

## 6. Teoremele circuitelor electrice

### 6.1 Elemente de topologia circuitelor. Grafuri de circuit

Studiul sistematic al unui circuit electric (rețea electrică) se face cu ajutorul unor mărimi (noțiuni) specifice circuitelor electrice, dintre care vom aminti câteva:

- *latura* de circuit: este o porțiune mărginită și neramificată de circuit formată din mai multe elemente conectate în serie.
- *nod* de circuit: este punctul de concurență a cel puțin trei laturi. Excepție face cazul unei singure laturi închisă pe ea însăși, când are un singur nod, dar poziția acestuia nu este precizată (nodul 6 din figura 6.1).
- *ochi* (bucă, contur, ciclu) de circuit reprezintă o succesiune de laturi care alcătuiesc o curbă închisă.
- *rețea conexă* (simplu conexă, închisă) este un circuit la care oricare două noduri ale sale pot fi unite printr-o curbă care trece numai prin laturi de circuit, respectiv nu este cuplată magnetic cu exteriorul (nu este parte a unui circuit mai mare).
- *rețea neconexă* (multiplu conexă) este un circuit mare format din mai multe rețele conexe (*subrețele*) care nu au legătură galvanică între ele (sunt izolate electric între ele) însă funcționează (interacționează) împreună prin cuplajele magnetice ce există între elementele din aceste subrețele.

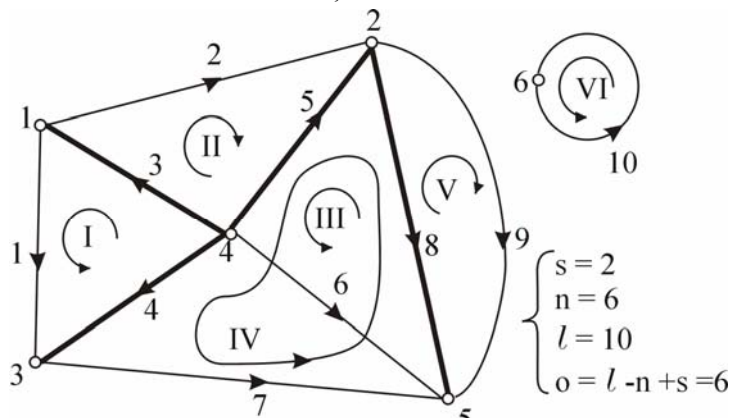


Fig. 6.1

- *graful orientat* al unui circuit este o schemă simplificată, în care nu sunt specificate elementele componente ale unei laturi, acestea sunt

reprezentate prin linii cu sensul de referință indicat pe ele, *graf orientat*, ca în figura 6.1. Pe acest graf se pot studia toate *proprietățile topologice* ale circuitului, respectiv cele referitoare la relații între laturi, noduri, ochiuri și subrețele.

- *ochi independent* de circuit, față de un sistem dat de ochiuri, este acel ochi pentru care orice integrală de contur scrisă de-alungul său, nu poate fi exprimată ca o combinație liniară a unor integrale scrise pe alte ochiuri ale circuitului dat.
- *sistem fundamental de ochiuri independente*, este un sistem de „o” ochiuri astfel alese încât toate sunt independente între ele, iar oricare alt ochi ales în circuit, neaparținând sistemului fundamental, nu este independent față de acestea. Pentru un circuit dat se pot alege mai multe sisteme fundamentale de ochiuri, dar toate au același număr „o” de ochiuri, număr ce reprezintă o caracteristică topologică a circuitului.

Se notează cu „l” numărul de laturi, cu „n” numărul de noduri, cu „s” numărul de subrețele și cu „o” numărul de ochiuri independente. Pe graful din figura 6.1 sunt numerotate nodurile, laturile și ochiurile.

- *arborele* unui graf de circuit (al unei subrețele) conține toate nodurile acestuia ( $n_s$ ) și un număr ( $n_s - 1$ ) de laturi, astfel încât să nu se formeze nici un ochi (în figura 6.1 laturile care alcătuiesc arborele sunt desenate cu o linie mai groasă). Laturile care compun arborele se numesc *ramuri* (totul provine de la asemănarea arborelui unui graf cu un copac la care ramurile se desfac radial fără a forma ochiuri). Arborele conține ( $n_s - 1$ ) ramuri deoarece atunci când îl construim, prima latură desenată aduce două noduri (capetele sale) iar toate celelalte laturi din arbore aduc ulterior fiecare numai câte un nod. Care laturi le considerăm ramuri, este arbitrar.
- *coarborele* unui graf de circuit este un subgraf complementar arborelui. Adăugând câte o latură peste arbore, fiecare astfel de latură, numită *coardă*, nu va aduce un nod în plus (nodurile sunt conținute toate în arbore) dar aduce subrețelei câte un nou ochi și numai câte unul. Practic, *un ochi este independent dacă are o latură care-i aparține numai lui*, celelalte laturi pot fi comune cu alte ochiuri din subrețea. Alegerea ochiurilor independente într-un circuit se face cu ajutorul grafului, astfel încât *fiecare ochi independent să aibă coarda lui proprie* și de obicei, sensul de referință al ochiului coincide cu sensul corzii (figura 6.1).

Din cele  $l_s$  laturi a unei subrețele,  $(n_s - 1)$  sunt cuprinse în arbore iar restul laturilor sunt corzi, deci numărul ochiurilor independente din subrețea va fi egal cu numărul de corzi ( $c_s$ ):

$$o_s = c_s = l_s - (n_s - 1) = l_s - n_s + 1 \quad (6.1)$$

această relație este cunoscută sub numele de *teorema lui Euler* pentru topologia unui graf (o relație de acest tip a fost stabilită de Euler pentru poliedre, care operează cu vârfuri, muchii, fețe; graful de circuit este un fel de poliedru plan).

prima subrețea	$\rightarrow o_1 = l_1 - n_1 + 1$	Pentru fiecare subrețea se poate scrie câte o relație de tipul (6.1) și sumând pentru tot circuitul format din „s” subrețele se obține numărul de ochiuri independente „o” ale întregului circuit, în funcție de elementele $l, n, s$ .
a doua subrețea	$\rightarrow o_2 = l_2 - n_2 + 1$	
:		
a s <sup>a</sup> subrețea	$\rightarrow o_s = l_s - n_s + 1$	
pentru tot circuitul	$\rightarrow o = l - n + s$	

Numărul de noduri independente ale unei subrețele este  $(n_s - 1)$ , iar pentru întreg circuitul el este egal cu numărul de ramuri:  $r = n - s$ .

Deci pentru un circuit format din  $s$  subrețele,  $l$  laturi și  $n$  noduri, numărul de *ochiuri independente* și de *noduri independente* este:

$$\begin{cases} o = l - n + s \\ r = n - s \end{cases} \quad (6.2)$$

*Observație:* „Grafurile de circuit” nu trebuie confundate cu „grafurile de transmisie” (grafurile de fluență) care servesc la rezolvarea pe cale grafică a sistemelor de ecuații algebrice liniare, coeficienții sistemului de ecuații numindu-se *transmitanțele* laturilor pentru graful de fluență.

## 6.2 Teorema echivalenței dintre o sursă de tensiune și o sursă de curent

### 6.2.1 Circuite cu surse independente

Circuitele care conțin surse de tensiune sau de curent sunt numite *circuite active*. Orice sursă de energie fizică admite două scheme echivalente: una privită ca o *sursă de tensiune* (figura 6.2-a) caracterizată prin *t.e.m.*  $e(t)$  sau  $\underline{E}$  și prin *impedanța (rezistența) internă*  $\underline{Z}_i$  legată în serie cu  $\underline{E}$  și alta privită ca o sursă de curent (figura 6.3 a) caracterizată prin

curentul de scurtcircuit  $\underline{I}_{sc}$  și prin admitanța (conductanța) internă  $\underline{Y}_i$  legată în paralel cu  $\underline{I}_{sc}$ .

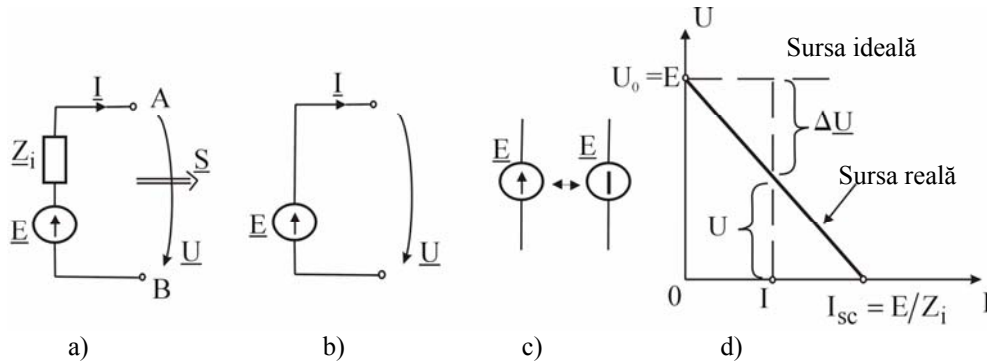


Fig 6.2

*Sursă ideală de tensiune* este acea sursă pentru care  $\underline{Z}_i = 0$  (impedanța internă neglijabilă) și se reprezintă ca în figura 6.2-b, tensiunea la bornele sale are o valoare constantă  $u = e$  ( $\underline{U} = \underline{E}$ ) independent de intensitatea curentului  $\underline{I}$  debitat pe la borne (figura 6.2 -d), deci ea stabilizează bine tensiunea la borne.

Pentru o sursă reală de tensiune, tensiunea la borne este:

$$\underline{U} = \underline{E} - \underline{Z}_i \underline{I} \quad (6.3)$$

dependența  $U(I)$  este reprezentată în figura 6.2 - d ( $\Delta \underline{U} = \underline{Z}_i \underline{I}$  este căderea internă de tensiune pe impedanța proprie a sursei). O sursă de tensiune debitează un curent între valorile  $I=0$  (*mersul în gol* al sursei) și  $I_{sc}=E/Z_i$  (*mersul în scurtcircuit* al sursei). Simbolistica pentru o sursă de tensiune este cea din figura 6.2-c. Puterea generată de o sursă de tensiune este  $\underline{S}_g = \underline{E} \underline{I}^*$  iar cea care iese pe la borne este  $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$ .

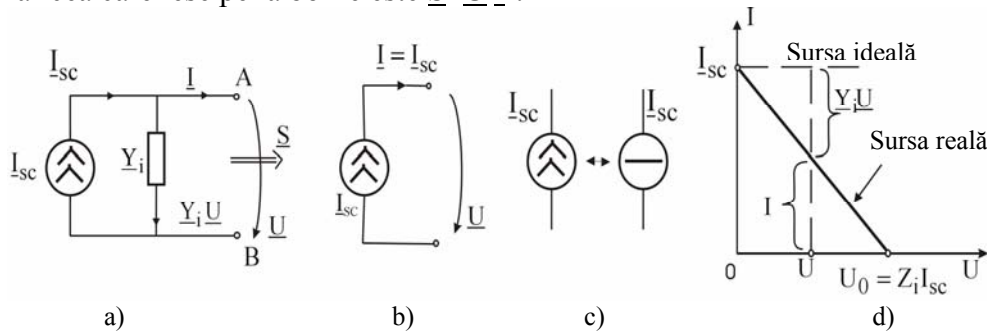


Fig. 6.3

O *sursă ideală de curent* are impedanța internă foarte mare ( $\underline{Z}_i = \infty$ ) respectiv admitanța internă  $\underline{Y}_i = 0$  (se reprezintă ca în figura 6.3 - b, c), curentul debitat  $\underline{I}$  are o valoare constantă și independentă de valoarea

sarcinii conectate la bornele sale ( $\underline{I} = \underline{I}_{sc}$ ) ca în figura 6.3 – d, deci ele stabilizează curentul debitat spre receptor.

La o sursă *reală de curent*, curentul debitat pe la borne este:

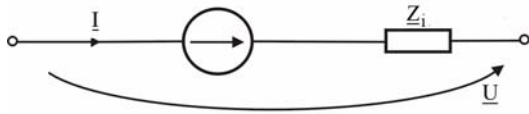
$$\underline{I} = \underline{I}_{sc} - \underline{Y}_i \underline{U} \quad (6.4)$$

și așa cum la sursa de tensiune  $\underline{Z}_i \underline{I}$  este *căderea internă de tensiune*, în relația (6.4)  $\underline{Y}_i \underline{U}$  este *consumul propriu de curent* al sursei.

O sursă fizică oarecare este mai apropiată de o sursă de tensiune sau de o sursă de curent în funcție de parametrul la borne ( $\underline{U}$  sau  $\underline{I}$ ) pe care-l stabilizează mai bine.

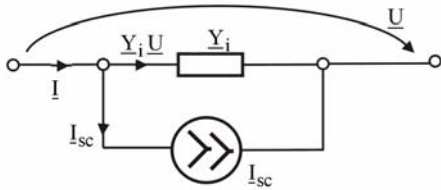
*Observație:* O sursă ideală de tensiune nu se poate scurtcircuita ( $\underline{I}_{sc} = \underline{E} / \underline{Z}_i = \underline{E} / 0 \rightarrow \infty$ ) iar o sursă ideală de curent nu poate rămâne în gol ( $\underline{U}_0 = \underline{I}_{sc} / \underline{Y}_i = \underline{I}_{sc} / 0 \rightarrow \infty$ ), aceste două operații sunt interzise în scheme cu astfel de surse.

Dacă o sursă fizică este pusă să alimenteze o impedanță de sarcină  $\underline{Z}$  legată la bornele sale A-B, stabilindu-se la borne tensiunea  $\underline{U}$  și curentul  $\underline{I}$ , atunci este indiferent cu care schemă echivalentă se lucrează (sursă de tensiune figura 6.2-a, sau sursă de curent 6.3 –a). Între parametrii sursei de tensiune ( $\underline{E}$ ,  $\underline{Z}_i$ ) și cei ai sursei de curent ( $\underline{I}_{sc}$ ,  $\underline{Y}_i$ ) trebuie să existe o legătură. Această legătură rezultă din faptul că ambele surse puse să alimenteze pe  $\underline{Z}$  vor menține același  $\underline{U}$  și  $\underline{I}$  la borne:



-pentru sursa de tensiune, ecuația de tensiuni este:

$$\underline{U} = -\underline{E} + \underline{Z}_i \underline{I} \quad (6.5)$$



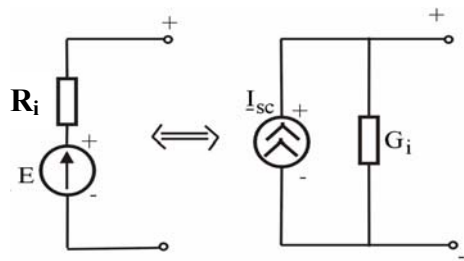
-pentru sursa de curent, ecuația de curenți este:

$$\underline{I} = \underline{I}_{sc} + \underline{Y}_i \underline{U} \quad (6.6)$$

În ecuațiile ( 6.5 ) și ( 6.6 )  $\underline{U}$  și  $\underline{I}$  coincid dacă între parametrii celor două surse există legăturile:

$$\begin{cases} \underline{U} + \underline{E} = \underline{Z}_i \underline{I} \\ \underline{U} + \frac{\underline{I}_{sc}}{\underline{Y}_i} = \frac{1}{\underline{Y}_i} \underline{I} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{E} = \frac{\underline{I}_{sc}}{\underline{Y}_i} = \underline{Z}_i \underline{I}_{sc} \\ \underline{Z}_i = \frac{1}{\underline{Y}_i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_{sc} = \underline{Y}_i \underline{E} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i} \\ \underline{Y}_i = \frac{1}{\underline{Z}_i} \end{cases} \quad (6.7)$$

Pe baza relațiilor ( 6.7 ) se pot determina elementele sursei de curent echivalente unei surse de tensiune ( sau invers ), relațiile ( 6.7 ) constituind, de fapt, expresia *teoremei de echivalență dintre o sursă de tensiune și o sursă de curent*.



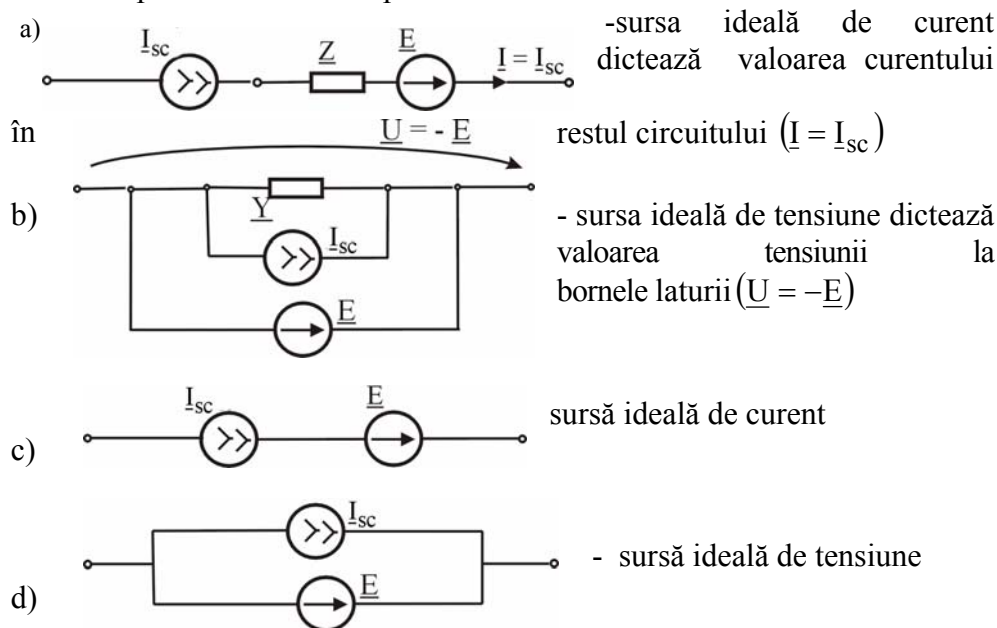
Pentru sursele de curent continuu (figura 6.4) care au doar rezistență internă  $R_i$  și conductanță internă  $G_i$  echivalența este:

$$\begin{cases} E = \frac{I_{sc}}{G_i} = R_i I_{sc} \\ R_i = \frac{1}{G_i} \end{cases} \quad (6.8)$$

Fig. 6.4

Dacă o latură de circuit conține o sursă ideală de curent, atunci curentul din acea latură nu mai constituie o necunoscută, ci este  $\underline{I} = \underline{I}_{sc}$ . La fel, dacă între două noduri de circuit este conectată o sursă ideală de tensiune, atunci tensiunea între cele două noduri nu mai este o necunoscută, ci este  $\underline{U} = \underline{E}$ . O sursă ideală de tensiune nu are echivalent o sursă de curent, precum nici o sursă ideală de curent nu se poate echivala cu vreo sursă de tensiune. Expresiile (6.7) sunt adevărate numai la echivalarea surselor reale.

**Aplicații:** Diverse laturi cu surse ideale (sau reale) de tensiune sau de curent pot fi echivalate după cum urmează:



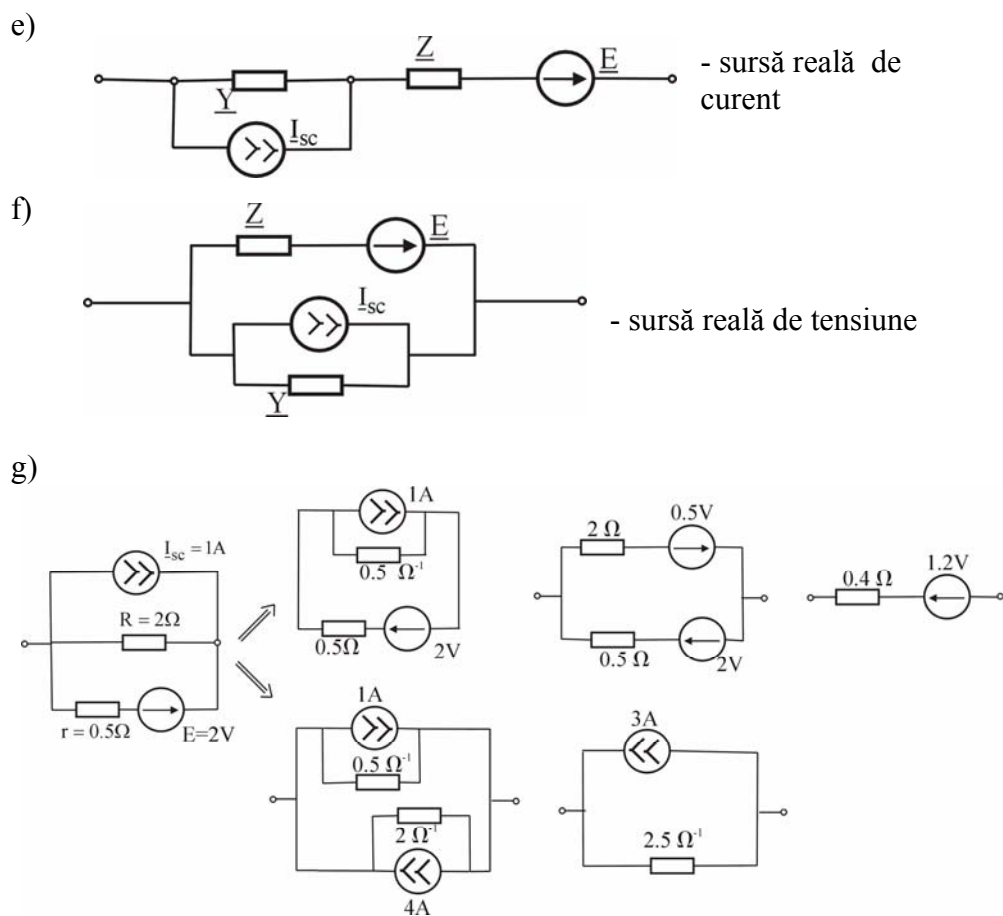


Fig. 6.5

Circuitul din figura 6.5 –g se poate transforma, din aproape în aproape, fie într-o sursă de tensiune echivalentă ( $E_e = 1,2 \text{ V}$ ,  $R_i = 0,4 \Omega$ ), fie într-o sursă echivalentă de curent ( $I_{sc} = 3 \text{ A}$ ,  $G_i = 2,5 \Omega^{-1}$ ). Se observă că cele două surse sunt echivalente și între ele ( $\frac{1,2 \text{ V}}{0,4 \text{ A}} = 3 \text{ A}$ ;  $\frac{1}{2,5} = 0,4 \Omega$ ).

### 6.2.2. Circuite cu surse comandate (convertoare)

Se numesc *surse comandate* acele surse a căror t.e.m. sau curent de scurtcircuit nu sunt parametri constanți ( $E^V$ ,  $I_{sc}^A$ ) și independenți ci valorile lor pot fi modificate printr-o comandă dată în *tensiune* sau în *curent*. La poarta lor de comandă se aplică fie o tensiune de comandă  $u_c$  fie un curent de comandă  $i_c$ , puterea de comandă  $p_c = u_c i_c$  este practic nulă (foarte mică) iar la ieșirea din sursă puterea de ieșire a sursei este  $p = u i$ .

Sursele comandate sunt realizate sub forma unor surse neconvenționale (cu elemente active – amplificatoare operaționale). Datorită regimului de mers în gol ( $i_c = 0$ ) sau în scurt ( $u_c = 0$ ) la poarta de intrare, sursele comandate sunt elemente *nereciproce* de circuit.

#### Sursă de tensiune comandată în tensiune (SUCU) sau convertor tensiune – tensiune (CVV)

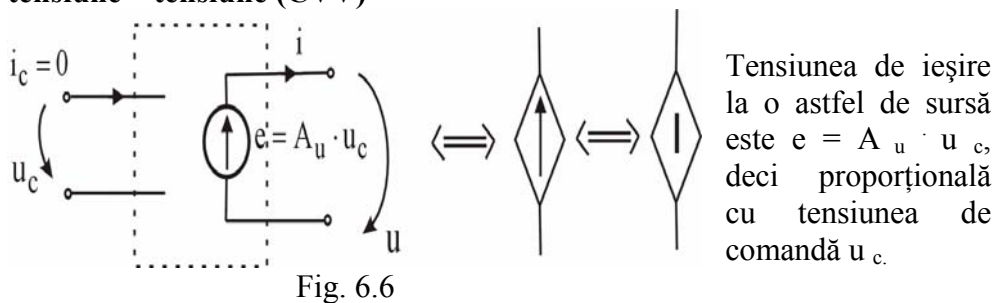


Fig. 6.6

Parametrul  $A_u$  se numește *amplificarea în tensiune* a sursei. Dacă  $A_u = \text{ct}$  avem o *sursă liniară* și invariabilă în timp; dacă  $A_u = A_u(t)$  avem o *sursă liniară parametrică* iar dacă  $e = e[u_c(t), t]$  avem o *sursă neliniară-parametrică*.

#### Sursă de tensiune comandată în curent (SUCI) sau convertor curent – tensiune (CIV)

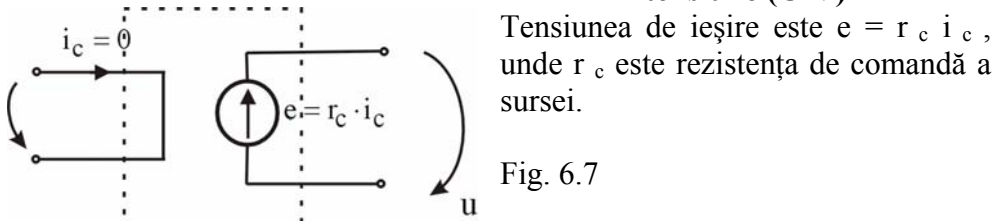


Fig. 6.7

#### Sursă de curent comandată în tensiune (SICU) sau convertor CVI

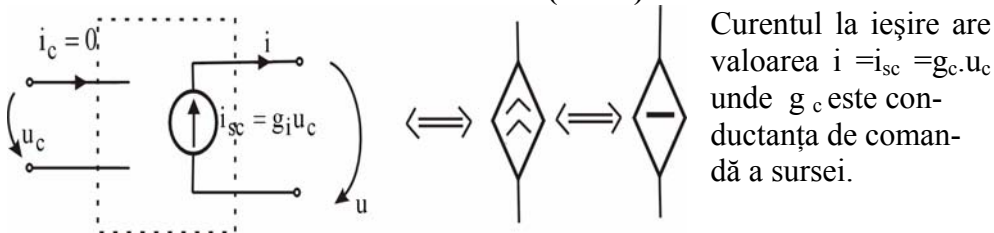


Fig. 6.8



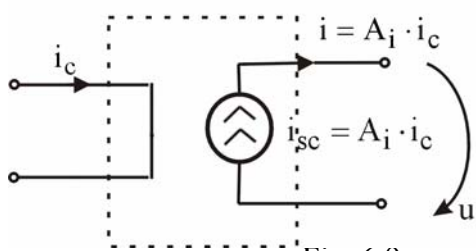
**Sursă de curent comandată în curent (SICI) sau convertor CII**

Fig. 6.9

Curentul la ieșire are valoarea  $i = i_{sc} = A_i \cdot i_c$  unde  $A_i$  este factorul de amplificare în curent al sursei. În funcție de tipul sursei  $A_i = ct$ ;  $A_i(t)$ ;  $A_i(i_c)$  există surse liniare, parametrice sau neliniare.

Rezolvarea circuitelor care conțin surse comandate se face similar ca și circuitele cu surse independente numai că t.e.m. „e” și curentul de scurtcircuit „ $i_{sc}$ ” sunt funcții de parametrul de comandă și nu au valori constante sau forme de variație invariabile în timp. Pot fi socotite ca niște elemente parametrice active de circuit, parametrii de comandă  $u_c$  și  $i_c$  pot fi exteriori cu o lege de variație cunoscută sau pot fi o tensiune oarecare din interiorul circuitului sau un curent oarecare, deci sunt mărimi cunoscute implicit odată cu rezolvarea circuitului.

**6.3 Teoremele lui Kirchhoff****6.3.1 Prima teoremă a lui Kirchhoff ( T1K ) rezultă direct din legea**

conservării sarcinii ( $i_{\Sigma} = -\frac{dq_{\Sigma}}{dt}$ ) sau din

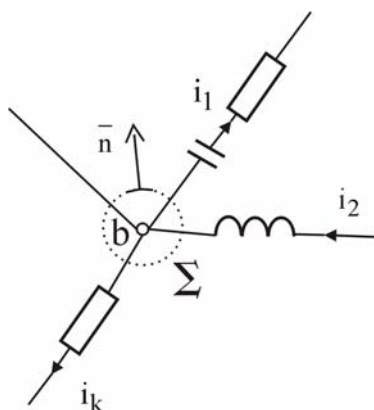


Fig. 6.10

teorema continuității liniilor de curent ( $i_{\Sigma} = 0$ ) aplicată unei suprafețe închise  $\Sigma$  care înconjoară nodul b (figura 6.10). În nodul b nu se poate acumula sarcină ( $q_{\Sigma} = 0$ ) iar  $i_{\Sigma}$  este suma algebrică a curenților tuturor laturilor ce converg prin suprafața  $\Sigma$  spre nodul b, T1K având în acest caz enunțul: „Suma algebrică a valorilor instantanee a curenților din laturile ce converg într-un nod de circuit este nulă”, respectiv  $i_{\Sigma} = 0$  sau:

$$\sum_{k \in b} i_k = 0 \quad (6.9)$$

suma din ( 6.9 ) se efectuează pentru toate laturile k care converg ( $\in$ ) în nodul b. În suma „algebrică” curenții care ies din nod se consideră (+) (ei coincid cu orientarea normalei exterioare la suprafața  $\Sigma$ ) iar cei care intră

sunt ( - ). Convenția nu este restrictivă, ecuația (6.9) fiind egală cu 0, oricând ea poate fi înmulțită cu (-1).

Expresia (6.9) a T1K este valabilă în regim cvasistaționar pentru orice fel de circuit: liniar, neliniar, parametric.

Transpusă în valori complexe, pentru regimul sinusoidal, T1K se va scrie:

$$\sum_{k \in b} I_k = 0 \quad (6.10)$$

Relația (6.10) transpusă într-o diagramă fazorială arată că poligonul format de către curenții ce concură într-un nod de circuit este întotdeauna un poligon închis.

Deoarece modulul unei sume nu este egal cu suma modulelor termenilor; relația (6.10) nu se poate scrie pentru valori efective (dealtfel o sumă de termeni pozitivi nu poate fi zero).

În circuitele de curent continuu fiecare curent din laturi are valoarea (+) sau (-) în funcție de orientarea laturii, deci T1K se va scrie:

$$\sum_{k \in b} I_k^{\pm} = 0 \quad (6.11)$$

Pentru o subrețea cu T1K se pot scrie ( $n_s - 1$ ) ecuații independente iar pentru un circuit mare format din  $s$  subrețele deci cu caracteristici topologice ( $l, n, s$ ) se pot scrie ( $n-s$ ) ecuații independente (câte noduri independente există).

**6.3.2 A doua teoremă a lui Kirchhoff (T2K)** este o consecință a legii inducției electromagnetice ( $e_{\Gamma} = -\frac{d\Phi_{S_{\Gamma}}}{dt}$ ) aplicată pentru o curbă

închisă  $\Gamma$  luată de-lungul unui ochi de circuit  $p$ , astfel încât pentru fiecare latură ea să treacă prin *suprafața tensiunilor la borne* (suprafețe alese astfel încât ele să înconjoare fiecare latură la distanță de aceasta și să nu fie străbătute de liniile vreunui flux magnetic). Aceste suprafețe intersectate cu planul circuitului devin *liniile tensiunii la borne*.

Dacă curba închisă  $\Gamma$  trece doar prin liniile tensiunilor la borne ( $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ ) dincolo de curbă nu trece nici o linie de flux magnetic, deci  $\Phi_{S_{\Gamma}} = 0$  și atunci t.e.m. indusă  $e_{\Gamma} = 0$ .

Dar în lungul curbei  $\Gamma$  t.e.m.  $e_{\Gamma}$  este suma algebrică a acestor tensiuni:  $e_{\Gamma} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots - u_n = 0$ , respectiv:

$$\sum_{k \in p} u_k = 0 \quad (6.12)$$

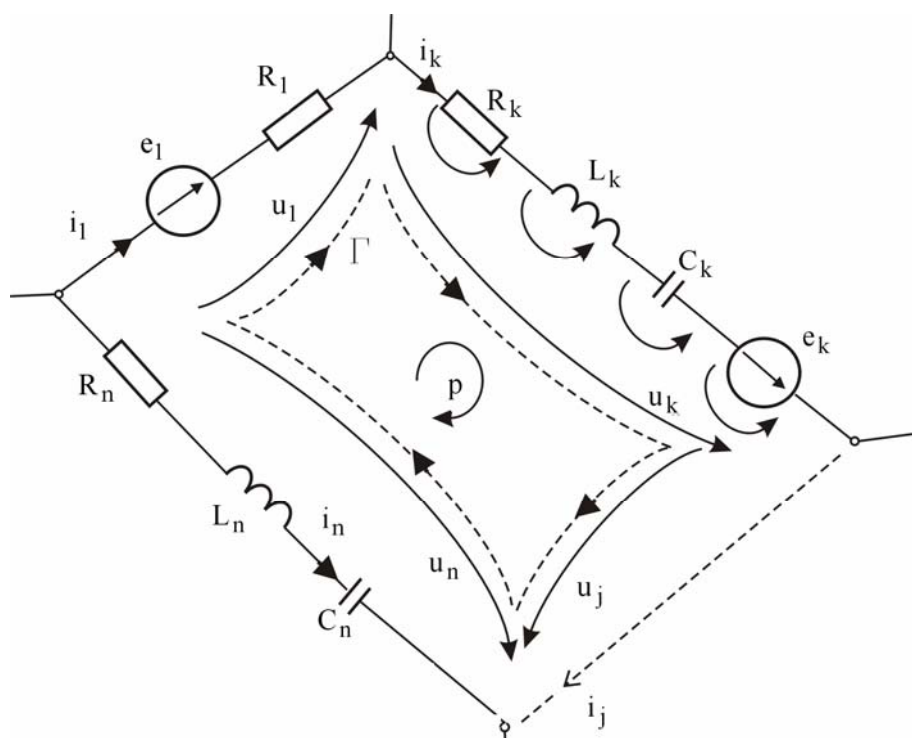


Fig. 6.11

Teorema a doua a lui Kirchhoff (T2K) se enunță astfel: „Suma algebrică a valorilor instantanee ale tensiunilor la bornele laturilor care alcătuiesc ochiul p este nulă”.

Fiecare tensiune la bornele unei laturi se asociază în același sens cu intensitatea curentului din latura respectivă (un sens unic de referință pentru toate mărimile  $i$ ,  $u$ ,  $e$  asociate aceleiași laturi). În acest caz „suma algebrică” din (6.12) înseamnă că sunt (+) acele tensiuni al căror sens de referință coincide cu sensul de parcurgere al ochiului p, respectiv cu sensul de integrare pe curba  $\Gamma$  și cu (-) pentru acele laturi la care sensurile sunt opuse (exemplu: latura „n” din figura 6.11).

În suma (6.12) intervin doar acele laturi k care compun ochiul p. Aplicăm teorema lui Joubert pentru ecuația de tensiuni a laturii k:

$$u_k = u_{R_k} + \frac{d\Phi_k}{dt} + u_{C_k} - e_k \quad (6.13)$$

unde,  $u_{R_k}$ ,  $\frac{d\Phi_k}{dt}$ ,  $u_{C_k}$  și  $-e_k$  sunt tensiunile la borne pentru toate elementele care compun latura k (figura 6.11). Înlocuind în (6.12) și separând termenii se obține:

$$\sum_{k \in p} \left( u_{R_k} + \frac{d\Phi_k}{dt} + u_{C_k} \right) = \sum_{k \in p} e_k \quad (6.14)$$

Sub forma (6.14) T2K se enunță prin: „Suma algebrică a valorilor instantanee a t.e.m. ale surselor din laturile unui ochi de circuit este egală cu suma algebrică a tensiunilor instantanee pentru toate elementele de circuit din acel ochi.”.

Forma (6.14) a T2K este valabilă pentru orice fel de circuit: liniar, neliniar, parametric (un circuit este, de exemplu, neliniar dacă cel puțin un element din schemă este neliniar).

În particular, pentru *circuite liniare*, tensiunile pe elementele de circuit se pot exprima sub forma:

$$\begin{aligned} u_{R_k} &= R_k i_k; \quad u_{C_k} = \frac{q_k}{C_k} = \frac{1}{C_k} \int i_k dt; \quad \Phi_k = L_{kk} i_k + \sum_{j=1}^m L_{kj} i_j \rightarrow \\ \rightarrow u_{L_k} &= \frac{d\Phi_k}{dt} = L_{kk} \frac{di_k}{dt} + \sum_{j=1}^m L_{kj} \frac{di_j}{dt} \end{aligned} \quad (6.15)$$

unde  $L_{kk} > 0$  este inductivitatea proprie a laturii  $k$ ,  $L_{kj} < 0$  sau  $L_{kj} > 0$  este inductivitatea mutuală dintre latura  $k$  și  $j$ , semnul său depinde de sensul curenților  $i_k$  și  $i_j$  față de bornele polarizate (\*) ale celor două bobine. Numărul  $m$  este numărul de bobine cu care este cuplată bobina  $L_k$ .

Înlocuind (6.15) în (6.14), T2K se va scrie sub forma:

$$\sum_{k \in p} \left[ R_k i_k + L_k \frac{di_k}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt + \sum_{j=1}^m L_{kj} \frac{di_j}{dt} \right] = \sum_{k \in p} e_k \quad (6.16)$$

Relația (6.16) este expresia T2K în valori instantanee pentru un circuit liniar.

În această ecuație, termenii sunt (+) sau (-) după cum mărimile  $e_k$ ,  $i_k$  și  $L_{kj}$  au sensuri care se asociază (+) cu sensul de parcurgere a ochiului  $p$  sau (-) când au sensuri contrarii.

În *regim permanent sinusoidal*, expresia (6.12) a T2K se transpune în mărimi complexe sub forma:

$$\sum_{k \in p} \underline{U}_k = 0 \quad (6.17)$$

respectiv „suma algebrică a tensiunilor complexe de pe laturile unui circuit care aparține ochiului  $p$  este nulă”. Suma fiind nulă, în diagrama fazorială toate tensiunile de pe laturile unui ochi formează un poligon închis. Nici relația (6.17) nu este adevărată dacă se scrie cu valori efective.

Dacă transpunem în complex forma (6.16) se obține:

$$\sum_{k \in p} \left[ R_k \underline{I}_k + j\omega L_k \underline{I}_k + \frac{1}{j\omega C_k} \underline{I}_k + \sum_{j=1}^m j\omega L_{kj} \underline{I}_j \right] = \sum_{k \in p} \underline{E}_k \quad (6.18)$$

$$\text{Notăm: } \begin{cases} \underline{Z}_k = R_k + j \left( \omega L_k - \frac{1}{\omega C_k} \right) - \text{impedanța proprie a laturii } k \\ \underline{Z}_{kj} = j\omega L_{kj} - \text{impedanța mutuală dintre laturile } k \text{ și } j \end{cases} \quad (6.19)$$

Ecuația (6.18), cu aceste notații, va fi:

$$\sum_{k \in p} \left( \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{j=1}^m \underline{Z}_{kj} \underline{I}_j \right) = \sum_{k \in p} \underline{E}_k \quad (6.19)$$

care reprezintă T2K sub formă explicită în valori complexe.

Atunci când se aplică expresia (6.19) pentru un circuit oarecare se constată că fiecare impedanță mutuală  $\underline{Z}_{kj}$  dintre o latură a ochiului  $p$  și o latură exterioară (din alt ochi) apare o singură dată, în timp ce impedanța mutuală  $\underline{Z}_{kj}$  între două laturi  $k$  și  $j$  ce aparțin ambele ochiului  $p$ , va apare de două ori: o dată în termenul  $\underline{Z}_{kj} \underline{I}_j$  și o dată în termenul  $\underline{Z}_{jk} \underline{I}_k$ .

În circuite de curent continuu unde laturile conțin doar rezistențe  $R_k$  și surse cu t.e.m.  $E_k$ , T2K se reduce la forma:

$$\sum_{k \in p} R_k \underline{I}_k = \sum_{k \in p} \underline{E}_k \quad (6.20)$$

Comparând (6.20) valabilă în curent continuu cu relația (6.19), se constată că singura deosebire, de ordin formal, între aceste relații decurge din existența în complex a impedanțelor mutuale  $\underline{Z}_{kj}$ .

Cu T2K se pot scrie  $o = l - n + s$  ecuații independente, deci egal cu numărul ochiurilor independente din circuit. În total, cu cele două teoreme a lui Kirchhoff se pot scrie:  $(n - s) + (l - n + s) = l$  ecuații, deci numărul de ecuații este egal cu numărul de laturi din circuit (respectiv egal cu numărul de necunoscute, cei  $l$  curenți din fiecare latură).

Pentru a determina curenții din laturi cu TK, ecuațiile se scriu sub forma unui sistem algebric de  $l$  ecuații cu  $l$  necunoscute:

$$\begin{cases} \sum_{k \in b} \underline{I}_k = 0 & \text{pentru } b = \overline{1, n-s} \text{ ecuații} \\ \sum_{k \in p} \left[ \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{j=1}^m \underline{Z}_{kj} \underline{I}_j \right] = \sum_{k \in p} \underline{E}_k; & \text{pentru } p = \overline{1, o} \text{ ecuații} \end{cases} \quad (6.21)$$

### 6.3.3 Tensiunea electrică între două noduri de circuit

Dacă aplicăm T2K de-lungul ochiului  $p$  (figura 6.11) în valori instantanee, putem scrie:

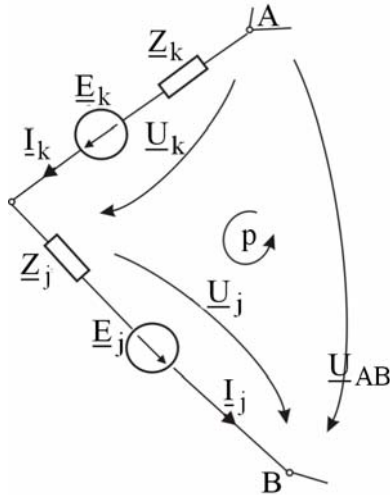


Fig. 6.12

$$u_k + u_j - u_{AB} = 0 \rightarrow u_{AB} = u_k + u_j$$

Dacă, în general, drumul de la A la B trece prin „ $m$ ” laturi de circuit, tensiunea între punctele A și B va fi:

$$u_{AB} = \sum_{\substack{k=1 \\ A \rightarrow B}}^m u_k \quad (6.22)$$

Tensiunea  $u_{AB}$  în regim cvasistaționar nu depinde de drumul de integrare între punctele A și B, deci o putem calcula sumând algebric toate tensiunile de pe traseu, de la A spre B prin orice succesiuni de laturi s-ar aplica (6.22).

În valori complexe:  $\underline{U}_k = \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{j=1}^m \underline{Z}_{kj} \underline{I}_j - \underline{E}_k$ , deci tensiunea între punctele A și B va fi:

$$\underline{U}_{AB} = \sum_{\substack{k=1 \\ A \rightarrow B}}^m \underline{U}_k = \sum_{\substack{k=1 \\ A \rightarrow B}}^m \left[ \underline{Z}_k \underline{I}_k + \sum_{j=1}^m \underline{Z}_{kj} \underline{I}_j - \underline{E}_k \right] \quad (6.23)$$

iar în circuite de curent continuu tensiunea între punctele A și B devine:

$$U_{AB} = \sum_{\substack{k=1 \\ A \rightarrow B}}^m (R_k I_k - E_k) \quad (6.24)$$

### 6.4 Teorema superpoziției

Conform acestei teoreme, curentul electric dintr-o latură a unui circuit liniar în care există mai multe surse, este suma algebrică a curenților produși prin acea latură de către fiecare sursă în parte, dacă ar acționa singură în circuit, celelalte surse fiind *pasivizate*.

A pasiviza o sursă înseamnă a o scoate din circuit iar în locul ei rămâne o impedanță egală cu impedanța internă a sursei ca în figura 6.13.

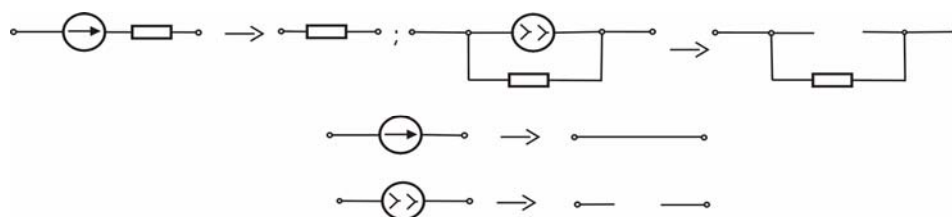


Fig. 6.13

Ecuatiile unui circuit scrise cu TK (6.21) reprezintă un sistem algebric liniar de  $l$  ecuații cu  $l$  necunoscute. Rezolvând acest sistem cu regula lui Cramer, curentul din latura  $j$  rezultă de forma:

$$\underline{I}_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (6.25)$$

iar dacă determinantul  $\Delta_j$  se dezvoltă după coloana  $j$  (cea care conține sursele aflate în membrul drept al sistemului (6.21)) și se ordonează termenii, se obține:

$$\underline{I}_j = \underline{Y}_{j1} \underline{E}_1 + \underline{Y}_{j2} \underline{E}_2 + \dots + \underline{Y}_{jk} \underline{E}_k + \dots + \underline{Y}_{jn} \underline{E}_n = \sum_{k=1}^l \underline{Y}_{jk} \underline{E}_k \quad (6.26)$$

Coeficientul  $\underline{Y}_{jk} = \underline{Y}_{kj}$  reprezintă *admitanța de transfer* de la latura  $k$  la  $j$ , iar  $\underline{I}_{jk} = \underline{Y}_{jk} \underline{E}_k$  este curentul din latura  $j$  produs de sursa aflată în latura  $k$  ( $\underline{E}_k$ ) atunci când toate celelalte surse din circuit au fost pasivizate. Deci:

$$\underline{I}_{jk} = \underline{I}_j \left| \begin{array}{l} \underline{E}_j = 0 \\ \underline{E}_k \neq 0, k \neq j \end{array} \right. \quad (6.27)$$

Conform cu relația (6.26) curentul din latura  $j$  este:  $\underline{I}_j = \sum_{k=1}^l \underline{I}_{jk}$ , respectiv „curentul din latura  $j$  este suma algebrică a curenților transferați în latura  $j$  de către toate sursele din circuit”.

Bazat pe teorema superpoziției se poate concepe un algoritm de rezolvare a circuitelor electrice liniare.

- Dacă toate cele  $l$  laturi ale unui circuit liniar sunt active, se descompune circuitul în  $l$  circuite în care acționează numai câte o sursă (în general, în atâtea circuite câte surse sunt în circuitul inițial).

- Se determină curenții din toate aceste circuite. În circuite cu o singură sursă, curenții se pot calcula fără a scrie sisteme de ecuații; se aplică succesiv T2K și T1K pe ochiuri respectiv pe noduri de circuit, începând cu latura care conține sursa, astfel încât în fiecare ecuație să nu intervină decât o singură necunoscută (fiecare ecuație cum se scrie se și rezolvă).
- Față de un sens de referință adoptat pentru fiecare latură din circuitul inițial, se compun curenții din laturile analoage ale subcircuitelor.
- În circuite de curent continuu teorema superpoziție înseamnă:

$$I_j = \sum_{k=1}^l I_{jk}, \text{ unde } I_{jk} = G_{jk} E_k \text{ iar } G_{jk} \text{ este conductanța de transfer.}$$

**Aplicație:** Circuitul din figura 6.14 – a conține două surse, deci îl descompunem în două subcircuite fig. 6.14 – b și fig. 6.14 – c în care acționează câte o singură sursă. Se determină curenții  $I'_1, I'_2 \dots$  și  $I''_1, I''_2 \dots$  din cele două subcircuite și apoi curenții din circuitul inițial se obțin prin superpoziție.

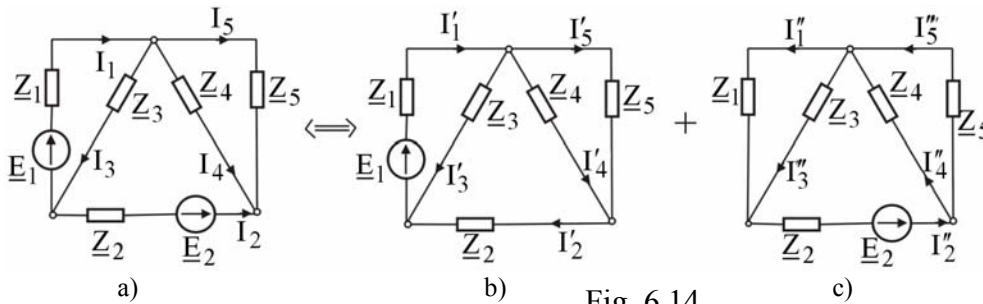


Fig. 6.14

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I'_1 - I''_1 \\
 I_2 &= -I'_2 + I''_2 \\
 I_3 &= I'_3 + I''_3 \\
 I_4 &= I'_4 - I''_4 \\
 I_5 &= I'_5 - I''_5
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 I'_1 &= \frac{E_1}{Z_1 + \frac{Z_3(Z_2 + Z_{45})}{Z_3 + Z_2 + Z_{45}}} \\
 Z_1 I'_1 + Z_3 I'_3 &= E_1 \rightarrow I'_3 \\
 I'_2 &= I'_1 - I'_3 \\
 Z_4 I'_4 + Z_2 I'_2 - Z_3 I'_3 &= 0 \rightarrow I'_4 \\
 I'_5 &= I'_2 - I'_4
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 I''_2 &= \frac{E_2}{Z_2 + Z_{13} + Z_{45}} \\
 I''_1 &= I''_2 \frac{Z_3}{Z_3 + Z_4} \\
 I''_4 &= I''_2 \frac{Z_5}{Z_{35} + Z_5} \\
 I''_3 &= I''_2 - I''_4 \\
 I''_5 &= I''_2 - I''_4
 \end{aligned}$$



### 6.5 Rezolvarea circuitelor liniare în regim permanent nesinusoidal

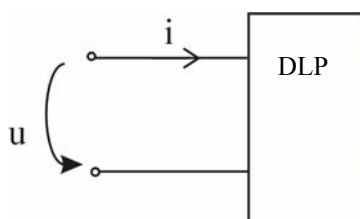


Fig. 6.15

Presupunem un dipol liniar și pasiv la bornele căruia se aplică o *tensiune periodică nesinusoidală* cu un anumit conținut de armonici:

$$u = \sum_{k=1}^n \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \gamma_k) \quad (6.28)$$

iar impedanța dipolului față de armonica fundamentală este:  $\underline{Z} = R + jX$ .

Dipolul fiind liniar, expresia  $i$  a curentului absorbit se calculează cu teorema superpoziției: nu se aplică toată tensiunea  $u$  la bornele dipolului ci o aplicăm pe rând, armonică cu armonică și determinăm fiecare armonică de curent absorbită iar valoarea instantanee a curentului rezultat va fi suma armonicilor de curent calculate separat.

Răspunsul dipolului la armonica  $u_k(k\omega)$  va fi armonică de ordin  $k$  a curentului:

$$i_k = \sqrt{2} \frac{U_k}{Z_k} \sin(k\omega t + \gamma_k - \varphi_k), \text{ unde:}$$

$$Z_k = Z(k\omega) = \sqrt{R_k^2 + X^2(k\omega)} \text{ și } \varphi_k = \arctg \frac{X(k\omega)}{R_k} \quad (6.29)$$

La o bobină care are pe fundamentală reactanța  $X_L = \omega L$ , pe armonica  $k$  va avea reactanța  $X_k = X(k\omega) = k X_L$  iar un condensator cu  $X_c = \frac{1}{\omega C}$  va avea  $X_c(k\omega) = \frac{1}{k\omega C} = \frac{X_c}{k}$ . Calculul se poate face și în valori complexe pe fiecare armonică în parte:

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k} = \frac{U_k \angle \gamma_k}{Z(k\omega) \angle \varphi(k\omega)} = \frac{U_k}{Z_k} \angle \gamma_k - \varphi_k \quad (6.30)$$

Întrucât fiecare armonică  $\underline{I}_k$  a fost calculată în complex pentru un regim sinusoidal de altă frecvență ( $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, k\omega$ ) superpoziția nu se poate face în valori complexe. Având valorile complexe  $\underline{I}_k$  (6.30) se revine

în valori instantanee  $i_k$  și superpoziția se va face în instantaneu:  $i = \sum_{k=1}^n i_k$ .

Și mai general, dacă într-un circuit liniar acționează *mai multe surse cu t.e.m.. nesinusoidale* (figura 6.16), regimul permanent al curenților din laturi se poate determina tot cu teorema superpoziției, dar după alt algoritm:

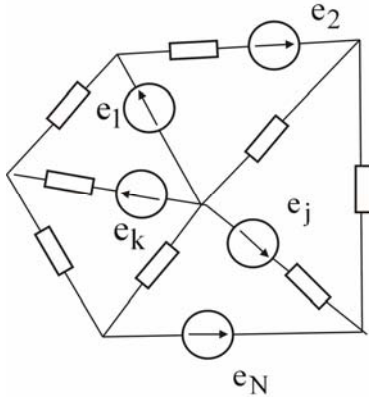


Fig. 6.16

- Fiecare t.e.m. se descompune în armonicele sale componente:
 
$$\begin{cases} e_1 = \sum_k \sqrt{2} E_{1k} \sin(k\omega t + \gamma_{e_{1k}}) \\ e_2 = \dots \\ \vdots \\ e_N = \sum_k \sqrt{2} E_{Nk} \sin(k\omega t + \gamma_{e_{Nk}}) \end{cases} \quad (6.31)$$

- Reținem de la fiecare sursă armonică fundamental ( $\omega$ ) și avem un circuit cu  $l$  laturi funcționând în regim sinusoidal de pulsație  $\omega$  (în care acționează  $N$  surse). Circuitul poate fi rezolvat, de exemplu cu TK, în valori complexe și obținem armonică fundamentală a curentului din fiecare latură:  $I_1^{(\omega)}, I_2^{(\omega)}, \dots, I_l^{(\omega)}$ .
- Reținem armonică a doua de la fiecare din cele  $N$  surse (sau doar de la cele care au armonică  $2\omega$ ). Scriem ecuațiile în complex pe armonică  $2\omega$  le rezolvăm și obținem armonică a doua sub forma:  $I_1^{(2\omega)}, I_2^{(2\omega)}, \dots, I_l^{(2\omega)}$ . La calculul pe  $2\omega$  ținem seamă că reactanțele din circuit s-au modificat:  $X_L(2\omega) = 2X_L$ ;  $X_C(2\omega) = \frac{X_C}{2}$  etc.
- Continuăm cu celelalte armonici ale surselor până la cea mai mare armonică luată în seamă, să zicem ( $n\omega$ ) și am obținut armonicele de ordinul  $n$  ale tuturor curenților:  $I_1^{(n\omega)}, I_2^{(n\omega)}, \dots, I_l^{(n\omega)}$ .
- Dacă ar acționa cele  $N$  surse cu toate armonicele lor deodată (așa cum este în realitate), prin laturi am avea curenții:  $i_1, i_2, \dots, i_l$ . Superpoziția nu se poate face în valori complexe, curentul  $i_1$  (din prima latură) nefiind sinusoidal el nici nu are reprezentare în complex. Fiecare dintre armonicele de curenți obținute sub formă complexă, se transpune în valori instantanee și apoi se face superpoziția sub forma:

$$\begin{cases} i_1 = i_1(\omega) + i_1(2\omega) + \dots + i_1(n\omega) \\ i_2 = i_2(\omega) + i_2(2\omega) + \dots + i_2(n\omega) \\ \vdots \\ i_l = i_l(\omega) + i_l(2\omega) + \dots + i_l(n\omega) \end{cases} \quad (6.32)$$