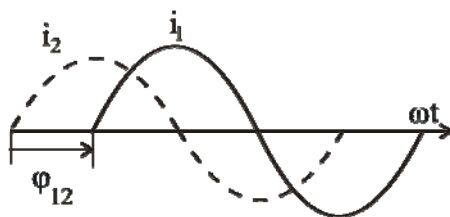
reprezențați „cartezian” în figura 1.4. Defazajul dintre i_1 și i_2 (de aceeași frecvență) este:

$$\varphi_{12} = (\omega t + \gamma_1) - (\omega t + \gamma_2) = \gamma_1 - \gamma_2 \quad (1.11)$$

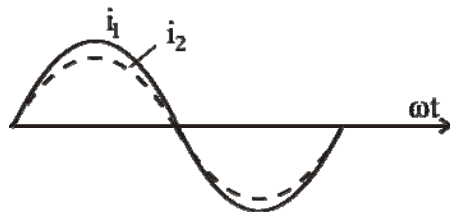
deci este egal cu diferența dintre fazele inițiale ale celor doi curenți. În diagrama carteziană defazajul φ_{12} are semnificația unei „distanțe minime” între două treceri prin zero în sens crescător a celor două semnale ($|\varphi_{12}| < \pi$). În funcție de valoarea lui φ_{12} se poate afirma despre semnalele i_1 și i_2 cum sunt poziționate pe axa timpului:



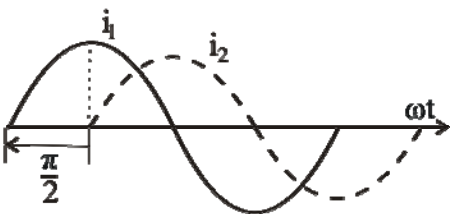
$\varphi_{12} > 0$, curențul i_1 este defazat *înaintea* lui i_2 cu φ_{12} (i_1 trece prin zero în sens crescător la un moment anterior față de i_2)



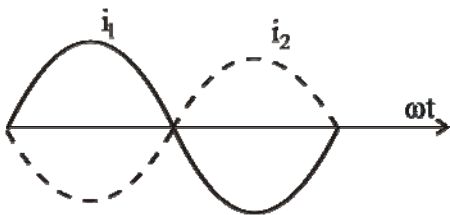
$\varphi_{12} < 0$, curentul i_1 este defazat în urma lui i_2 cu φ_{12}



$\varphi_{12} = 0$, deci i_1 este în fază cu i_2



$\varphi_{12} = \pm \frac{\pi}{2}$, curenții i_1 și i_2 sunt în cuadratură



$\varphi_{12} = \pm \pi$, curenții i_1 și i_2 sunt în opoziție de fază

1.2.2 Metode de reprezentare simbolică a mărimilor sinusoidale

Unei mărimi sinusoidale de forma (1.9) i se pot atașa diverse reprezentări (simboluri, imagini) care au scopul de a face perceperea acestor mărimi mai intuitivă sub formă de imagini, respectiv lucrând cu mărimi imagine asociate mărimilor sinusoidale, ecuațiile integro-diferențiale scrise între mărimile *original* se transformă în ecuații algebrice între mărimile *imagine*.

A. Reprezentări geometrice

O mărime sinusoidală de forma (1.9) este complet determinată dacă se cunoaște amplitudinea $I_m = \sqrt{2}I$ (sau valoarea efectivă I) și faza ($\omega t + \gamma_i$) (sau faza inițială γ_i). Analog, un vector liber în plan este caracterizat prin *modulul* său și prin *argumentul* (unghiul făcut cu o axă de referință), de aici ideea de a asocia cele două mărimi: originalul $i(t)$ și vectorul liber $\mathcal{V}(i)$.

Reprezentarea cinematică (prin vectori rotitori)

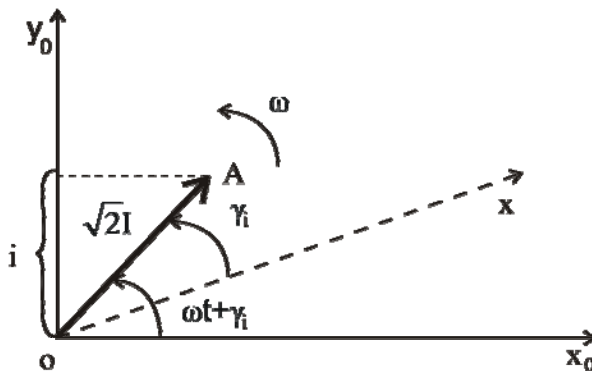


Fig 1.5

Curentului sinusoidal „ i ” îi asociem un vector rotitor \overline{OA} având modulul egal cu amplitudinea curentului ($OA = \sqrt{2}I$) și care face cu axa de referință Ox_0 (a unui sistem fix x_0y_0) un unghi egal cu faza ($\omega t + \gamma_i$). Axa Ox

numită *axa origine de fază* se rotește și ea odată cu vectorul \overline{OA} , cu viteza unghiulară ω . Deci asocierea biunivocă este de forma:

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i) \iff \overline{OA} = \mathcal{V}(i) \quad (1.12)$$

$$\begin{cases} OA = \sqrt{2}I \\ \angle A O x_0 = \omega t + \gamma_i \end{cases}$$

Revenirea de la mărimea imagine (vectorul \overline{OA}) la originalul $i(t)$ se realizează prin proiecția vectorului \overline{OA} la momentul „ t ” pe axa Oy_0 , ca în figura 1.5.

Vectorul $\overline{OA} = \mathcal{V}(i) = \sqrt{2}I / \omega t + \gamma_i$ de modul $\sqrt{2}I$ și de fază ($\omega t + \gamma_i$) scrisă cu notația Kennely, se rotește odată cu axa origine de fază Ox . Dacă se reprezintă pe aceeași digramă mai multe mărimi de aceeași frecvență, vectorii asociați fac cu axa Ox unghiuri egale cu fazele lor inițiale și se rotesc împreună cu același ω în sens trigonometric. Defazajul dintre două mărimi apare ca defazajul dintre vectorii rotitori asociați; dacă

$\varphi_{12} > 0$ defazajul are sens trigonometric. Cum $|\varphi_{12}| < \pi$, defazajul dintre cei doi curenți nu poate fi φ'_{12} ca în figura 1.6, deci este univoc determinat într-

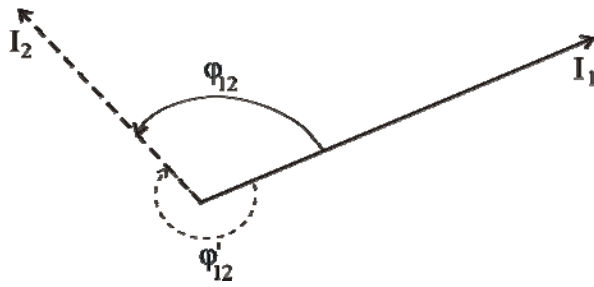


Fig 1.6

o reprezentare. Dacă reprezentăm mărimi de frecvențe diferite, vectorii asociați se rotesc cu viteze unghiulare diferite, unghiurile dintre vectori nu sunt constante (defazajele se definesc între mărimi de aceeași frecvență).

Reprezentarea fazorială (prin vectori ficși, vectori polari)

Aceasta este o reprezentare simplificată a celei precedente, modulul este egal cu valoarea efectivă I și argumentul față de axa Ox este egal cu

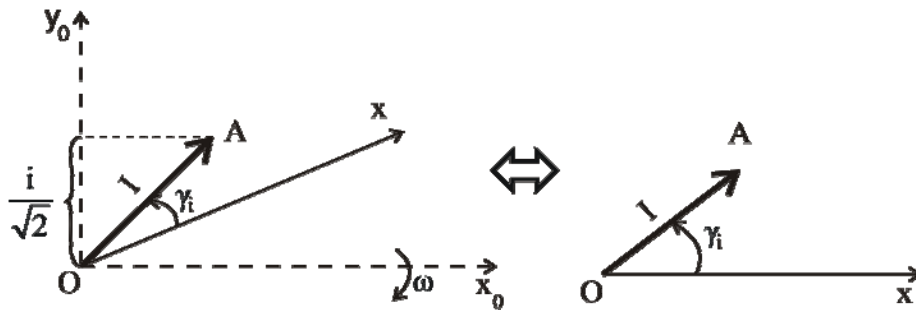


Fig 1.7

faza inițială γ_i . *Fazorii* (vectorii ficși) nu se mai rotesc în sens direct cu viteza unghiulară ω , ci se rotește sistemul de referință x_0Oy_0 în sens invers cu ω și acest sistem nu se mai reprezintă (dar mintal îl avem în considerare), obținându-se o epură statică relativă. Asocierea prin fazori este de tipul:

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i) \iff V(i) = I \underline{\gamma_i} \quad (1.13)$$

Dacă reprezentăm mai multe mărimi (de același ω) pe aceeași diagramă (*diagramă fazorială*) se poate renunța și la axa Ox , se poate alege una dintre mărimi drept *origine de fază* și se raportează fazele tuturor celorlalte mărimi față de ea.

B. Reprezentări analitice (prin mărimi complexe)

Unui număr complex \underline{z} îi corespunde un punct din planul complex (planul Gauss $10j$) numit *afixul* său, deci îi corespunde vectorul de poziție al acelui punct (figura 1.8).

În locul planului abstract din reprezentările geometrice, putem lua planul complex $10j$. Și un număr complex (la fel ca vectorul liber) are caracteristic tot un modul și o fază. De aici ideea de a asocia biunivoc un număr complex pentru o mărime sinusoidală.

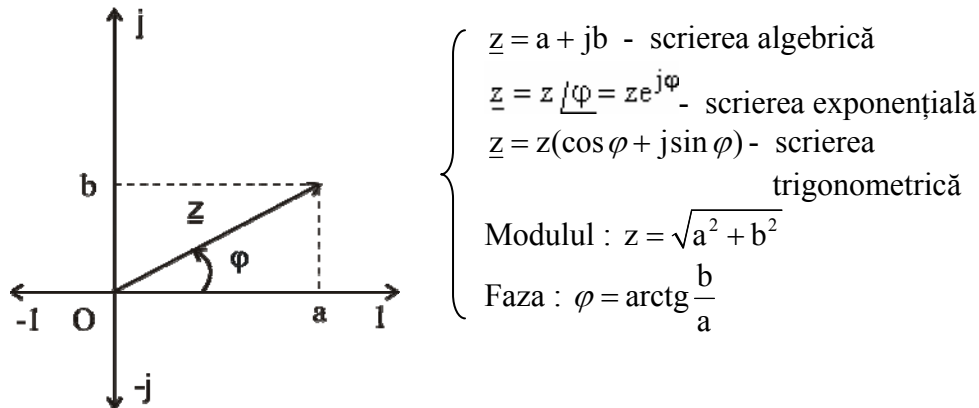


Fig 1.8

Reprezentarea în complex nesimplificată

Curentului sinusoidal $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i)$ îi atașăm o funcție complexă de timp al cărei modul este amplitudinea mărimii sinusoidale și a carei fază să fie faza curentului $(\omega t + \gamma_i)$, sub forma:

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i) \Longleftrightarrow i = \sqrt{2}I e^{j(\omega t + \gamma_i)} = \sqrt{2}I \angle \omega t + \gamma_i = \mathfrak{E}(i) \quad (1.14)$$

Reprezentarea în complex nesimplificată a curentului i este $\mathfrak{E}(i) = \underline{i}$ numită *valoare instantanee complexă*. Dar:

$$\underline{i} = \sqrt{2}I e^{j(\omega t + \gamma_i)} = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \gamma_i) + j\sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i) \quad (1.15)$$

respectiv partea imaginară a lui \underline{i} este chiar mărimea sinusoidală i , revenirea din „complex” în „timp” este deci de forma:

$$i(t) = \mathcal{I}\{\underline{i}\} = \mathcal{I}\{\sqrt{2}I \angle \omega t + \gamma_i\} \quad (1.16)$$

Reprezentarea în complex simplificată

Atunci când într-o problemă de circuit toate mărimile au aceeași frecvență, termenii " $\sqrt{2}$ " și " ωt " pot fi omiși în scriere fără a afecta calculul. Mărimea complexă asociată în acest caz este de forma:

$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i) \iff C(i) = \underline{I} = I e^{j\gamma_i} = I / \gamma_i \quad (1.17)$$

Această imagine în complex $C(i) = \underline{I}$, sub formă simplificată, se numește *valoarea efectivă complexă* a curentului sau *curentul complex* și are modulul egal cu valoarea efectivă I , iar faza egală cu faza inițială γ_i .

Imaginea în complex a tensiunii u este :

$$u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \gamma_u) \iff \underline{U} = U e^{j\gamma_u} = U / \gamma_u \quad (1.18)$$

În exprimare curentă mărimile \underline{I} , \underline{U} se numesc *curentul complex* (*tensiunea complexă*) în loc de *imagea în complex a curentului* (*tensiunii*).

Revenirea din „complex” în „timp” se realizează punând la loc factorii care au fost omiși din scriere ($\sqrt{2}$ și $e^{j\omega t}$) sub forma:

$$i(t) = \Im\{\sqrt{2}I e^{j\omega t} \underline{I}\} = \Im\{\sqrt{2}I e^{j(\omega t + \gamma_i)}\} \quad (1.19)$$

Reprezentarea în complex simplificată \underline{I} se asociază cu reprezentarea geometrică prin fazori, iar cea în complex nesimplificată \underline{i} , cu reprezentarea geometrică prin vectori rotitori.

Correspondența operațiilor

Am arătat în paragraful precedent cum i se pot asocia reprezentări geometrice și în complex unei mărimi sinusoidale, sub forma:

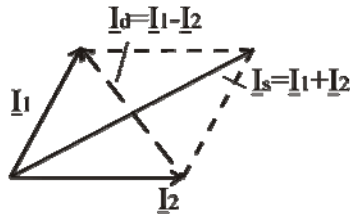
$$i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i) \iff V(i) \iff C(i) \quad (1.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{V}(i) = \sqrt{2}I / \omega t + \gamma_i & \text{-reprezentare cinematică} \\ V(i) = I / \gamma_i & \text{- reprezentare fazorială} \\ \mathcal{C}(i) = \underline{i} = \sqrt{2}I / \omega t + \gamma_i & \text{- reprezentare în complex nesimplificată} \\ C(i) = \underline{I} = I / \gamma_i & \text{- reprezentare în complex} \end{array} \right.$$

Vom arăta ce operații elementare cu mărimile imagine corespund operațiilor elementare cu mărimi sinusoidale:

• *adunarea și scăderea*

$$i_1 \pm i_2 \longleftrightarrow \underline{i}_1 \pm \underline{i}_2 \longleftrightarrow \underline{I}_1 \pm \underline{I}_2 \quad (1.21)$$



$$\begin{aligned} V(i_1 \pm i_2) &= V(i_1) \pm V(i_2) \\ C(i_1 \pm i_2) &= C(i_1) \pm C(i_2) \end{aligned} \quad (1.22)$$

Fig 1.9

Relațiile care dau valoare efectivă și faza inițială pentru suma (diferența) a două mărimi sinusoidale, coincid cu relațiile corespunzătoare de la adunarea (scăderea) a doi vectori cu regula paralelogramului (figura 1.9), respectiv cu regula de adunare (scădere) a două numere complexe.

• *derivarea*

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{di}{dt} &\longleftrightarrow \omega\sqrt{2}I \angle \omega t + \gamma_i + \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow \omega \underline{I} \angle \gamma_i + \frac{\pi}{2} \\ \frac{d\underline{i}}{dt} &\longleftrightarrow \frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega \underline{i} \longleftrightarrow j\omega \underline{I} \end{aligned} \right. \quad (1.23)$$

Această corespondență are la bază operațiile:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{di}{dt} &= \omega\sqrt{2}I \cos(\omega t + \gamma_i) = \omega\sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i + \frac{\pi}{2}) \\ \frac{d\underline{i}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{2}I e^{j(\omega t + \gamma_i)} \right\} = j\omega \underline{i} \end{aligned} \right. \quad (1.24)$$

Deoarece imaginea \underline{I} nu este funcție de timp, operația de derivare a sa în raport cu timpul n-ar avea sens, însă \underline{I} s-a obținut din \underline{i} omițând în scriere factorul $\sqrt{2}e^{j\omega t}$, deci și $\frac{d\underline{I}}{dt} = j\omega \underline{I}$, după aceeași regulă ca și derivarea lui \underline{i} .

Prin derivare crește modulul de ω ori, iar faza crește cu $\frac{\pi}{2}$; respectiv în complex operația de derivare se convertește în operație de înmulțire cu

$j\omega$ ($j = 1 \angle \frac{\pi}{2}$, deci a înmulți cu j înseamnă a roti în sens trigonometric cu $\frac{\pi}{2}$) ceea ce înseamnă mărire de ω ori și rotire cu $\frac{\pi}{2}$.

• *integrarea*

$$\left\{ \begin{array}{l} \int i \, dt \longleftrightarrow \sqrt{2} \frac{I}{\omega} \angle \omega t + \gamma_i - \frac{\pi}{2} \longleftrightarrow \frac{I}{\omega} \angle \gamma_i - \frac{\pi}{2} \\ \int \underline{i} \, dt \longleftrightarrow \int \underline{i} \, dt = \frac{\underline{i}}{j\omega} = \frac{\underline{I}}{j\omega} \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Prin integrare scade modulul mărimii sinusoidale (modulul fazorului, modulul mărimii complexe) de ω ori, iar fazele lor se micșorează cu $\frac{\pi}{2}$, iar în complex se împarte cu $j\omega$.

În reprezentare *carteziană* și *fazorială* operațiile de derivare și integrare sunt arătate în figurile 1.10 și 1.11.

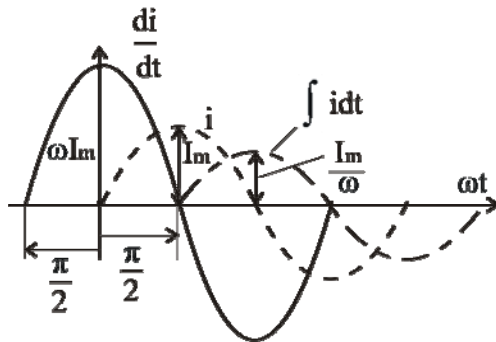


Fig 1.10

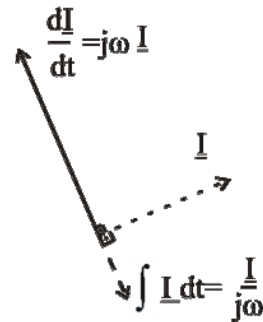


Fig 1.11

Plecând de la aceste corespondențe dintre operații, ecuațiile circuitelor în care apar semnale sinusoidale vor avea corespondent ecuații algebrice între imaginile în complex ale acestora:

$$\begin{array}{l} u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \underline{u} = R \underline{i} + L j \omega \underline{i} + \frac{1}{C} \frac{\underline{i}}{j\omega} = \underline{i} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \underline{U} = R \underline{I} + L j \omega \underline{I} + \frac{1}{C} \frac{\underline{I}}{j\omega} = \underline{I} \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \end{array} \quad (1.26)$$

Folosind reprezentările în complex (\underline{i} , \underline{I}), ecuațiile integro-diferențiale ale circuitelor se transformă în ecuații algebrice cu coeficienți complecși între imagini.

O ecuație diferențială de forma:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k i}{dt^k} = u \quad (1.27)$$

în care $u = \sqrt{2}U \sin(\omega t + \gamma_u)$, are ca soluție particulară tot o funcție sinusoidală de aceeași frecvență ω ca și u , de forma $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i)$. Scrisă în valori complexe, ecuația diferențială (1.27) se transformă în ecuația algebrică între imagini:

$$\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k \underline{I} = \underline{U} / \underline{\gamma}_u \rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\sum_{k=0}^n a_k (j\omega)^k} = \underline{U} / \underline{\gamma}_i \rightarrow i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma_i)$$

1.2.3 Aplicații

1. Un curent sinusoidal de frecvență $f=50\text{Hz}$ și amplitudinea $I_m=10\text{A}$ este reprezentat în figura 1.12. Să se scrie expresiile sale instantanee dacă originea timpului se consideră în punctele O_1 , O_2 , O_3 și O_4 .

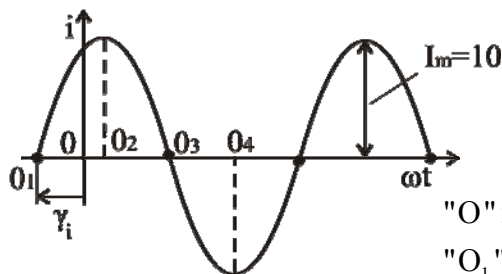


Fig 1.12

$$f = 50\text{Hz} \rightarrow \omega = 2\pi f = 314 \text{ rad/sec}$$

$$I = I_{\text{ef}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 7,1\text{A}$$

$$\text{"O": } i = 10 \sin(\omega t + \gamma_i)$$

$$\text{"O}_1 \text{" : } i_2 = 10 \sin 314t$$

$$\text{"O}_2 \text{" : } i_2 = 10 \sin(314t + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{"O}_3 \text{" : } i_3 = 10 \sin(314t \pm \pi) = -10 \sin 314t$$

$$\text{"O}_4 \text{" : } i_4 = 10 \sin(314t - \frac{\pi}{2})$$

2. Două tensiuni de frecvență $f=400$ Hz au expresiile:

$$\begin{cases} u_1 = 30 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3}) \\ u_2 = \sqrt{2}10 \cos(\omega t + \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

scrise în raport cu originea „0”. Să se rescrie expresiile celor două tensiuni față de originea O' situată înaintea originii „0” cu $\Delta t = \frac{1}{2400}$ sec și să se reprezinte *cartezian* și *fazorial*.

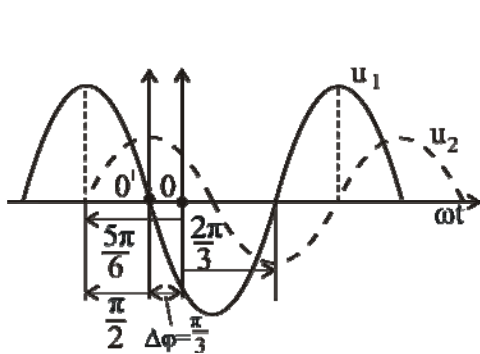


Fig 1.13

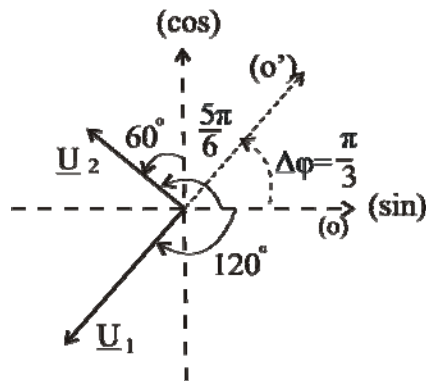


Fig 1.14

Tensiunea u_2 o rescriem sub forma normală:

$$u_2 = \sqrt{2}10 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}10 \sin(\omega t + \frac{5\pi}{6})$$

Mutarea originii din O în O' înseamnă:

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = 2\pi \cdot \frac{400}{2400} = \frac{\pi}{3}$$

Față de noua origine, expresiile sunt:

$$\begin{cases} u'_1 = 30 \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}) = 30 \sin(\omega t - \pi) \\ u'_2 = \sqrt{2}10 \cos(\omega t + \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{2}10 \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Mutarea originii timpului din O în O' în diagrama carteziană (figura 1.13) corespunde în diagrama fazorială la mutarea axei origine de fază „ O ” cu $\Delta\varphi = \frac{\pi}{3}$ înainte (adică în sens trigonometric) până la axa O' (figura 1.14).

Față de noua axă O' , tensiunea \underline{U}_1 este în opoziție de fază, iar \underline{U}_2 este cuadratură (înainte cu $\frac{\pi}{2}$), deci în complex vor fi de forma:

$$\underline{U}_1' = \frac{30}{\sqrt{2}} \angle \pi = \frac{-30}{\sqrt{2}} \quad \text{și} \quad \underline{U}_2' = 10 \angle \frac{\pi}{2} = j 10$$

3. Curentul i este ramificat în i_1 și i_2 printr-un divizor de curent (figura 1.15).

Cunoscând: $i_1 = 12 \sin(\omega t + \frac{\pi}{6})$ și $i_2 = 6 \sin(\omega t - \frac{\pi}{3})$ se cere $i(t)$.

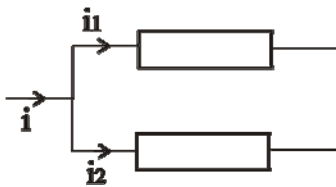


Fig 1.15

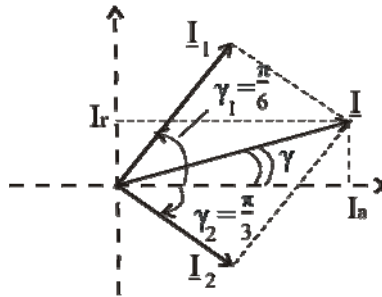


Fig 1.16

În diagrama fazorială (figura 1.16) cei doi curenți \underline{I}_1 și \underline{I}_2 se compun cu regula paralelogramului în curentul sumă \underline{I} ce are componentele I_a și I_r , iar faza sa inițială este γ .

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos \varphi_{12}} = \sqrt{12^2 + 6^2 + 2 \cdot 12 \cdot 6 \cos \frac{\pi}{2}} = 13,41 \text{ A}$$

$$\text{tg} \gamma = \frac{I_r}{I_a} = \frac{I_1 \sin \gamma_1 - I_2 \sin \gamma_2}{I_1 \cos \gamma_1 + I_2 \cos \gamma_2} \rightarrow \gamma = 3^\circ 20'$$

Sau: $\underline{I}_1 = 12 \angle \frac{\pi}{6} = 12 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)$ și $\underline{I}_2 = 6 \angle -\frac{\pi}{3} = 6 \left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (6\sqrt{3} + 3) + j(6 - 3\sqrt{3}) = \underbrace{13,4}_{I_a} + j\underbrace{0,8}_{I_r} = 13,41 \angle 3^\circ 20'$$

4. Într-un circuit serie se cunosc tensiunile parțiale ca valoare și ca diagramă fazorială. Se cere tensiunea la bornele întregului circuit.

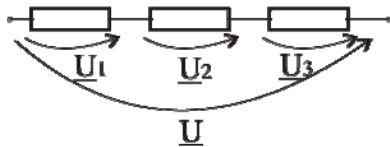


Fig 1.17

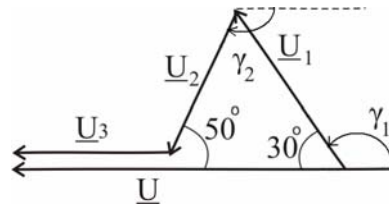


Fig 1.18

Pe baza reprezentării fazoriale (figura 1.18) scriem expresiile celor trei tensiuni:

$$\underline{U}_1 = 100 \angle 150^\circ = -86,5 + j50$$

$$\underline{U}_2 = 80 \angle -130^\circ = -61,5 - j50$$

$$\underline{U}_3 = 120 \angle 180^\circ = -120$$

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = -268 = 268 \angle \pi$$

5. Dacă $\underline{I}_1 = (3 + j4)A$ și $\underline{I}_2 = 10 \angle -\frac{\pi}{4}$, să se scrie valorile instantanee ale celor doi curenți și să se reprezinte într-o diagramă fazorială.

$$\underline{I}_1 = 3 + j4 = 5 \angle 57^\circ \rightarrow i_1 = \sqrt{2}5 \sin(\omega t + 57^\circ)$$

$$\underline{I}_2 = 10 \angle -\frac{\pi}{4} \rightarrow i_2 = \sqrt{2}10 \sin(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Diagrama lor fazorială este în figura 1.18'.

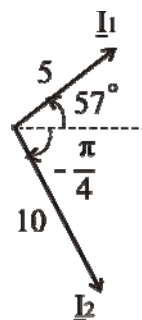


Fig 1.18'

1.3 Semnale periodice nesinusoidale

1.3.1 Descompunerea spectrală

Un semnal $i(t)$ este periodic în timp dacă $i(t) = i(t + nT)$; în care T este perioada semnalului (egală cu perioada unei sale fundamentale):

$$T = \frac{1}{f_1} = \frac{2\pi}{\omega_1}, \quad \text{iar} \quad f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{T} \quad \text{este frecvența fundamentalei}$$

Dacă funcția $i(t)$ satisface condițiile Dirichlet, respectiv este un semnal neted pe porțiuni (mărginit, număr finit de discontinuități, număr finit de subintervale de monotonie), ea se poate dezvolta într-o serie trigonometrică (serie Fourier) sub forma:

$$i(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t) \quad (1.28)$$

Coeficienții seriei Fourier se pot determina prin relațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{A_0}{2} = I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt > 0 \text{ sau } < 0 \quad - \text{este valoarea medie pe o perioadă a} \\ \hspace{15em} \text{semnalului } i(t) \\ A_k = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \cos k\omega t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(t) \cos k\omega t \, d\omega t \quad - \text{este amplitudinea seriei în} \\ \hspace{15em} \text{cosinus} \\ B_k = \frac{2}{T} \int_0^T i(t) \sin k\omega t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} i(t) \sin k\omega t \, d\omega t \quad - \text{este amplitudinea seriei} \\ \hspace{15em} \text{în sinus} \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Reunind în aceeași expresie termenii în sinus și cosinus de același ordin, seria Fourier (1.28) se poate scrie sub forma:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (1.30)$$

$$\text{unde: } I_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_k^2 + B_k^2} \quad ; \quad \gamma_k = \arctg \frac{A_k}{B_k} \quad (1.31)$$

aceasta, având în vedere că dacă: $i_1 = A \cos \omega t$ și $i_2 = B \sin \omega t$, atunci mărimea $i = i_1 + i_2$ este de forma $i = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma)$ unde: $\sqrt{2}I = \sqrt{A^2 + B^2}$ și $\tg \gamma = \frac{A}{B}$, compunerea se realizează ca în figura 1.19.

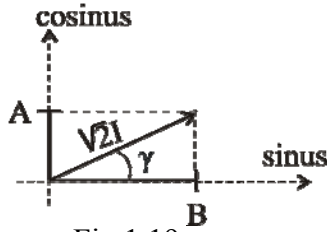


Fig 1.19

În expresia (1.30) „ I_0 ” este *componenta continuă* a semnalului $i(t)$, „ I_k ” este *valoarea efectivă a armonicii de ordinul k*, iar „ γ_k ” este *faza inițială a armonicii de ordinul k*, măsurată față de aceeași origine de fază (de timp) ca și semnalul periodic nesinusoidal $i(t)$.

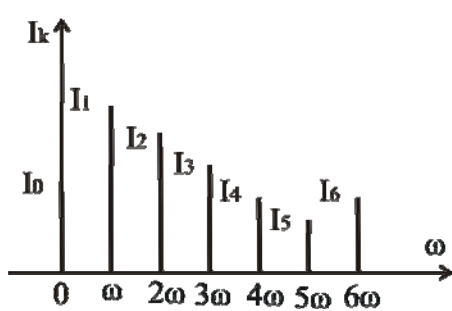


Fig 1.20

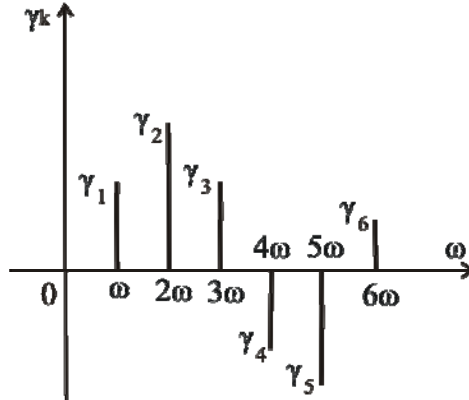


Fig 1.21

Coeficienții A_k și B_k n-au nici o semnificație fizică pentru armonica de ordinul k a unui semnal, sunt simple mărimi de calcul.

Prin descompunerea unui semnal periodic în serie Fourier sub forma (1.30) numită *analiză armonică*, se poate reprezenta într-o diagramă $I_k = f_1(k\omega)$ sub forma unui spectru discret (figura 1.20), numit *spectrul de frecvență al amplitudinilor* și o altă diagramă discretă $\gamma_k = f_2(k\omega)$, numit *spectrul de frecvență al fazelor* (figura 1.21).

Reprezentare unui semnal periodic în domeniul frecvență (toate reprezentările care au pe abscisă frecvența ω , se numesc *caracteristici de frecvență* ale amplitudinilor, ale fazelor etc.). Cele două spectre (de

amplitudini și de faze, din figura 1.20 și figura 1.21) permit să apreciem ponderea energetică a fiecărei armonici componente a unui semnal $i(t)$ dat. Spectrul fazelor $\gamma_k = f(k\omega)$ nu are o interpretare fizică, dar este util în compunerea armonicilor componente. Spectrul amplitudinilor arată cât din energia unui semnal se pierde prin limitarea seriei Fourier la primii săi termeni, valorile efective I_k arată ponderea energetică a armonicii de ordinul k .

1.3.2 Funcții periodice particulare

- *semnale simetrice*: Acestea îndeplinesc condiția $i(t) = i(-t)$ și din seria Fourier vor lipsi termenii în sinus (care sunt impari). Deci:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \cos k\omega t \quad (1.32)$$

- *semnale antisimetrice*: Acestea îndeplinesc condiția $i(t) = -i(-t)$ iar seria Fourier va conține numai termeni în sinus:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin k\omega t \quad (1.33)$$

- *semnale impare*: Acestea îndeplinesc condiția $i(t) = -i\left(t + \frac{T}{2}\right)$, nu va conține armonici pare, deci seria Fourier va fi de forma:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{2} I_{2k+1} \sin[(2k+1)\omega t + \gamma_{2k+1}] \quad (1.34)$$

astfel de semnale se obțin în majoritatea instalațiilor electrice de curenți tari, la bornele generatoarelor de semnale (forma alternanței „-“ este identică cu cea a alternanței „+“).

- *semnale pare*: Ele îndeplinesc condiția $i(t) = i\left(t + \frac{T}{2}\right)$ deci seria va avea în componență numai armonici pare:

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_{2k} \sin(2k\omega t + \gamma_{2k}) \quad (1.35)$$

1.3.3 Mărimi caracteristice semnalelor periodice nesinusoidale

- *Valoarea medie a produsului a două semnale nesinusoidale:*

Considerăm două semnale periodice nesinusoidale (deformate) $i_1(t)$ și $i_2(t)$ și admitem că s-a realizat analiza armonică. Deși seria Fourier este o serie infinită, practic se iau în considerare un număr finit de armonici, această trunchiere a seriei, evident depinde de forma semnalului $i(t)$. Admitem că s-au luat în considerare primele n armonici ale celor două semnale:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= I_{10} + \sum_{k=1}^n \sqrt{2} I_{1k} \sin(k\omega t + \gamma_k) = I_{10} + \sum_{k=1}^n i_{1k} \\ i_2(t) &= I_{20} + \sum_{j=1}^n \sqrt{2} I_{2j} \sin(j\omega t + \gamma_j) = I_{20} + \sum_{j=1}^n i_{2j} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Valoarea medie a produsului celor două semnale pe o perioadă se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \widetilde{i_1 i_2} &= \frac{1}{T} \int_0^T i_1(t) \cdot i_2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T [I_{10} + \sum_j i_{1k}] \cdot [I_{20} + \sum_j i_{2j}] dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T I_{10} I_{20} dt + \sum_k \sum_j \int_0^T 2 I_{1k} I_{2j} \cdot \frac{1}{2} \{ \cos[(k+j)\omega t + (\gamma_k + \gamma_j)] + \\ &\quad \cos[(k-j)\omega t + (\gamma_k - \gamma_j)] \} dt = I_{10} I_{20} + \sum_{k=1}^n I_{1k} I_{2k} \cos(\gamma_{1k} - \gamma_{2k}) \end{aligned} \quad (1.39)$$

aceasta deoarece, media unui cosinus pe o perioadă fiind nulă, se pot obține valori nenule numai dacă $k=j$, respectiv:

$$\widetilde{i_1 i_2} = \frac{1}{T} \int_0^T i_{1k} i_{2j} dt = \begin{cases} = I_{1k} I_{2k} \cos(\gamma_{1k} - \gamma_{2k}) & \text{daca } j = k \end{cases} \quad (1.40)$$

unde I_{1k} și I_{2k} sunt valorile efective ale armonicelor de același ordin k din componența celor două semnale.

Dacă două semnale coincid: $i_1(t)=i_2(t)=i(t)$, obținem din (1.39) expresia *valorii efective* a unui semnal nesinusoidal, sub forma:

$$I^2 = I_{ef}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \sum_{k=0}^n I_k^2 \quad \text{sau} \quad I = \sqrt{\sum_{k=0}^n I_k^2} \quad (1.41)$$

Valoarea efectivă a unei mărimi periodice este egală cu rădăcina pătratică a sumei pătratelor valorilor efective a armonicilor sale componente.

Dacă : $i = 10 + 8 \sin \omega t + 2 \sin 3\omega t$, atunci valoarea sa efectivă este :

$$I = \sqrt{10^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{134} = 11,6 \text{ A}$$

Acest curent $i(t)$ trecut printr-un ampermetru, acesta va indica valoarea sa efectivă, adică 11,6 A.

1.3.4 Analiza armonică a semnalelor experimentale

Dacă se cunoaște expresia semnalului $i(t)$, se pot calcula coeficienții Fourier ai seriei (1.30) iar dacă semnalul se cunoaște prin graficul său (pe ecranul osciloscopului, printat de calculator etc.) atunci determinarea coeficienților Fourier se poate face aproximativ. Există mulți algoritmi în acest sens, vom prezenta unul dintre aceștia.

Metoda ordonatelor echidistante (Thompson-Runge)

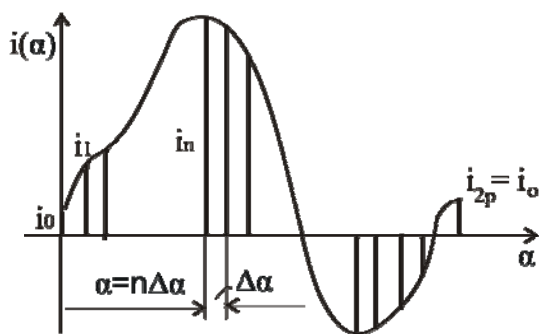


Fig 1.22

Metoda constă în aproximarea integralelor (1.29) prin sume finite.

Dacă notăm $\omega t = \alpha$, perioada T a semnalului $i(t)$ devine 2π pentru semnalul $i(\alpha)$.

Se împarte perioada 2π a funcției $i(\alpha)$ în $2p$ părți egale (figura 1.22) și se măsoară ordonatele echidistante i_0, i_1, \dots, i_{2p} în punctele de discretizare. Mărimile care apar în expresiile (1.29) se modifică astfel:

$$d\omega t \rightarrow \Delta\alpha = \frac{2\pi}{2p} = \frac{\pi}{p}$$

$$\begin{aligned}
 \omega t &\rightarrow \alpha = n\Delta\alpha = n\frac{\pi}{p} \\
 i(t) &\rightarrow i(\alpha) = i_n, \quad n = \overline{1, 2p} \\
 \cos k\omega t &\rightarrow \cos k\frac{n\pi}{p} \\
 \int \dots d\omega t &\rightarrow \sum \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.42}$$

Coefficienții Fourier dați de relațiile 1.29 se vor determina prin sumele finite:

$$\begin{cases}
 \frac{A_0}{2} = I_0 \cong \frac{1}{2p} \sum_{n=1}^{2p} i_n \\
 A_k \cong \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{2p} i_n \cos\left(k\frac{n\pi}{p}\right) \cdot \frac{\pi}{p} = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{2p} i_n \cos\left(k\frac{n\pi}{p}\right) \\
 B_k \cong \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{2p} i_n \sin\left(k\frac{n\pi}{p}\right) \cdot \frac{\pi}{p} = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{2p} i_n \sin\left(k\frac{n\pi}{p}\right)
 \end{cases}
 \tag{1.43}$$

Această metodă implică o eroare sistematică deoarece permite determinarea unui număr finit de armonici (până la armonica de ordinul p). Eroarea, evident, este cu atât mai mică cu cât discretizarea semnalului se face cu un pas $\Delta\alpha$ mai mic, respectiv $2p$ este mare. Pe baza relațiilor (1.43) se pot scrie programe pentru analiza armonică a unui semnal, datele de intrare sunt ordonatele echidistante i_0, i_1, \dots, i_{2p} . Obținerea seriei Fourier a unui semnal dat analitic $i(t)$ sau grafic $i(\alpha)$ presupune următoarele etape (fig 1.23)

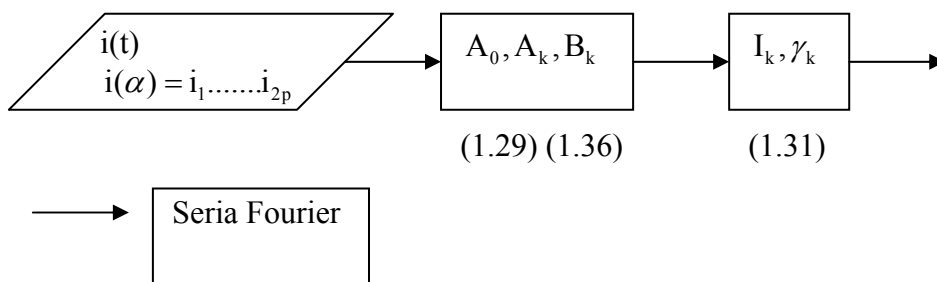


Fig 1.23

Concluzii

- Un semnal periodic oarecare poate fi echivalat, în mod unic, printr-o sumă de semnale periodice sinusoidale, armonice între ele (raportul perioadelor, respectiv raportul frecvențelor este un număr întreg), având amplitudinile și fazele bine determinate. Răspunsul unui circuit la astfel de semnale se poate deci reduce la a studia răspunsul circuitului în regim sinusoidal de diferite frecvențe.
- Structura spectrală a unui semnal (ce armonici conține) depinde de forma semnalului $i(t)$. Seria Fourier, obținută ca rezultat al analizei armonice a unui semnal dat, permite reprezentarea caracteristicilor:
 - amplitudine – frecvență: $I_k = f_1(k\omega)$
 - fază – frecvență: $\gamma_k = f_2(k\omega)$

ambele fiind spectre de frecvență (spectre discrete).

- Dacă se cunoaște expresia analitică a semnalului, prin funcția $i(t)$, atunci determinarea coeficienților Fourier se poate face analitic cu (1.29) iar dacă $i(t)$ se cunoaște grafic, determinarea coeficienților Fourier se poate face aproximativ, prin metode numerice (1.36), discretizând semnalul.

Aplicație

1. Să se determine armonicile componente pentru un semnal dublu redresat (figura 1.24).

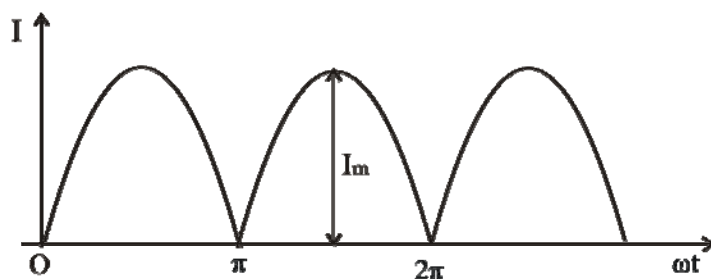


Fig 1.24

Coeficienții Fourier sunt :

$$\frac{A_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin \omega t d\omega t + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -I_m \sin \omega t d\omega t = \frac{2I_m}{\pi}$$

Fiind un semnal simetric față de ordonată, va conține doar armonici în cosinus ($B_k=0$).

În același timp $i(t)=i(t+T/2)$, deci va conține doar armonici pare ($A_{2n+1}=0$). Rămâne atunci termenul:

$$A_{2n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I_m \sin \omega t \cos k \omega t \, d\omega t + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} -I_m \sin \omega t \cos k \omega t \, d\omega t =$$

$$\frac{I_m}{2\pi} \left[\frac{\cos(k-1)\omega t}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\omega t}{k+1} \right]_0^{\pi} - \frac{I_m}{2\pi} \left[\frac{\cos(k-1)\omega t}{k-1} - \frac{\cos(k+1)\omega t}{k+1} \right]_{\pi}^{2\pi} =$$

$$\frac{I_m}{2\pi} \left(\frac{-2}{k-1} + \frac{2}{k+1} \right) - \frac{I_m}{2\pi} \left(\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k+1} \right) \Big|_{k=2n} = \frac{2I_m}{\pi} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)}$$

Unda dublu redresată va conține o fundamentală de pulsație (2ω) și armonicile sale pare:

$$i(t) = \frac{2I_m}{\pi} \left[1 - \frac{2}{1 \cdot 3} \cos 2\omega t - \frac{2}{3 \cdot 5} \cos 4\omega t - \frac{2}{5 \cdot 7} \cos 6\omega t - \dots \right]$$

2. Să se descompună în armonici un semnal trapezoidal (figura 1.25), pe baza metodei Thompson - Runge.

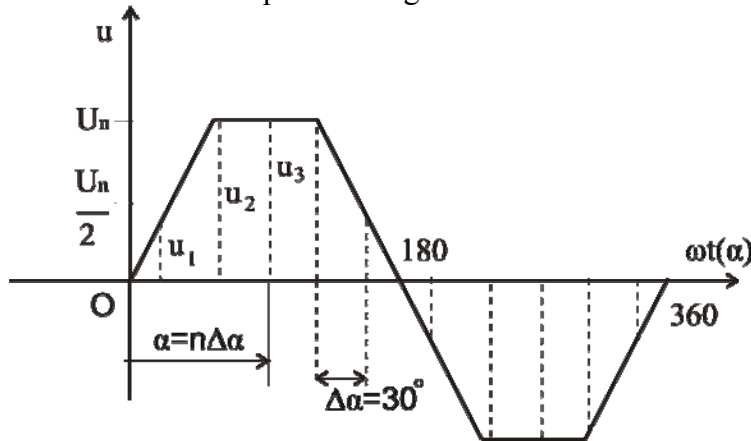


Fig 1.25

Împărțim perioada 2π a semnalului în $2p$ părți egale ($p=6$), respectiv $\Delta\alpha = \frac{\pi}{p} = 30^\circ$ și citim ordonatele echidistante u_1, u_2, \dots, u_{12} .

Având în vedere simetria impară a semnalului $u(t) = -u(t+T/2)$, seria Fourier echivalentă va conține doar armonici impare în sinus:

$$B_k = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{2p} u_n \sin k \frac{n\pi}{p} \rightarrow B_{2k+1} = \frac{1}{p} \sum_{n=1}^{2p} u_n \sin(2k+1) \frac{n\pi}{p}$$

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{4}{p} \sum_{n=1}^3 u_n \sin \frac{n\pi}{p} = \frac{4}{6} (u_1 \sin 30^\circ + u_2 \sin 60^\circ + u_3 \sin 90^\circ) = \\ &= \frac{4U_m}{6} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = \frac{4U_m}{6} \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4} \right) = 2,11 \frac{4U_m}{6} \end{aligned}$$

$$B_3 = \frac{4}{6} \sum_{n=1}^3 u_n \sin 3 \frac{n\pi}{p} = \frac{4}{6} (u_1 \sin 90^\circ + u_2 \sin 180^\circ + u_3 \sin 270^\circ) = -\frac{2U_m}{6}$$

$$B_5 = \frac{4}{6} \sum_{n=1}^3 u_n \sin 5 \frac{n\pi}{p} = \frac{4}{6} (u_1 \sin 150^\circ + u_2 \sin 300^\circ + u_3 \sin 90^\circ) = \frac{U_m}{2}$$

Seria Fourier echivalentă va conține termenii (trebuie ca ordinul armonicii maxime $k < p$):

$$u(t) = \frac{U_m}{6} (8,44 \sin \omega t - 2 \sin 3\omega t + 3 \sin 5\omega t)$$