

5. Rezonanță electrică

5.1 Fenomenul de rezonanță electrică

Considerăm un dipol liniar și pasiv (figura 5.1) care conține elemente rezistive, inductive și capacitive într-o anumită conexiune și este alimentat în regim sinusoidal cu tensiunea \underline{U} .

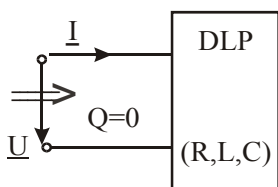


Fig. 5.1

Acest circuit funcționează la *rezonanță* (electrică) atunci când puterea reactivă (Q) absorbită pe la bornele de alimentare este nulă și deși conține elemente L și C , întregul dipol se comportă în raport cu bornele de intrare ca un circuit pur rezistiv. Frecvențele pentru care $Q=0$ se numesc *frecvențe de rezonanță*.

În funcție de parametrii dipolului puterea reactivă se poate scrie astfel:

$$Q = 0 \begin{cases} Q = XI^2 \xrightarrow{\text{Circuit serie, } I \neq 0} X = 0 & (5.1) \\ Q = -BU^2 \xrightarrow{\text{Circuit paralel, } U \neq 0} B = 0 & (5.2) \end{cases}$$

Dacă pentru un circuit cu o structură complexă este îndeplinită condiția (5.1) $X=0$, în circuit va apărea o *rezonanță de tensiuni* (rezonanță *tip serie*), iar dacă este îndeplinită condiția (5.2) $B=0$, în circuit va apărea o *rezonanță de curenți* (rezonanță *tip paralel*).

Aducerea unui circuit liniar la rezonanță se poate face fie prin variația frecvenței la sursa de alimentare a circuitului, fie a parametrilor de circuit. Alături de *frecvențe de rezonanță* un circuit poate avea și *parametri de rezonanță*.

Fenomenul de rezonanță stă la baza funcționării multor echipamente din tehnica comunicațiilor, din automatică etc. În tehnica curenților tari, dacă fenomenul de rezonanță apare în mod neprevăzut, prin apariția unor tensiuni și curenți foarte mari care însoțesc fenomenul de rezonanță, poate duce la distrugerea unor componente ale instalației.

5.2 Rezonanță de tensiuni (de tip serie)

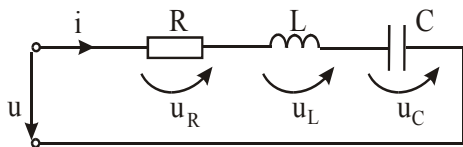


Fig. 5.2

Cel mai simplu circuit în care poate apărea rezonanța de tensiuni este circuitul R, L, C -serie ca în figura 5.2, de unde și numele de rezonanță *de tip serie*.

Presupunem circuitul alimentat cu o tensiune sinusoidală de pulsație ω . Impedanța complexă a circuitului are expresia:

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \angle \varphi \quad (5.3)$$

Valoarea efectivă a curentului I și defazajul său față de tensiunea \underline{U} sunt:

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (5.4)$$

Condiția de rezonanță a circuitului : ($Q=0 \Rightarrow X=0$) devine pentru acest circuit de forma:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C} \rightarrow \omega^2 LC = 1 \quad (5.5)$$

relația (5.5) este *condiția de rezonanță* pentru circuitul serie. Circuitul poate fi adus la rezonanță modificând oricare dintre parametrii (ω , L , C). Poate fi reglată frecvența sursei de alimentare, poate fi reglată inductivitatea bobinei sau capacitatea condensatorului. Pulsația și frecvența de rezonanță care îndeplinesc condiția (5.5) sunt:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (5.6)$$

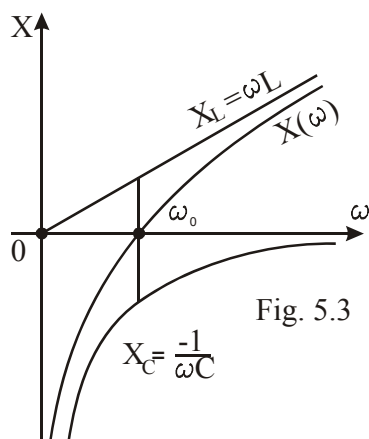


Fig. 5.3

În figura 5.3 este reprezentată caracteristica de frecvență a reactanței

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \text{ La rezonanță } \omega = \omega_0$$

reactanța $X=0$. Pentru $\omega < \omega_0 \rightarrow X < 0$ deci circuitul se comportă capacitiv, pentru $\omega > \omega_0 \rightarrow X > 0$, deci circuitul se comportă inductiv iar pentru $\omega = \omega_0 \rightarrow X = 0$, deci circuitul se comportă pur rezistiv. Deci la trecerea prin punctul de rezonanță un circuit își schimbă caracterul capacitiv \rightarrow inductiv sau invers.

Chiar la rezonanță $\omega = \omega_0$ și $X = 0$ impedanța circuitului este minimă:

$$Z_0 = Z_{\min} = R$$

Dacă tensiunea de alimentare are valoarea constantă $U=ct$ la variația frecvenței sale, atunci intensitatea curentului va avea la rezonanță o valoare maximă:

$$I_{rez} = I_0 = \frac{U}{Z_{min}} = \frac{U}{R} = I_{max} \quad (5.7)$$

Dacă rezistența circuitului (R) este mică, atunci acest maxim poate fi pronunțat. Acest curent mare (I_0) trecând prin bobină și prin condensator va produce la bornele acestora căderi de tensiune U_{L0} și U_{C0} a căror valori pot depăși cu mult valoarea tensiunii de alimentare (U), devenind astfel periculoase pentru izolația bobinei și condensatorului, de unde și denumirea de *rezonanță de tensiuni*.

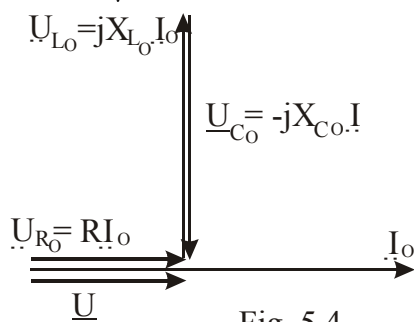


Fig. 5.4

Tensiunile la bornele bobinei U_{L0} și a condensatorului U_{C0} au valori egale și sunt în opoziție de fază (figura 5.4).

$$\underline{U}_{L0} + \underline{U}_{C0} = j(X_{L0} - X_{C0})I_0 = 0 \quad (5.8)$$

Toată tensiunea de alimentare se regăsește la bornele rezistenței ($\underline{U} = \underline{U}_{R0}$) ca în figura 5.4. La rezonanță reactanța

inductivă $X_{L0} = \omega_0 L$ și cea capacitivă $X_{C0} = \frac{1}{\omega_0 C}$ sunt egale în modul, această valoare comună numindu-se *impedanța caracteristică* Z_c a circuitului :

$$Z_c = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.9)$$

tensiunile pe bobină și condensator au valorile: $U_{L0} = U_{C0} = Z_c I_0$

Raportul:

$$q = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U} = \frac{Z_c}{R} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (5.10)$$

se numește *factorul de calitate* al circuitului. Supratensiunile pe bobină și condensator sunt mari la rezonanță dacă $q \gg 1$, respectiv $R \ll Z_c$. Rezistența R joacă rolul unui element de amortizare în orice circuit iar la rezonanță ea împiedică apariția supratensiunilor. Dacă $R \ll Z_c$ ea nu va putea amortiza și rezonanța se manifestă deplin.

Mărimile inversă factorului de calitate: $d = \frac{1}{q} = \frac{R}{Z_c} = \frac{U}{U_{L0}}$ poartă numele de

factor de amortizare al circuitului și pune în evidență rolul rezistenței R în amortizarea oscilațiilor circuitului.

La rezonanță, deci, curentul în circuit are valoarea maximă (I_0), este în fază cu tensiunea de alimentare ($\varphi = 0$), circuitul nu absoarbe putere reactivă ($Q_{\text{borne}} = 0$) iar puterea activă absorbită are valoarea maximă:

$$P = UI \cos \varphi = U I_0 \cos \varphi_0 = U I_0 = R I_0^2 = P_{\text{max}} \quad (5.11)$$

Energia înmagazinată în câmpul electric al condensatorului și în câmpul magnetic al bobinei oscilează între cele două elemente de circuit fără a afecta schimbul de energie pe la bornele întregului circuit.

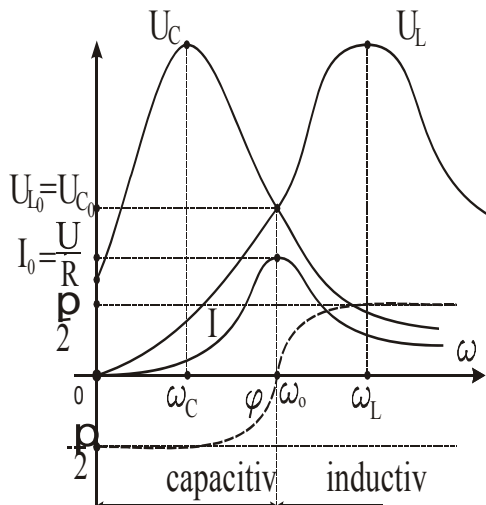


Fig. 5.5

Caracteristicile de rezonanță ale circuitului reprezintă dependența de frecvență (ω) sau de alt parametru de circuit (L sau C) a mărimilor: I , U_L , U_C și φ . Aceste caracteristici sunt reprezentate în figura 5.5 pe baza expresiilor lor:

$$\begin{cases} U_L(\omega) = \omega L I(\omega) \\ U_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} I(\omega) \end{cases} \quad (5.12)$$

unde $I(\omega)$ este dat de (5.4).

Cele două caracteristici U_L și

U_C admit maxime pentru :

$\omega_L < \omega_0$ și $\omega_C > \omega_0$, diferența

între aceste frecvențe este cu atât mai mare cu cât factorul de amortizare este mai mare. Pentru $d > \sqrt{2}$ nici U_L , nici U_C nu prezintă maxime și cu creșterea frecvenței U_L crește monoton, iar U_C scade monoton. Notăm:

$\omega_r = \frac{\omega}{\omega_0}$ pulsația relativă iar valoarea efectivă a curentului și φ sunt:

$$\begin{cases} I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{R \sqrt{1 + q^2 (\omega_r - \frac{1}{\omega_r})^2}} = \frac{I_0}{\sqrt{1 + q^2 (\omega_r - \frac{1}{\omega_r})^2}} \\ \varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg q (\omega_r - \frac{1}{\omega_r}) \end{cases} \quad (5.13)$$

Dependența valorii relative a curentului $I_r = \frac{I}{I_0}$ și a defazajului φ în funcție

de pulsația relativă ω_r pentru diferite valori a factorului de calitate q se numesc *curbe de rezonanță* ale circuitului și sunt prezentate în figura 5.6.

Proprietatea circuitului de a realiza variații mari ale curentului la variația frecvenței se numește *selectivitate*. Selectivitatea circuitului serie este cu atât mai bună cu cât curba de rezonanță este mai îngustă, respectiv q este mai mare.

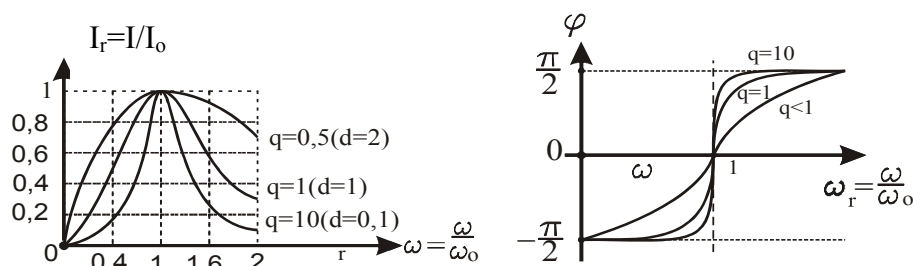


Fig. 5.6

La variații $\Delta\omega_r$ ale frecvenței în jurul rezonanței ($\omega_r = 1$) corespund variații ΔI_r ale valorii relative a curentului care se pot aproxima prin:
 $\Delta I_r = -2q(\Delta\omega_r)^2$.

5.3 Rezonanță de curenți (de tip paralel)

Cel mai simplu circuit în care poate apărea o rezonanță de curenți este circuitul: R, L, C paralel (figura 5.7), de unde și numele de rezonanță *de tip paralel*.

Presupunem circuitul alimentat cu o tensiune sinusoidală de pulsație ω . Curentul absorbit, scris în valori instantanee este:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt} \quad (5.14)$$

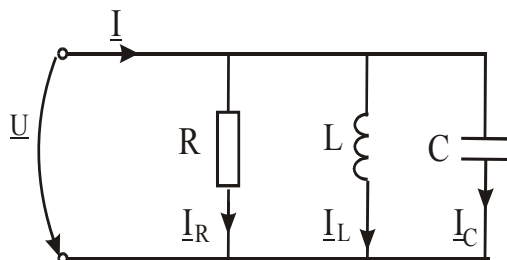


Fig. 5.7

iar în valori complexe ecuația de curenți este

$$\underline{I} = \underline{U} \left[\frac{1}{R} + j \left(\frac{-1}{\omega L} + \omega C \right) \right] = \underline{U} \underline{Y} \quad (5.15)$$

Condiția de rezonanță (5.2) devine în acest caz de forma:

$$B = 0 \rightarrow \frac{1}{\omega L} = \omega C \rightarrow \omega^2 LC = 1 \rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5.16)$$

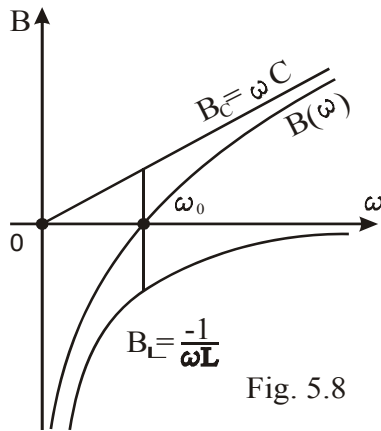


Fig. 5.8

deci o condiție de rezonanță formal analoagă cu cea de la circuitul serie (5.5), deși manifestarea celor două rezonanțe este complet diferită.

În figura 5.8 este reprezentată caracteristica de frecvență a susceptanței $B(\omega) = \omega C - \frac{1}{\omega L}$. Și aici la trecerea prin punctul de rezonanță ω_0 circuitul își schimbă caracterul:

$$\omega < \omega_0 \rightarrow B_{\text{ind}}; \quad \omega > \omega_0 \rightarrow B_{\text{cap}};$$

La rezonanță $B = 0$, $Y_0 = Y_{\min} = \frac{1}{R} = G$ și dacă $U = \text{ct}$, valoarea efectivă a curentului la rezonanță va avea o valoare minimă:

$$I_0 = Y_0 \cdot U = Y_{\min} \cdot U = \frac{U}{R} = I_R = I_{\min} \quad (5.17)$$

Dacă lipsește ramura cu rezistența R (respectiv $R \rightarrow \infty$), un circuit oscilant paralel cu elemente ideale L și C , atunci acest minim I_0 este zero. Respectiv un circuit oscilant paralel (LC) acordat pe o anumită frecvență va bloca trecerea curentului de acea frecvență prin el.

Diagrama fazorială a circuitului la rezonanță este prezentată în figura 5.9. La rezonanță, curenții prin bobină și condensator I_{L_0} și I_{C_0} sunt egali și în opoziție de fază. Tot curentul absorbit de la rețea I_0 se închide numai prin rezistență $I_0 = I_{R_0}$ iar dacă rezistența lipsește ($R \rightarrow \infty$) atunci $I_0 = 0$ (figura 5.10).

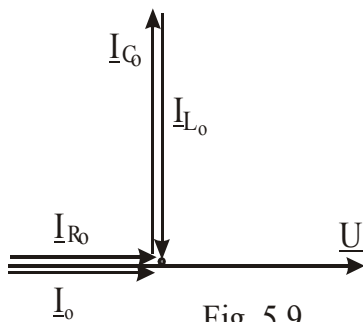


Fig. 5.9

La rezonanță curenții I_{L_0} și I_{C_0} pot lua valori foarte mari, periculoși pentru elementele L și C , de unde și denumirea de *rezonanță de curenți*.

Factorul de calitate al circuitului este:

$$q = \frac{I_{L_0}}{I_0} = \frac{I_{C_0}}{I_0} = \frac{R}{Z_C} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad (5.18)$$

Dacă $R \gg Z_C \rightarrow q \gg 1 \rightarrow I_{L0} = I_{C0} \gg I_0$ iar dacă $R \rightarrow \infty \Rightarrow q \rightarrow \infty \rightarrow I_0 = 0$

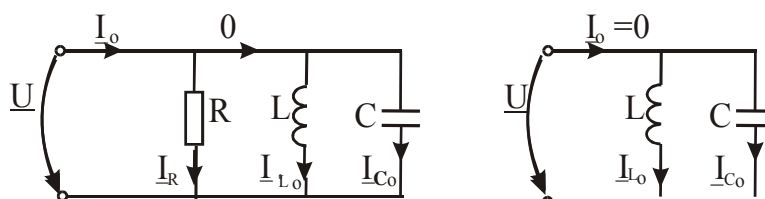


Fig. 5.10

Caracteristicile de rezonanță ale circuitului sunt prezentate în figura 5.11. La trecerea prin punctul de rezonanță $\omega = \omega_0$, circuitul își schimbă caracterul din circuit inductiv în circuit capacitiv.

Curbele de rezonanță, respectiv caracterul selectiv al circuitului depind de factorul de calitate q , la fel ca pentru circuitul RLC-serie.

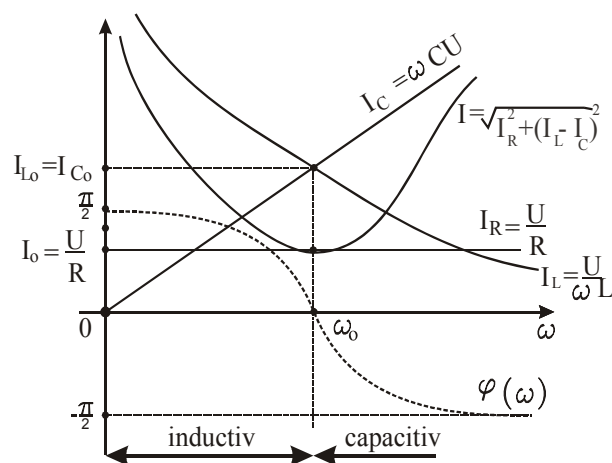


Fig. 5.11

5.4 Rezonanța în circuite derivație cu pierderi

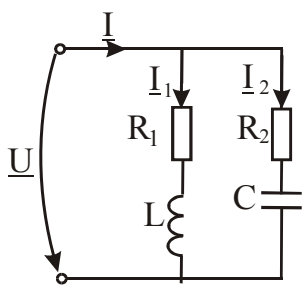


Fig. 5.12

Considerăm un circuit oscilant paralel realizat cu elemente reale de circuit, bobina are rezistența de pierderi R_1 iar condensatorul o rezistență de pierderi de tip serie R_2 . Circuitul (figura 5.12) este alimentat cu o tensiune sinusoidală de pulsație ω .

Admitanța complexă a circuitului este:

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_1 + j\omega L} + \frac{1}{R_2 - j\frac{1}{\omega C}} \quad (5.19)$$

$$\underline{Y} = \left(\frac{R_1}{Z_1^2} + \frac{R_2}{Z_2^2} \right) + j \left(\frac{-\omega L}{Z_1^2} + \frac{\frac{1}{\omega C}}{Z_2^2} \right) = G + jB \quad (5.20)$$

Condiția de rezonanță ($B = 0$) devine:

$$\begin{aligned} \frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} &= \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} \rightarrow \omega_0^2 LC \left(R_2^2 + \frac{1}{\omega_0^2 C^2} \right) = R_1^2 + \omega_0^2 L^2 \rightarrow \\ \rightarrow \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Rezultă că pentru circuitul cu pierderi pulsația de rezonanță ω_0 (relația 5.21) depinde și de rezistențele de pierderi R_1 și R_2 spre deosebire de circuitele oscilante serie sau paralel ideale unde ω_0 era funcție doar de L și C .

Dacă $R_1 = R_2$ (sau $R_1 = R_2 = 0$, circuit ideal) pulsația de rezonanță este aceeași ca în cazul circuitelor ideale: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Dacă $R_1 > \sqrt{\frac{L}{C}}$ și $R_2 < \sqrt{\frac{L}{C}}$ (sau invers), pulsația de rezonanță ω_0 dată de (5.21) este imaginară, deci circuitul nu intră în rezonanță pentru nici o pulsație (frecvență).

Dacă $R_1 = R_2 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ rezultă din (5.21) pentru ω_0 o nedeterminare ($\omega_0 = \frac{0}{0}$), respectiv nedeterminarea înseamnă “orice valoare” pentru ω_0 , deci circuitul în acest caz, poate rezona pentru orice pulsație. Acest circuit cunoscut sub numele de *circuit complet aperiodic* sau *total rezonant* are numeroase aplicații tehnice.

Acest circuit se comportă, la orice frecvență, ca o rezistență în raport cu bornele de alimentare, defazajul dintre curenții \underline{I}_1 și \underline{I}_2 fiind $\frac{\pi}{2}$ la orice frecvență:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\omega L}{R_1} \cdot \frac{-1}{\omega C} = \frac{\omega L}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \cdot \frac{-1}{\omega \sqrt{LC}} = -1 \quad ; \quad \varphi_1 + |\varphi_2| = \frac{\pi}{2} \quad (5.22)$$

Tensiunea pe condensator $\underline{U}_c = -j \frac{1}{\omega C} \underline{I}_2$, va fi în urma lui \underline{I}_2 cu $\frac{\pi}{2}$,

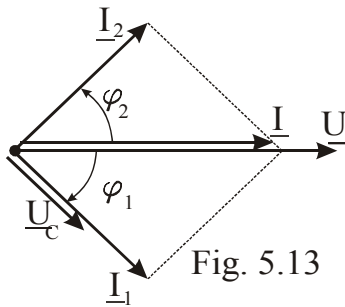


Fig. 5.13

respectiv va fi în fază cu \underline{I}_1 (figura 5.13) Deci între bobină și condensator nu vor apare oscilații de energie ca la circuitele ideale. Energiile electrică

$$W_C = \frac{1}{2} C \cdot u_C^2 \quad \text{și} \quad \text{magnetică}$$

$$W_L = \frac{1}{2} L \cdot i_1^2, \text{ sunt absorbite de la}$$

rețea când u_C și i_1 , cresc, iar apoi sunt disipate sub formă de căldură pe rezistențele R_1 și R_2 . Aici u_C și i_1 , sunt în fază (figura 5.13), deodată trec prin zero și deodată prin maxim. La celelalte rezonanțe ele erau în cuadratură și asta făcea posibil schimbul de energie între L și C.

Curentul $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ fiind în fază cu tensiunea \underline{U} ($\varphi = 0$) face ca celelalte calități ale rezonanței să se păstreze.

Dacă $R_1 = R_2 = R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, admitanța echivalentă a circuitului este:

$$\begin{aligned} \underline{Y}_e &= \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}} + j\omega L} + \frac{1}{\sqrt{\frac{L}{C}} - j\frac{1}{\omega C}} = \sqrt{\frac{C}{L}} \left[\frac{1}{1 + j\omega\sqrt{LC}} + \frac{1}{1 - j\frac{1}{\omega\sqrt{LC}}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot \frac{2 + j\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)}{(1 + j\omega\sqrt{LC}) \cdot (1 - j\omega\sqrt{LC})} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{R} = G \Rightarrow \underline{Z}_e = R \end{aligned} \quad (5.23)$$

Deci în cazul $R_1 = R_2 = R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ tot circuitul din figura 5.12 este echivalent cu R iar structurile din figura 5.12', dacă $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ atunci este de asemenea echivalent cu R .

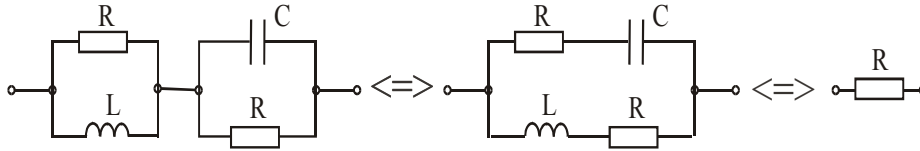


Fig. 5.12'

5.5 Rezonanța în circuite cuplate

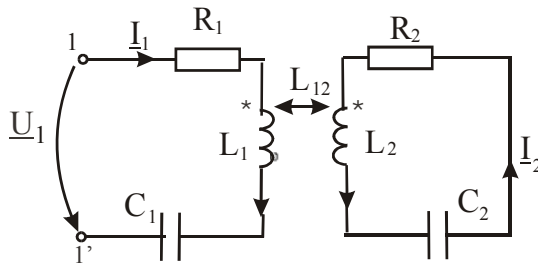


Fig. 5.14

Considerăm două circuite cuplate mutual ca în figura 5.14. Prin variația frecvenței sau a parametrilor circuitului se poate realiza rezonanța în circuitul primar, în circuitul secundar, fie a ansamblului celor două circuite în raport cu bornele de intrare 1-1'.

Ecuatiile de tensiuni a celor două circuite sunt scrise cu teorema lui Joubert sub forma:

$$\begin{cases} u_1 = u_{R_1} + u_{L_1} + u_{C_1} = R_1 i_1 + \left(L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \right) + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt \\ 0 = u_{R_2} + u_{L_2} + u_{C_2} = R_2 i_2 + \left(L_2 \frac{di_2}{dt} + L_{12} \frac{di_1}{dt} \right) + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt \end{cases} \quad (5.24)$$

Notăm cu $X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}$ și $X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}$ reactanțele celor două circuite și ecuațiile (5.24) se pot scrie sub formă complexă :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = (R_1 + jX_1)\underline{I}_1 + j\omega L_{12}\underline{I}_2 \\ 0 = (R_2 + jX_2)\underline{I}_2 + j\omega L_{12}\underline{I}_1 \end{cases} \quad (5.25)$$

Dacă $X_{12} = \omega L_{12}$ este reactanța de cuplaj atunci: $I_2 = -j \frac{X_{12}}{R_2 + jX_2} I_1$ și înlocuită în prima ecuație din (5.25) devine:

$$\underline{U}_1 = \left[\left(R_1 + \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2} R_2 \right) + j \left(X_1 - \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2 \right) \right] \cdot I_1 = (R_e + jX_e) I_1 \quad (5.26)$$

$\alpha_{12}^2 = \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2}$ este coeficientul de reflexie a impedanțelor din circuitul

2 în 1. Reactanța echivalentă în raport cu bornele 1-1' se scrie:

$$X_e = X_{e11'} = X_1 - \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2} X_2 = X_1 - \alpha_{12}^2 X_2 \quad (5.27)$$

și este reactanța circuitului 1 (X_1) plus reactanța circuitului 2 reflectată în circuitul 1 ($-\alpha_{12}^2 X_2$).

Se obține rezonanță de tensiuni în raport cu bornele 1-1' dacă $X_e = 0$, respectiv:

$$X_1 = X_2 \frac{X_{12}^2}{R_2^2 + X_2^2} \quad (5.28)$$

care este ecuație de gradul 6 în ω . Rădăcinile sale ω_0 depind de R_2 dar nu depind de R_1 . Cum rezonanța circuitelor cuplate prezintă interes doar în tehnica frecvențelor înalte, putem considera că: $X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \gg R_2$

și în acest caz condiția de rezonanță (5.28) devine:

$$X_1 \cdot X_2 = X_{12}^2 \quad (5.29)$$

$$\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} \right) \cdot \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) = \omega^2 L_{12}^2$$

$$\omega^4 L_1 C_1 L_2 C_2 - \omega^2 (L_1 C_1 + L_2 C_2) + 1 = \omega^2 L_{12}^2 C_1 C_2 \cdot \frac{1}{L_1 C_1 L_2 C_2}$$

$$\Rightarrow \omega^4 \left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_1 L_2} \right) - \omega^2 \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2} \right) + \frac{1}{L_1 C_1 L_2 C_2} = 0 \quad (5.30)$$

Notăm $k = \frac{|L_{12}|}{\sqrt{L_1 L_2}}$ - coeficientul de cuplaj magnetic al celor două bobine;

$\sigma = \sqrt{1 - k^2}$ - coeficientul de dispersie magnetică; $\omega_{01} = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}$ și

$\omega_{02} = \frac{1}{\sqrt{L_2 C_2}}$ - pulsațiile proprii de rezonanță ale celor două circuite. Cu

aceste notații ecuația (5.30) se scrie sub forma:

$$(1 - k^2)\omega^4 - (\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)\omega^2 + \omega_{01}^2 \cdot \omega_{02}^2 = 0 \quad (5.31)$$

care este o ecuație bipătrată în ω . Rădăcinile sale reale ω_0' și ω_0'' sunt:

$$\omega_0', \omega_0'' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \left[(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2) \pm \sqrt{(\omega_{01}^2 + \omega_{02}^2)^2 - 4\sigma^2 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.32)$$

Pentru pulsațiile ω_0' și ω_0'' unde $X_e = 0$, circuitul prezintă două puncte de re-zonanță serie, curba $I_1(\omega)$ va prezenta două maxime și un punct de minim.

Dacă discriminantul ecuației algebrice (5.31) este nul ($\Delta = 0$) înseamnă:

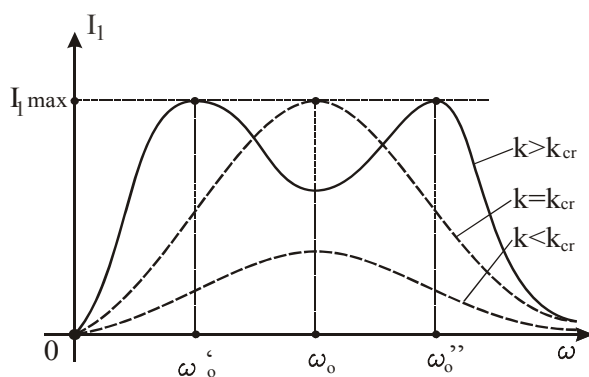


Fig. 5.15

$$\sigma_{cr}^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} + \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \right)^2$$

În acest caz valoarea critică a coeficientului de cuplaj este:

$k_{cr} = \sqrt{1 - \sigma_{cr}^2}$. Pentru $k = k_{cr}$, discriminantul

este zero $\omega_0' = \omega_0'' = \omega_0$ cele două maxime coincid și circuitul

prezintă un singur punct de rezonanță serie pe pulsația ω_0 (figura 5.15). Dacă cuplajul între cele două circuite este mai slab decât cel critic, maximul curentului scade și rezonanța nu mai este semnificativă.

În particular, când ambele circuite au aceleași pulsații de rezonanță proprie (în caz că ar funcționa necuplate): $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0$ vom avea legătura:

$$\omega_0' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} < \omega_0 < \omega_0'' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}} \quad (5.34)$$

5.6 Rezonanța circuitelor în regim nesinusoidal

Dacă tensiunile de alimentare și curenții prin circuitele liniare sunt mărimi periodice nesinusoidale, cu un anumit conținut de armonici componente, circuitul poate prezenta rezonanță pe oricare dintre armonice.

Dacă tensiunea de alimentare o descompunem în armonici:

$$u = \sum_{k=1}^n \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \gamma_{u_k}) \quad (5.35)$$

și se aplică unui circuit R,L,C-serie armonica de ordinul k a curentului va fi:

$$i_k = \frac{\sqrt{2} U_k}{Z_k} \sin(k\omega t + \gamma_{u_k} - \varphi_k) \quad (5.36)$$

unde:

$$Z_k = \sqrt{R^2 + \left(k\omega L - \frac{1}{k\omega C}\right)^2} \quad (5.37)$$

este impedanța circuitului pentru armonica de ordinul k.

$$\varphi_k = \arctg \frac{k\omega L - \frac{1}{k\omega C}}{R} \quad (5.38)$$

este defazajul dintre armonicile de ordin k a tensiunii și a curentului. Circuitul intră în rezonanță pe armonica de ordinul k dacă:

$$X_k = k\omega L - \frac{1}{k\omega C} = 0 \rightarrow k^2 \omega^2 LC = 1 \rightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{\omega \sqrt{LC}} \\ \omega_0 = \frac{1}{k \sqrt{LC}} \end{cases} \quad (5.39)$$

Impedanța Z_k are în acest caz valoarea minimă $Z_k = R$, iar armonica de ordinul k a curentului prezintă un maxim: $I_{k0} = \frac{U_k}{R}$.

Considerăm că la bornele circuitului din figura 5.16 se aplică o tensiune nesinusoidală ce conține fundamentală și armonica a treia:

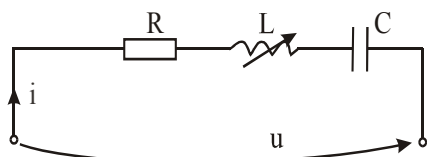


Fig. 5.16

$$u = \sqrt{2} U_1 \sin(\omega t + \gamma_1) + \sqrt{2} U_3 \sin(3\omega t + \gamma_3)$$

Aducerea circuitului în stare de rezonanță se realizează prin variația

inductivității L . Circuitul intră în rezonanță pe o armonică conform relației (5.39), respectiv pentru $L_1 = \frac{1}{\omega^2 C}$ va rezona pe fundamentală și pentru $L_3 = \frac{1}{9\omega^2 C}$ va rezona pe armonica a treia, deci curentul va prezenta maxime, ca în figura 5.17.

Valoarea efectivă a curentului prin circuit $I = \sqrt{I_1^2 + I_3^2}$ va prezenta tot două maxime locale.

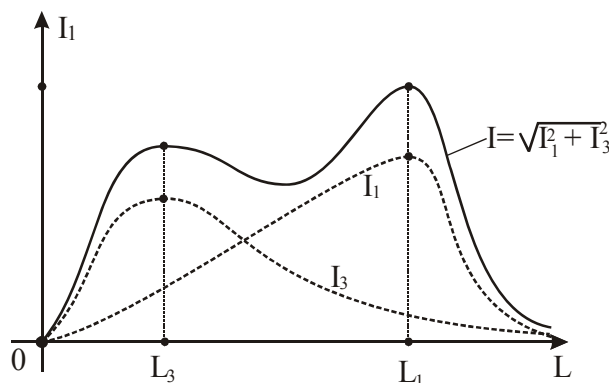


Fig. 5.17

5.7 Filtre de armonici

O structură de circuit $L C$ serie acordată la rezonanță pe o anumită frecvență „ ω ” va avea impedanța (reactanța) echivalentă nulă (deci se va comporta ca un scurtcircuit pentru frecvența respectivă) iar o structură $L C$ paralel acordată la rezonanță pe o anumită frecvență „ ω ” va avea impedanța echivalentă infinită ($\underline{Y} = jB = 0$), deci se va comporta ca la mersul în gol (circuit întrerupt) pentru frecvența respectivă (figura 5.18) dacă $\omega^2 LC = 1$.

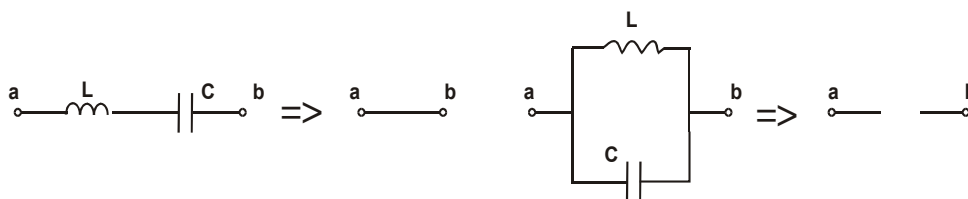


Fig. 5.18

Filtrele de armonici utilizează fenomenul de rezonanță în selectarea unor armonici dorite dintr-o undă nesinusoidală sau în reducerea (suprimarea) unor armonici nedorite în unda de curent a unui receptor.

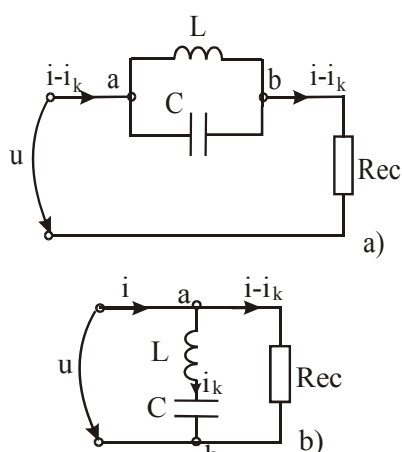


Fig. 5.19

ocolire), armonica de ordinul k va ocoli receptorul prin ramura L C .

Dacă trebuie eliminate din unda de curent mai multe armonici (i_1, i_2, i_3)

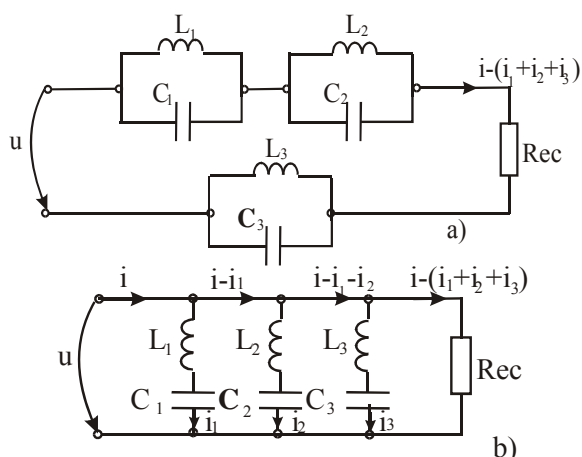


Fig. 5.20

pondere mai mare decât o avea în unda tensiunii de alimentare „ u ” iar altă armonică să aibă o pondere mai mică (sau să nu treacă) atunci în serie cu receptorul se va pune un filtru care să aibă Z_{\min} pentru armonica dorită și

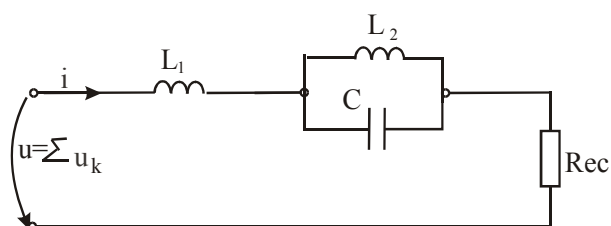


Fig. 5.21

În circuitul din figura 5.19-a bobina L și condensatorul C au astfel de valori încât sunt acordate la rezonanță pe armonica de ordinul k : ($k^2 \omega^2 LC = 1$) și Z_{ab} devine ∞ armonica de ordinul k a curentului este oprită să treacă spre receptor (*filtru de blocare*).

Același efect se obține și prin conectarea în paralel cu receptorul a unui circuit L C serie (figura 5.19-b) acordat la rezonanță pe armonica k ; impedanța circuitului LC devine zero pe armonica k ($Z_{ab} = 0$), deci șuntează trecerea ei spre receptor (*filtru de*

atunci fie se conectează în serie cu receptorul mai multe filtre de blocare, fiecare acordat pe o armonică nedorită ($\omega_1^2 L_1 C_1 = 1$; $\omega_2^2 L_2 C_2 = 1$)

ca în figura 5.20-a, fie se conectează în paralel cu receptorul mai multe filtre de ocolire fiecare acordat pe o armonică nedorită ca în figura 5.20-b. Dacă se cere ca o anumită armonică să aibă în unda de curent „ i ” o

un Z_{\max} (sau ∞) pentru armonica nedorită. Filtru montat în serie cu receptorul (figura 5.21) este format dintr-o combinație de

elemente pur reactive trebuie să atenueze armonica de ordinul p și să scoată în evidență armonica de ordinul q . Pentru armonica nedorită, elementele L_2C_2 astfel se aleg încât să realizeze un *filtru dop* (de blocare):

$$B(p\omega) = 0 \leftrightarrow \frac{1}{p\omega L_2} = p\omega C_2, \text{ iar pentru armonica care doresc să-i cresc}$$

ponderea (q) astfel voi alege L_1 , încât filtrul pe ansamblu să opună Z_{\min} :

$$X_e(q\omega) = 0 \leftrightarrow jq\omega L_1 + \frac{jq\omega L_2 \left(-j \frac{1}{q\omega C_2} \right)}{j \left(q\omega L_2 - \frac{1}{q\omega C_2} \right)} = 0$$

Observații:

- Pulsațiile ω_1 pentru care $X = 0$ corespund punctelor de rezonanță serie iar pulsațiile ω_2 pentru care $X = \infty$ corespund punctelor de rezonanță paralel. În *Tabela 5.1* sunt prezentați câțiva dipoli pur reactivi precum și variația reactanței lor cu frecvanța $X(\omega)$.
Din examinarea caracteristicilor de frecvență $X(\omega)$ rezultă că există dipoli la care o aranjare diferită a elementelor L și C produc aceleași efecte (cazul e și g) au efecte întârziate (c față de e și g).
- Dacă circuitul permite circulația curentului continuu ($\omega = 0$), respectiv $X|_{\omega=0} \neq \infty$ atunci, în sensul crescător al frecvențelor, prima rezonanță care apare este de tip paralel (cazul d, e, g) iar dacă circuitul blochează curentul continuu ($X|_{\omega=0} = \infty$) atunci prima rezonanță care apare este de tip serie (c, f, h)
- Pentru un circuit cu o structură mai complexă, punctele de rezonanță serie și paralel se succed alternativ, rezonanța serie ($\omega_{1s}, \omega_{2s}, \dots$) înseamnă un maxim al curentului iar cea paralel ($\omega_{1p}, \omega_{2p}, \dots$) înseamnă un minim al

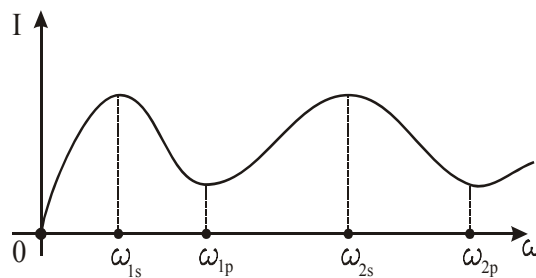
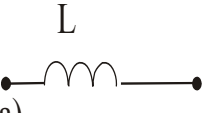
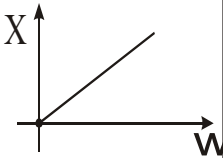
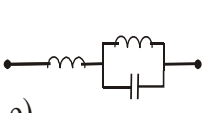
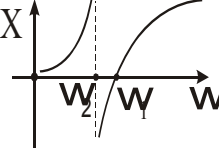
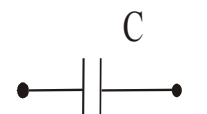
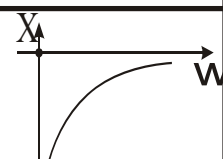
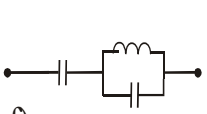
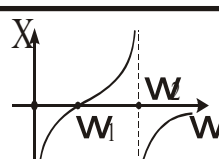

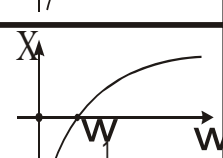
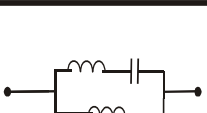
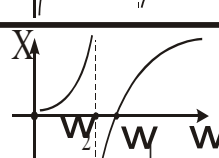
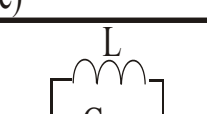
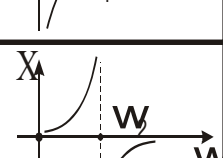
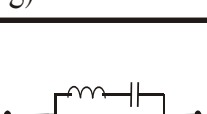
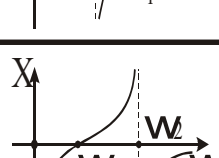


Fig. 5.22

curentului. Curba $I(\omega)$ pentru orice circuit este continuă, deci nu pot urma două maxime sau două minime consecutive, ele alternează pe axa frecvențelor cu pas din ce în ce mai mare (figura 5.22).

- Numărul punctelor de rezonanță posibile ale unui circuit (de tip serie sau paralel) este egal cu numărul elementelor reactive din circuit (numărul de L + numărul de C) minus unu.

Tabela 5.1

a) 		e) 	
b) 		f) 	
c) 		g) 	
d) 		h) 	

5.8 Aplicații

1. Circuitul din figura 5.23 având $C = 1\mu\text{F}$ alimentat în curent continuu cu

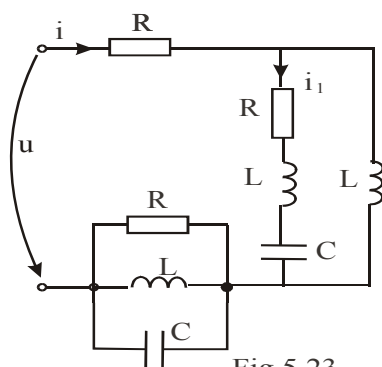


Fig.5.23

tensiunea $U_0 = 100\text{ V}$ absoarbe puterea $P_0 = 10\text{ W}$. Alimentat în regim sinusoidal ($f = \frac{500}{\pi}\text{ Hz}$) ramura (1) va

fi la rezonanță și circuitul absoarbe pe la borne puterea reactivă $Q = 1\text{ kVAR}$.

Se cere să se determine parametrii R și X_L , valoarea efectivă U a tensiunii sinusoidale și puterea activă P absorbită pe la borne.

a) În curentul continuu circuitul se reduce la schema din figura 5.24, curentul absorbit este:

$$I_o = \frac{U_o}{R} \quad P_o = R I_o^2 = \frac{U_o^2}{R} \rightarrow R = 1 \text{ k}\Omega$$

b) Alimentat sinusoidal, la $f = \frac{500}{\pi}$ Hz, dacă ramura (1) este în rezonanță

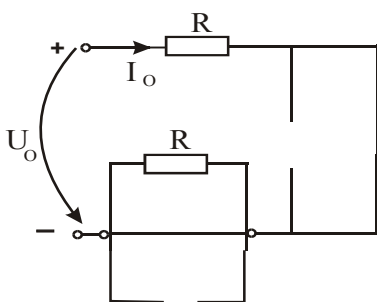


Fig.5.24

serie ($\omega^2 LC = 1$), atunci și ramura de jos va fi în rezonanță paralel și schema se reduce la cea din figura 5.25. Aceasta are impedanță echivalentă \underline{Z} :

$$\underline{Z} = 2R + \frac{jRX_L}{R + jX_L}$$

Cum ramura (1) este în rezonanță:

$$X_L = X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \frac{500}{\pi} 10^{-6}} = 1 \text{ k}\Omega$$

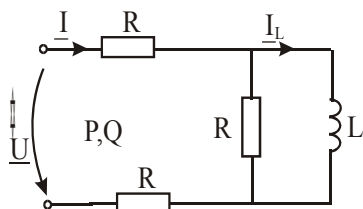


Fig. 5.25

și în acest caz: $\underline{Z} = (2.5 + j0.5) 10^3 \Omega$

Curentul absorbit va fi: $\underline{I} = \frac{U}{\underline{Z}}$, iar

fracțiunea prin bobina L din figura 5.25 se scrie cu regula divizorului de

$$\text{curent: } I_L = \frac{R}{R + jX_L} \underline{I} = \frac{U \cdot 10^{-3}}{2 + j3}$$

Puterea reactivă consumată de bobină L este $Q = 1 \text{ kVAR}$:

$$Q = X_L \cdot I_L^2 = \frac{U^2 \cdot 10^{-3}}{13} = 10^3 \rightarrow U = \sqrt{13} \text{ kV}$$

Puterea activă absorbită pe la borne va fi:

$$\left(I = \frac{U}{Z_e} = \frac{\sqrt{13} \cdot 10^3}{|500(5 + j)|} = \sqrt{2} \text{ A} \right)$$

$$P = R_e I^2 = 2.5 \cdot 10^3 \frac{13}{6.5} = 5 \text{ kW}$$

Curentul absorbit pe la borne este: $\underline{I} = \sqrt{2} \angle \arccos \frac{5}{\sqrt{26}} \text{ A}$, respectiv:

$$P = UI \cos \varphi = \sqrt{13} \cdot 10^3 \cdot \sqrt{2} \frac{5}{\sqrt{26}} = 5 \cdot 10^3 \text{ W}.$$

2. Circuitul din figura 5.26, este un *circuit defazor* care funcționează semicompensat. La variația lui $R \in (0, \infty)$ să se arate între ce limite se modifică defazajul dintre \underline{U} și \underline{I} .

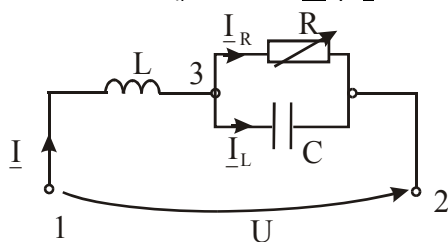


Fig. 5.26

Circuit *semicompensat* este:

$$\omega^2 LC = \frac{1}{2} \quad (\text{compensat înseamnă } \omega^2 LC = 1).$$

Impedanța echivalentă a circuitului între punctele 1 și 2 este:

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_{12} = j\omega L + \frac{R \frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = j\omega L \frac{1 + j\omega RC \left(1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\right)}{1 + j\omega RC}$$

$$\underline{Z}_e = j\omega L \frac{1 - j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \omega L \angle \frac{\pi}{2} - 2\arctg(\omega RC) = Z \angle \varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi = \frac{\pi}{2} - 2\arctg(\omega RC) \\ I = \frac{U}{Z_e} = \frac{U}{\omega L} \neq f(R) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} R = 0 \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \\ R = \infty \rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

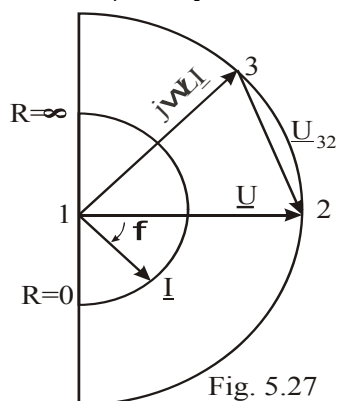


Fig. 5.27

La modificarea lui R , modulul I rămâne constant iar $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, deci vârful lui \underline{I} va descrie un semicerc ca în figura 5.27 și defazajul dintre \underline{U} și \underline{I} se modifică în toată plaja posibilă:

$$\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. Bazat pe fenomenul de rezonanță se realizează un *undametr* (figura 5.28)

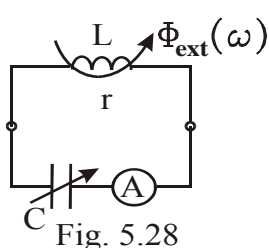


Fig. 5.28

Bobina este plasată într-un câmp magnetic exterior de frecvență ω pe care dorim s-o măsurăm. Reglăm capacitatea C până se ajunge la rezonanță serie (ampermetrul indică valoarea maximă) Gradațiile la condensator sunt direct în Hz. La rezonanță:

$$\omega^2 LC_0 = 1 \rightarrow f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_0}} \quad \text{și lungimea de undă este: } \lambda = \frac{c}{f}.$$

4. În figura 5.29 este desenată schema unui circuit defazor între tensiunile:

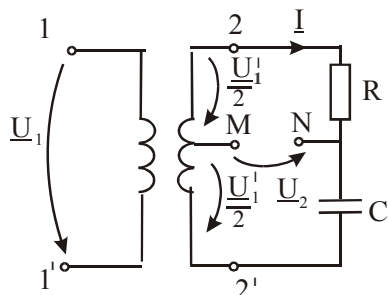


Fig. 5.29

\underline{U}_1 și \underline{U}_2 (\underline{U}_1 se aplică primarului iar \underline{U}_2 se socotește în raport cu punctul M-priza mediană a secundarului). Să se studieze proprietățile acestui circuit.

Tensiunea în secundar este $\underline{U}'_1 = \frac{\underline{U}_1}{k}$ (k raportul de transformare), deci în fază cu \underline{U}_1 .

Curentul în secundar este:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}'_1}{R - jX_C} = \underline{U}'_1 \frac{R + jX_C}{Z^2} = \angle \varphi_i$$

Faza curentului \underline{I} este:

$$\varphi_i = \arctg \frac{X_C}{R} \rightarrow \begin{cases} R = 0 \rightarrow \varphi_i = \frac{\pi}{2} \\ R = \infty \rightarrow \varphi_i = 0 \end{cases}$$

Diagrama fazorială a circuitului este prezentată în figura 5.30.

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{MN} = \frac{\underline{U}'_1}{2} \angle \varphi = \frac{\underline{U}_1}{2k} \angle \varphi \quad \text{unde } \varphi = 2\varphi_i \in (0, \pi)$$

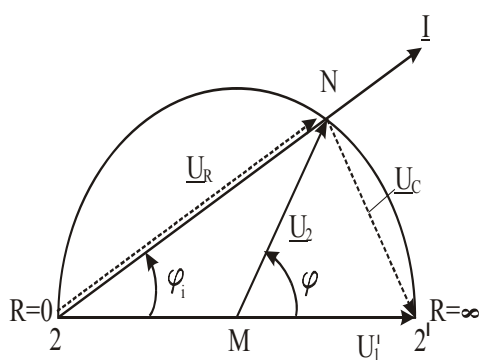


Fig. 5.30

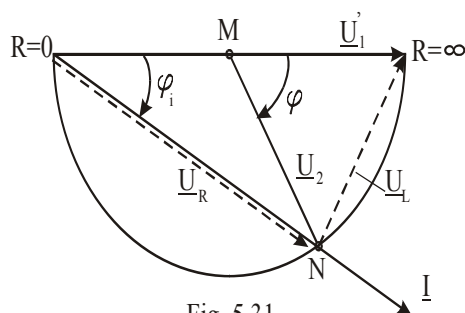


Fig. 5.31

Deci reglând $R \in (0, \infty)$, defazajul dintre \underline{U}_1 și \underline{U}_2 se modifică în domeniul $\varphi \in (0, \pi)$ așa cum se vede în figura 5.30, punctul N va descrie un semicerc de la 2 la 2'. Dacă transformatorul amplifică (ridicător) tensiunea de 2 ori atunci:

$$|\underline{U}_2| = |\underline{U}_1| = \frac{U_1'}{2}.$$

Dacă se înlocuiește C cu L, se obține un defazaj negativ între \underline{U}_1 și \underline{U}_2 : $\varphi \in (0, -\pi)$ iar

$$U_2 = \frac{U_1}{2k}, \text{ tot de modul}$$

constant și descrie tot un semicerc ca în figura 5.31.

$$\varphi = 2\varphi_i = 2\arctg \frac{\omega L}{R}$$

5. Un receptor de impedanță $\underline{Z} = R + j\omega L$ este alimentat printr-o linie de

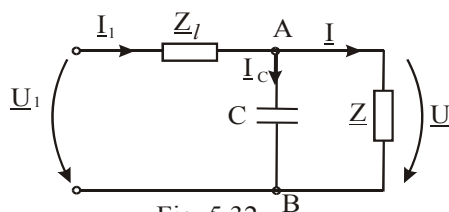


Fig. 5.32

impedanță \underline{Z}_ℓ . Pentru ce valoare a capacității C montată ca în figura 5.32 la bornele receptorului, pierderile de putere pe linie vor fi minime?

Pierderile de putere pe linie $\Delta p_\ell = R_\ell \cdot I_1^2$ vor fi minime când I_1 va avea o valoare minimă, respectiv între punctele A și B va fi o rezonanță paralel ($Y_{AB\min}$ sau $Z_{AB\max}$).

$$\underline{Y}_{AB} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{Z^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{Z^2}\right) = G_{AB} + jB_{AB} \text{ unde}$$

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U^2 \cos \varphi}{P} \begin{cases} R = Z \cos \varphi = \frac{U^2 \cos^2 \varphi}{P} \\ X = Z \sin \varphi = \frac{U^2}{P} \sin \varphi \cos \varphi \end{cases}$$

Rezonanță ($B_{AB} = 0$) înseamnă:

$$\omega C = \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = \frac{P \sin \varphi}{U^2 \cos \varphi} ; \text{ deci: } C = \frac{P}{\omega U^2} \tan \varphi .$$

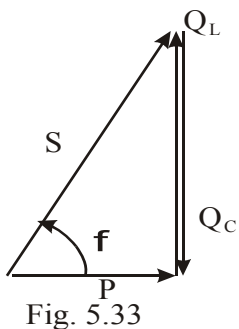


Fig. 5.33

Aceeași problemă admite și o soluție „energetică”. Înainte de a monta condensatorul din triunghiul puterilor (figura 5.28) avem:

$$\tan \varphi = \frac{Q_L}{P}$$

Condensatorul, la rezonanță, furnizează toată puterea reactivă de care are nevoie \underline{Z} :

$$Q_C = Q_L \rightarrow \omega C U^2 = P \cdot \tan \varphi \rightarrow C = \frac{P}{\omega U^2} \tan \varphi$$

6. Să se determine impedanța echivalentă în raport cu 1-1' a circuitului din figura 5.34.

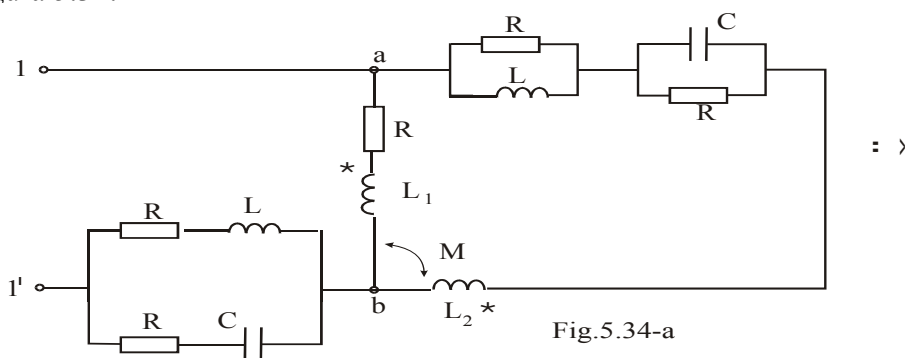
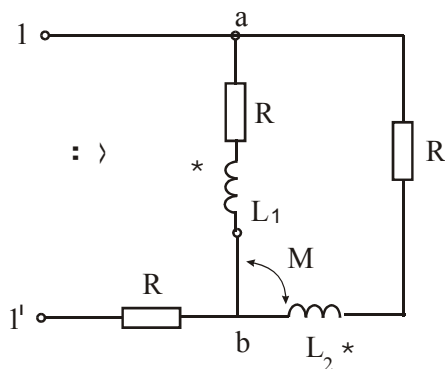


Fig. 5.34-a



Elementele circuitului au următoarele valori:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = 10 \, \Omega \\ L = 1 \, H \\ C = 10 \, mF \\ L_1 = L_2 = 2 \, M = \frac{1}{5\pi} \, H \\ f = 50 \, Hz \end{array} \right.$$

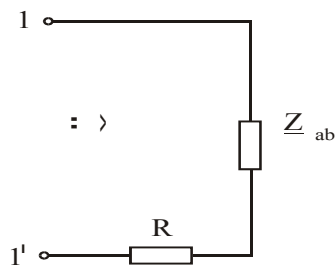


Fig. 5.34-b

Structurile din figura 5.34-a îndeplinesc condiția de circuite complet aperiodice (5.23)

$$R = \sqrt{\frac{L}{C}} = 10 \Omega,$$

respectiv de punte în echilibru (4.54).

În schema din figura 5.34-b sunt două ramuri în paralel cuplate și conform cu (4.39) se compun în impedanța \underline{Z}_{ab} :

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M} = \frac{\underline{Z} + \underline{Z}_M}{2} = (5 + j \cdot 15) \Omega$$

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z} = 10 + j 20 \quad \text{și} \quad \underline{Z}_M = j 10$$

În acest caz impedanța echivalentă este:

$$\underline{Z}_{11'} = R + \underline{Z}_{ab} = 15 + j 15 = 15\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}$$