

### 6.6. Teorema generatorului echivalent de tensiune (teorema lui Thévenin)

“Curentul  $\underline{I}_{AB}$  debitat de un circuit activ și liniar printr-o impedanță  $\underline{Z}$  conectată la bornele sale A-B, este egal cu raportul dintre tensiunea  $\underline{U}_{AB_0}$  la mersul în gol (latura cu  $\underline{Z}$  întreruptă) și suma dintre impedanța  $\underline{Z}$  și impedanța internă a circuitului pasivizat la mersul în gol  $\underline{Z}_{AB_0}$ ”.

$$\underline{I}_{AB} = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}} \quad (6.33)$$

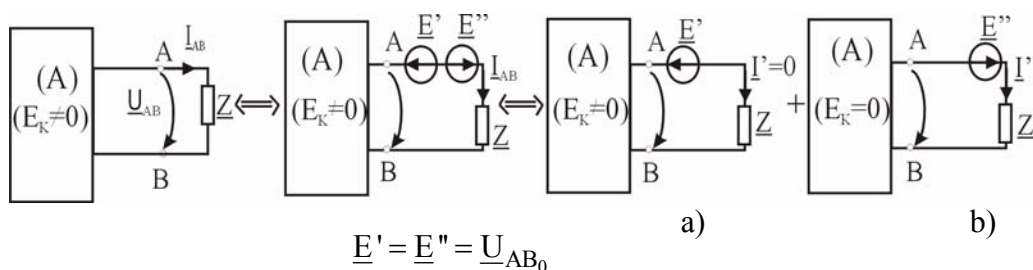


Fig 6.17

Demonstrarea teoremei se bazează pe teorema superpoziției. În latura cu  $\underline{Z}$  din cele 2 circuite (a) și (b) din figura 6.17 în care am descompus circuitul inițial se introduc două surse identice  $\underline{E}' = \underline{E}'' = \underline{U}_{AB_0}$  dar acționând în sensuri opuse. În schema (a) curentul este nul ( $\underline{I}' = 0$ ), sursa  $\underline{E}'$  compensând efectul tuturor surselor interioare din rețeaua activă (A), deci este ca o funcționare în gol între punctele A și B. În schema (b) acționează doar sursa  $\underline{E}'' = \underline{U}_{AB_0}$  care produce curentul  $\underline{I}''$  prin impedanța  $\underline{Z}$  legată în serie cu impedanța  $\underline{Z}_{AB_0}$  a rețelei pasivizate (P):

$$\underline{I}'' = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}}$$

Conform teoremei superpoziției  $\underline{I}_{AB} = \underline{I}' + \underline{I}'' = \underline{I}'' = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}}$

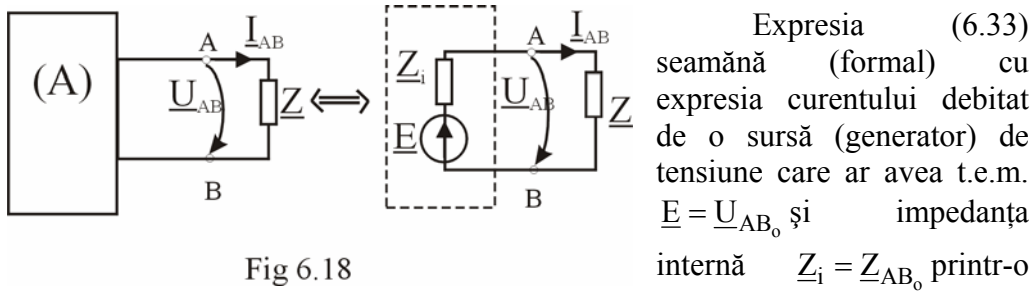


Fig 6.18

impedanță externă  $\underline{Z}$ . Astfel o rețea activă (A) poate fi înlocuită printr-un generator de tensiune echivalent (figura 6.18) având  $\underline{E} = \underline{U}_{AB_0}$  și  $\underline{Z}_i = \underline{Z}_{AB_0}$ , de unde și numele teoremei.

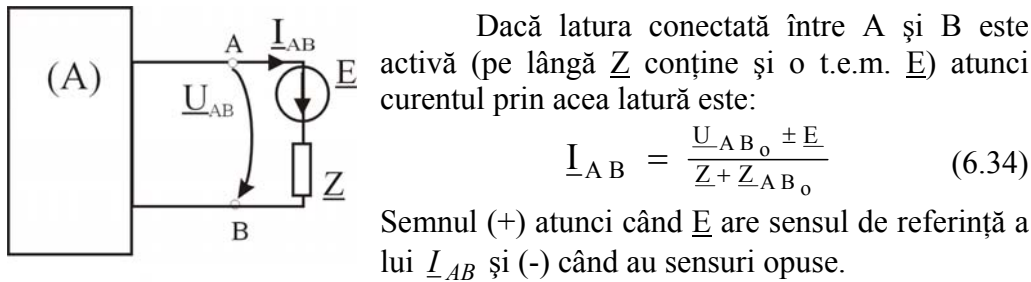


Fig 6.19

Calculul tensiunii  $\underline{U}_{AB_0}$  se face considerând că latura AB lipsește (deci circuitul are cu o latură mai puțin) iar calculul lui  $\underline{Z}_{AB_0}$  se face considerând că circuitul merge în gol ( $\underline{Z}$  lipsește) și că rețeaua activă a fost pasivizată. Elementele  $\underline{U}_{AB_0}$  și  $\underline{Z}_{AB_0}$  pot fi determinate și experimental, prin măsurare, pentru un sistem care este realizat fizic.

## 6.7 Teorema generatorului echivalent de curent (teorema lui Norton)

“Tensiunea  $\underline{U}_{AB}$  produsă la bornele unei impedanțe  $\underline{Z}$  legată între bornele A și B ale unei rețele active și liniare, este egală cu raportul dintre curentul de scurtcircuit  $\underline{I}_{AB_{sc}}$  al rețelei, dacă ar fi scurtcircuitate bornele A și B, și suma dintre admitanța externă  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$  și admitanța internă a rețelei pasivizate la mersul în gol  $\underline{Y}_{AB_0} = 1/\underline{Z}_{AB_0}$ ”.

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{I}_{AB_{sc}}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB_0}} \quad (6.35)$$

Demonstrarea teoremei o putem face plecând de la teorema superpoziției sau mai simplu pornind de la teorema lui Thévenin. Curentul ce se obține prin scurtcircuitarea bornelor A și B ( $\underline{Z}=0$ ) rezultă din (6.33):

$$\underline{I}_{AB_{sc}} = (\underline{I}_{AB})_{\underline{Z}=0} = \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z}_{AB_0}} = \underline{Y}_{AB_0} \cdot \underline{U}_{AB_0}$$

La mersul în sarcină ( $\underline{Z} \neq 0$ ) între punctele A și B (figura 6.17), tensiunea între aceste puncte va fi:

$$\underline{U}_{AB} = \underline{Z} \cdot \underline{I}_{AB} = \underline{Z} \cdot \frac{\underline{U}_{AB_0}}{\underline{Z} + \underline{Z}_{AB_0}} = \frac{\underline{I}_{AB_{sc}}}{\underline{Y} + \underline{Y}_{AB_0}} \quad (6.36)$$

după ce am simplificat fracția cu  $(\underline{Z} \cdot \underline{Z}_{AB_0})$ . Bazat pe expresia (6.35) a

teoremei lui Norton, o rețea activă (A), ca în figura 6.20, se poate înlocui în

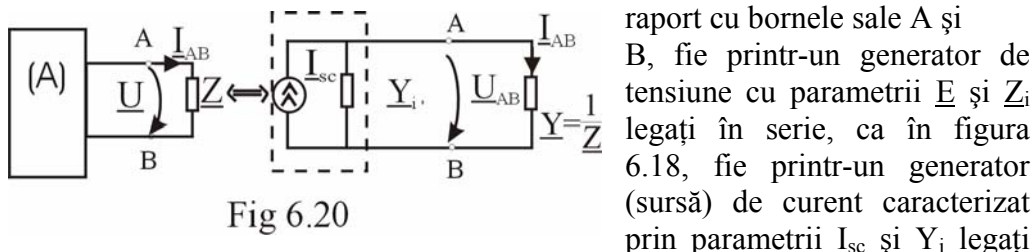


Fig 6.20

raport cu bornele sale A și B, fie printr-un generator de tensiune cu parametrii  $\underline{U}$  și  $\underline{Z}_i$  legați în serie, ca în figura 6.18, fie printr-un generator (sursă) de curent caracterizat prin parametrii  $\underline{I}_{sc}$  și  $\underline{Y}_i$  legați în paralel, ca în figura 6.20. Generatorul echivalent de curent al rețelei active (A), conform relației (6.35), este o sursă de curent având ( $\underline{I}_{sc} = \underline{I}_{AB_{sc}}$ ) și admitanța internă  $\underline{Y}_i = \underline{Y}_{AB_0}$ .

*Observație:* Teorema lui Thévenin permite să calculăm un singur curent dintr-un circuit  $\underline{I}_{AB}$  (sau teorema lui Norton permite să calculăm o singură tensiune  $\underline{U}_{AB}$ ), ceea ce face să se afirme că cele două teoreme sunt *metode de analiză cu răspuns pe o singură latură* (nu determinăm  $l$  curenți sau  $l$  tensiuni prin sisteme de ecuații).

Determinarea (sau verificarea unor valori) lui  $\underline{U}_{AB_0}$  și  $\underline{I}_{AB_{sc}}$  nu trebuie să se facă prin scrierea unor sisteme de  $(l-1)$  ecuații. A determina pe  $\underline{U}_{AB_0}$  (sau pe  $\underline{I}_{AB_{sc}}$ ) este o problemă în sine care se soluționează altfel decât scriind ecuații pentru circuitul cu o latură în minus. Ele fie se determină (la mersul în gol între A și B sau la mersul în scurt între cele două borne) prin transformări simple de circuit, prin scheme echivalente care nu implică rezolvări de sisteme de ecuații, fie prin măsurări experimentale. Oricum cele două teoreme permit să calculăm  $\underline{I}_{AB}$  (sau  $\underline{U}_{AB}$ ) pentru circuite care nu au o complexitate foarte mare.

## 6.8 Teorema transferului maxim de putere activă pe la borne

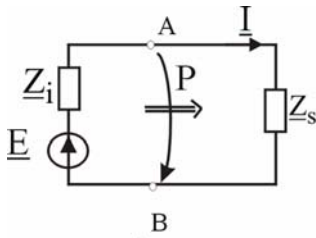


Fig 6.21

Considerăm un generator având t.e.m.  $\underline{E}$  și impedanța internă  $\underline{Z}_i = R_i + jX_i = Z_i \angle \varphi_i$  care alimentează pe la bornele A, B (figura 6.21) un receptor având impedanța de sarcină  $\underline{Z}_s = R_s + jX_s = Z_s \angle \varphi_s$ .

Dorim să determinăm valoarea impedanței de sarcină  $\underline{Z}_s$  astfel încât ea să absoarbă de la sursă *maximum de putere activă*, respectiv sarcina  $\underline{Z}_s$  să funcționeze *adaptat* la sursă. Curentul debitat de sursă are valoarea:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_i + \underline{Z}_s} \quad (6.37)$$

iar puterea activă absorbită de receptor ( și consumată pe rezistența  $R_s$ ) este :

$$P = R_s I^2 = R_s \frac{E^2}{|\underline{Z}_i + \underline{Z}_s|^2} = E^2 \frac{R_s}{(R_s + R_i)^2 + (X_s + X_i)^2} = P(R_s, X_s) \quad (6.38)$$

Variabilele independente în raport cu care se caută maximul sunt elementele receptorului ( $R_s, X_s$ ), valorile care asigură  $P_{\max}$  rezultă din anularea derivatelor parțiale ale funcției  $P(R_s, X_s)$  din (6.38).

La  $R_s = \text{ct}$  și  $X_s = \text{variabil}$ , maximul local al lui  $P$  se obține pentru minimul numitorului, respectiv cum  $(X_s + X_i)^2 \geq 0$ , pentru anularea sa, adică pentru:

$$X_s = -X_i \quad (6.39)$$

Puterea transferată sarcinii pe la bornele A-B în acest caz este:

$$P|_{X_s = -X_i} = E^2 \frac{R_s}{(R_s + R_i)^2} \quad (6.40)$$

Maximul acesteia, la variația lui  $R_s$ , se obține acolo unde se anulează derivata:

$$\frac{\partial P}{\partial R_s} = E^2 \frac{(R_s + R_i)^2 - 2(R_s + R_i)R_s}{(R_s + R_i)^4} = E^2 \frac{R_i - R_s}{(R_s + R_i)^3} = 0 \rightarrow R_s = R_i \quad (6.41)$$

Ținând seama de (6.39) și (6.41), puterea transferată sarcinii este maximă dacă este îndeplinită condiția:

$$\begin{cases} R_s = R_i \\ X_s = -X_i \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} Z_s = Z_i \\ \varphi_s = -\varphi_i \end{cases} \leftrightarrow \underline{Z}_s = \underline{Z}_i^* \quad (6.42)$$

respectiv impedanța de sarcină să fie egală cu complex-conjugata impedanței interne a sursei. Dacă este îndeplinită *condiția de adaptare* a sarcinii la sursă (6.42), puterea activă transferată receptorului pe la bornele A-B este:

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_i} \quad (6.43)$$

iar puterea produsă de generator în aceste condiții (de adaptare) este :

$$P_{g\max} = (R_i + R_s) I^2 = 2P_{\max} \quad (6.44)$$

Randamentul electric al schemei din figura 6.21 este:

$$\eta = \frac{P_{\text{util}}}{P_{\text{generat}}} = \frac{P_{\max}}{P_{g\max}} = \frac{R_s}{R_s + R_i} = 0,5 \Big|_{\underline{Z}_s = \underline{Z}_i^*} \quad (6.45)$$

*Observație:* Prin notația  $P_{g\max}$  a nu se înțelege că sursa produce maxim de putere (aceasta se întâmplă când  $I_{\max}$ , respectiv este scurtcircuitată), ci puterea produsă de sursă când ajunge maxim la receptor.

În tehnica curenților tari, unde se cer randamente cât mai mari, apropiate de 1, se lucrează cu  $R_i \ll R_s$ , deci departe de condiția de adaptare. În tehnica curenților slabi (comunicații, transmisii de date, etc.), unde aspectul energetic al problemei (randamentul schemei) este un aspect secundar (sau chiar nu se pune problema sa) se merge pe linia adaptării unui receptor la sursă sub forma (6.42). Când într-un lanț de transmisie a datelor sunt legate între ele mai multe blocuri funcționale, fiecare bloc din stânga este *bloc sursă* pentru cel din dreapta sa *bloc receptor* și se încearcă adaptarea lor.

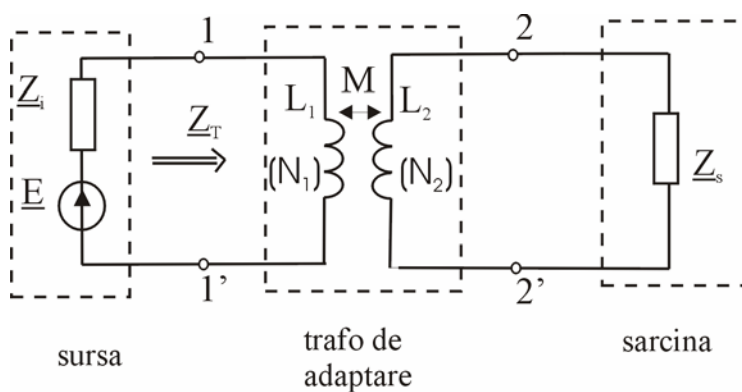


Fig 6.22

În practică, satisfacerea condiției (6.42) numită *adaptarea dintre sarcină și sursă* se realizează intercalând între ele un *circuit de adaptare*. Uneori, între sursă și receptor se intercalează un *transformator de adaptare* funcționând

cât mai aproape de un transformator ideal (el este și un element care realizează *separare galvanică* între sursă și receptor); prin alegerea *raportului de transformare* se realizează adaptarea (fig. 6.22).

La un *transformator ideal* se neglijează rezistențele înfășurărilor primare și secundare ( $r_1=r_2=0$ ) se neglijează dispersia magnetică dintre cele două înfășurări ( $M^2 = L_1 \cdot L_2$ ) iar inductivitățile celor două bobine scrise în funcție de numărul de spire ( $N_1$  și  $N_2$ ) și permeanța magnetică a miezului ( $\Lambda_m$ ) sunt:

$$L_1 = N_1^2 \Lambda_m \text{ și } L_2 = N_2^2 \Lambda_m$$

Raportul de transformare al transformatorului este:

$$k = \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \quad (6.46)$$

Impedanța de intrare a transformatorului (în raport cu bornele 1-1') este:

$$\underline{Z}_T = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + \underline{Z}_s} = \frac{1}{j\omega L_2} \left[ j\omega L_1 \underline{Z}_s + \omega^2 (M^2 - L_1 L_2) \right] = \frac{L_1}{L_2} \underline{Z}_s = \frac{N_1^2}{N_2^2} \underline{Z}_s = k^2 \underline{Z}_s \quad (6.47)$$

unde am ținut seama că reactanța secundarului ( $\omega L_2$ ) este foarte mare în raport cu impedanța de sarcină ( $\underline{Z}_s$ ) și în sumă (la numitor)  $\underline{Z}_s$  se poate neglija.

Cum  $\underline{Z}_T = k^2 \underline{Z}_s$  înseamnă că prin transformator (trafo) de adaptare se poate modifica numai modulul lui  $\underline{Z}_s$  în vederea adaptării, faza să rămânând constantă. Să determinăm în cazul unei adaptări de modul ( $\underline{Z}_s = \text{variabil}$  și  $\varphi_s = \text{constant}$ ) care vor fi condițiile de adaptare.

$$P = E^2 \frac{R_s}{|\underline{Z}_s - \underline{Z}_i|^2} = E^2 \frac{Z_s \cos \varphi_s}{Z_s^2 + Z_i^2 + 2Z_s Z_i \cos(\varphi_s - \varphi_i)} \quad (: Z_s = E^2 \frac{\cos \varphi_s}{Z_s + \frac{Z_i^2}{Z_s} + 2Z_i \cos(\varphi_s - \varphi_i)}) \quad (6.48)$$

La variația modulului  $Z_s$ , puterea  $P$  va avea un maxim dacă:

$$\frac{\partial P}{\partial Z_s} = \frac{\left(1 - \frac{Z_i^2}{Z_s^2}\right) E^2 \cos \varphi_s}{\left[Z_s + \frac{Z_i^2}{Z_s} + 2Z_i \cos(\varphi_s - \varphi_i)\right]^2} = 0 \rightarrow Z_s = Z_i \quad (6.49)$$

Dacă sursa este de curent continuu și sarcina este o rezistență  $R_s$  (în curent continuu nu există reactanțe)

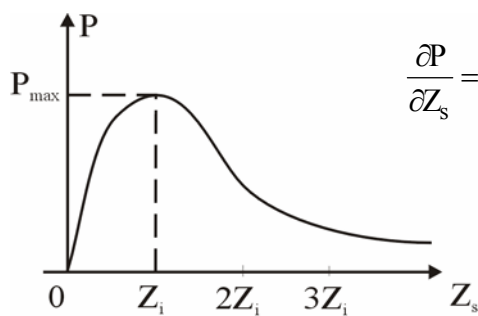


Fig 6.23

condiția de adaptare (6.42) devine:  $R_s = R_i$ , randamentul transferului de putere este 0,5 respectiv pe rezistența de sarcină  $R_s$  și pe rezistența internă a sursei  $R_i$  se consumă aceeași putere. Puterea transferată de sursă pe la borne  $P(6.48)$  este nulă pentru  $Z_s=0$  (mers în scurtcircuit a sursei) și pentru  $Z_s=\infty$  (mersul în gol al sursei). Între cele două valori, pentru  $Z_s = Z_i$ , puterea  $P$  va admite un maxim (fig. 6.23). O dependență similară cu puterea absorbită în curent continuu  $P(R_s)$ , dacă  $R_s$  este variabila și-n acest caz

$$P_{\max} = \frac{E^2}{4R_i}$$

Pentru  $Z_s$  variabil, maximul de putere este:  $P_{\max} = E^2 \frac{\cos \varphi_s}{2Z_i (1 + \cos(\varphi_s - \varphi_i))}$  (6.50)

## 6.9. Teoremele conservării puterilor

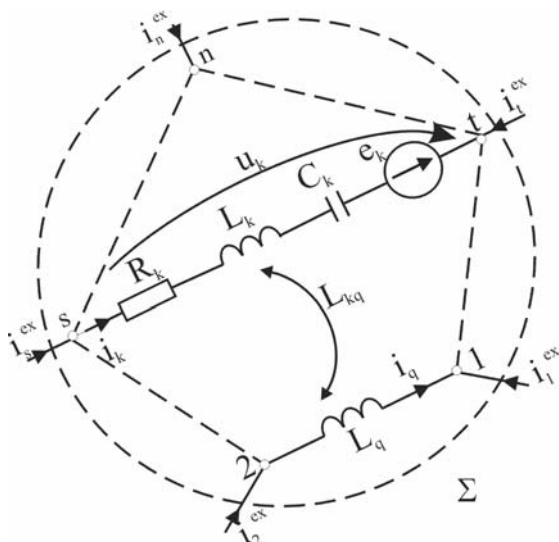


Fig 6.24

Considerăm o rețea electrică cu  $l$  laturi și  $n$  noduri, la care toate cele  $n$  noduri ale sale sunt legate electric cu exteriorul, spre rețea sunt injectați din circuitul exterior (din care face parte rețeaua considerată) curenții

$i_1^{\text{ex}}, \dots, i_n^{\text{ex}}$ . Rețeaua comunică cu exteriorul prin cei  $n$  poli, deci ea este un *multipol*. Cei  $n$  poli se află la potențialele  $v_1, v_2, \dots, v_s, \dots, v_n$  și prin ei sunt injectați curenții  $i_1^{\text{ex}}, i_2^{\text{ex}}, \dots, i_s^{\text{ex}}, \dots, i_n^{\text{ex}}$ . Puterea instantanee injectată prin cei  $n$  poli de către circuitul exterior

este:

$$p_b = \sum_{s=1}^n v_s \cdot i_s^{\text{ex}} \quad (6.51)$$

Ea se transmite de fapt, prin câmpul electromagnetic ce se creează în jurul firelor de legătură cu exteriorul (polii) dar se exprimă în limbaj de circuit sub forma(6.51).

Puterea instantanee consumată (absorbită) de latura interioară  $k$  este  $p_k = u_k \cdot i_k$ , iar puterea absorbită de către toate laturile interioare este:

$$p_{\text{cons}} = \sum_{k=1}^n u_k \cdot i_k \quad (6.52)$$

Un bilanț al puterilor instantanee ar însemna că toată puterea care se absoarbe din exterior pe la borne (6.51) să fie egală cu cea consumată pe laturile interioare ale circuitului(6.52).

$$p_b = \sum_{s=1}^n v_s \cdot i_s^{\text{ex}} = p_{\text{cons}} = \sum_{k=1}^n u_k \cdot i_k \quad (6.53)$$

Relația (6.53) reprezintă *teorema conservării puterilor instantanee*, respectiv “suma puterilor instantanee primite din exterior prin cei  $n$  poli de acces este egală cu suma puterilor instantanee primite pe la borne de toate cele  $l$  laturi interioare”.

Exprimând tensiunea la bornele unei laturi sub forma:

$$u_k = u_{R_k} + u_{L_k} + u_{C_k} - e_k = R_k i_k + \sum_{q=1}^l L_{kq} \frac{di_q}{dt} + \frac{1}{C_k} \int i_k dt - e_k \quad (6.54)$$

și înlocuind în expresia (6.53) se obține:

$$\underbrace{\sum_{s=1}^n v_s i_s^{\text{ex}}}_{p_b} + \underbrace{\sum_{k=1}^l e_k i_k}_{p_g} = \underbrace{\sum_{k=1}^l R_k i_k^2}_{p_R} + \frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\sum_{k=1}^l \frac{q_k^2}{2C_k}}_{w_e} + \underbrace{\sum_{k=1}^l \sum_{q=1}^l \frac{1}{2} L_{kq} i_k i_q}_{w_m} \right] \quad (6.55)$$

$$p_b + p_g = p_R + \frac{d}{dt} (w_e + w_m) \quad (6.56)$$

Relațiile (6.55) și (6.56) reprezintă forma explicită a teornei de conservare a puterilor instantanee. În aceste relații s-a notat cu:

$p_b$ - puterea instantanee absorbită pe la borne din circuitul exterior;

$p_g$ - puterea instantanee generată de sursele interne de pe laturi;

$p_R$ - puterea instantanee consumată prin efect Joule pe rezistențele interne;

$p_x$ -puterea absorbită de laturile interne pentru a fi înmagazinată în câmpuri electrice și magnetice.



Forma (6.56) a teoremei arată că puterea instantanee absorbită din exterior prin cei  $n$  poli ( $p_b$ ) plus puterea generată de sursele interioare ( $p_g$ ) trebuie să acopere pierderile instantanee pe rezistențele interioare  $p_R$  și să contribuie la acumularea de energie în câmpurile electrice și magnetice interioare.

În particular, pentru *rețele izolate* față de exterior (fără borne de acces), curenții injectați în noduri vor fi  $i_s^{\text{ex}} = 0$ , respectiv în acest caz nu se absoarbe putere instantanee pe la borne ( $p_b=0$ ) iar teoremele (6.53) și (6.56) conduc la formele particulare:

$$\sum_{k=1}^l u_k i_k = 0 ; \quad p_g = p_R + \underbrace{\frac{d}{dt}(w_e + w_m)}_{p_x} \quad (6.57)$$

Prima formă arată că, asociind după aceeași convenție, de la receptoare, toate tensiunile la borne  $u_k$  cu intensitățile  $i_k$ , unele laturi vor fi receptoare de putere ( $u_k i_k > 0$ ) iar altele generatoare de putere ( $u_k i_k < 0$ ), pe ansamblul rețelei suma fiind nulă.

Pentru rețele izolate funcționând în curent continuu, teorema conservării puterilor devine:

$$\sum_{k=1}^l U_k I_k = 0 ; \quad P_G = P_R \leftrightarrow \sum_{k=1}^l E_k I_k = \sum_{k=1}^l R_k I_k^2 \quad (6.58)$$

respectiv întreaga putere produsă de sursele interne  $\left( P_G = \sum_{k=1}^l E_k I_k \right)$  se consumă pe rezistențele interioare sub formă de căldură  $\left( P_R = \sum_{k=1}^l R_k I_k^2 \right)$ .

În relațiile (6.53), (6.57) și (6.58) tensiunile la borne și curenții laturilor se presupun asociate între ele după aceeași convenție (de la receptoare).

Dacă rețeaua (multipolul) funcționează în regim permanent sinusoidal, deci mărimile pot fi reprezentate în complex, atunci puterea complexă absorbită din exterior prin cei  $n$  poli va fi de forma:

$$\underline{S}_b = \sum_{s=1}^n \underline{V}_s \left( \underline{I}_s^{\text{ex}} \right)^* \quad (6.59)$$

ea este asociată puterii instantanee  $p_b$ , dar nu este reprezentarea lui  $p_b$  în complex ( $p_b$  nu este mărime sinusoidală, deci nu are reprezentare în complex), așa cum, în general, la un dipol oarecare,  $\underline{S}$  nu este imaginea în complex a puterii instantanee  $p$ .

Potențialele nodurilor și curenții injectați se scriu în complex sub forma:

$$\underline{V}_s = V_s \angle \gamma_{v_s}; \underline{I}_s = I_s \angle \gamma_{i_s} \rightarrow \left( \underline{I}_s^{\text{ex}} \right)^* = I_s \angle -\gamma_{i_s}; \varphi_s = \gamma_{v_s} - \gamma_{i_s} \quad (6.60)$$

Cu aceste notații, puterea complexă absorbită pe la borne se poate scrie astfel:

$$\underline{S}_b = \sum_{s=1}^n \underline{V}_s \underline{I}_s^* = \sum_{s=1}^n \left( \underbrace{V_s I_s \cos \varphi_s}_{P_{bs}} + j \underbrace{V_s I_s \sin \varphi_s}_{Q_{bs}} \right) = \sum_{s=1}^n (P_{bs} + jQ_{bs}) = P_b + jQ_b \quad (6.61)$$

Teorema de conservare (6.53) transpusă în complex va fi:

$$\sum_{s=1}^n \underline{V}_s \left( \underline{I}_s^{\text{ex}} \right)^* = \sum_{k=1}^l \underline{U}_k \underline{I}_k^* \quad (6.62)$$

unde:  $\underline{U}_k = R_k \underline{I}_k + \sum_{q=1}^l j\omega L_{kq} \underline{I}_q + \frac{1}{j\omega C_k} \underline{I}_k - \underline{E}_k$  este tensiunea la bornele laturii

k. Amplificată cu  $\underline{I}_k^*$  și introdusă în (6.62) se obține:

$$\underbrace{\sum_{s=1}^n \underline{V}_s \left( \underline{I}_s^{\text{ex}} \right)^*}_{\underline{S}_b} + \underbrace{\sum_{k=1}^l \underline{E}_k \underline{I}_k^*}_{\underline{S}_g} = \underbrace{\sum_{k=1}^l R_k \underline{I}_k^2}_{P_R} + j \left[ \underbrace{\sum_{k=1}^l \sum_{q=1}^l \omega L_{kq} \underline{I}_q \underline{I}_k^*}_{Q_x} - \sum_{k=1}^l \frac{1}{\omega C_k} \underline{I}_k^2 \right] \quad (6.63)$$

unde  $\underline{S}_b$  este *puterea complexă absorbită* pe la borne și este de forma (6.61). iar ceilalți termeni din (6.63) se pot detalia sub forma:

$$\underline{S}_g = \sum_{k=1}^l \underline{E}_k \underline{I}_k^* = \sum_{k=1}^l E_k I_k \angle \gamma_{e_k} - \gamma_{i_k} = \sum_{k=1}^l E_k I_k \angle \varphi_k = \sum_{k=1}^l (P_{gk} + jQ_{gk}) = P_g + jQ_g \quad (6.64)$$

$\underline{S}_g$  este *puterea complexă generată* de toate sursele din interiorul circuitului.

$$P_R = \sum_{k=1}^l R_k \underline{I}_k^2 \geq 0 \quad (6.65)$$

$P_R$  este *puterea activă* transformată în căldură pe toate rezistențele interioare.

*Puterea reactivă*  $Q_x$  o putem rescrie separând din suma dublă termenii cu indici egali ( $k=q$ ) și observând că termenii rămași ( $k \neq q$ ) pot fi grupați doi câte doi, cei care au aceeași pereche de indici ( $L_{kq} = L_{qk}$ ). Mărimea

$X_{kq}^{\pm} = \omega L_{kq}^{\pm}$  este reactanța de cuplaj dintre laturile  $k$  și  $q$  iar  $X_k = \omega L_k - \frac{1}{\omega C_k}$

este reactanța proprie a laturii  $k$ . Dacă folosim expresia unei identități:

$$\sum_{k=1}^l \sum_{q=1}^l \omega L_{kq} I_q I_k^* = \sum_{k=1}^l \omega L_k I_k^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq q}}^l \sum_{q=1}^l \omega L_{kq} \underbrace{(I_k I_q^* + I_q I_k^*)}_{2I_k I_q \cos(\gamma_{ik} - \gamma_{iq})} \quad (6.65)$$

atunci puterea reactivă  $Q_x$  consumată pe laturile interioare se poate scrie sub forma:

$$Q_x = \sum_{k=1}^l X_k^{\pm} I_k^2 + \sum_{\substack{(k,q)=1 \\ k \neq q}}^l 2X_{kq}^{\pm} I_k I_q (\cos \varphi_{kq})^{\pm} \quad (6.67)$$

Prima sumă din expresia 6.67 reprezintă puterea reactivă consumată (+) sau produsă (-) de laturile interioare, în funcție de caracterul (inductiv sau capacitiv) al acestora, respectiv în funcție de semnul reactanței laturii  $k$  ( $\pm X_k$ ).

A doua sumă reprezintă puterea reactivă consumată (+) sau produsă (-) de reactanțele mutuale ( $X_{kq}$ ) dintre laturile interioare. Semnul (caracterul) fiecărei astfel de puteri depinde de semnul cuplajului ( $\pm X_{kq}$ ) dar și de semnul lui ( $\cos \varphi_{kq}$ ), după ce se evaluează în diagrama fazorială defazajul dintre curenții  $I_k$  și  $I_q$  ai laturilor între care există cuplaje. Deci, într-un circuit, nu numai condensatoarele și eventual sursele produc putere reactivă, ci în unele situații și cuplajele dintre bobine pot produce putere reactivă.

Cu notațiile făcute, expresia (6.63) se scrie sub formă compactă:

$$\underline{S}_b + \underline{S}_g = P_R + jQ_x = \underline{S}_{\text{cons}} \quad (6.68)$$

Expresiile (6.62), (6.63) și (6.68) reprezintă diferite modalități de scriere (compact, explicit) a *teoremei de conservare a puterilor complexe*, cu semnificația “Puterea complexă absorbită pe la borne  $\underline{S}_b$  plus cea produsă în interior  $\underline{S}_g$  trebuie să acopere consumul intern de putere complexă:  $\underline{S}_{\text{cons}} = P_R + jQ_x$ ”.

Dacă în expresia (6.63) separăm partea reală și cea imaginară a fiecărui termen se pot obține prin identificare două relații:

$$\begin{cases} P_b + P_g = P_R \\ \sum_{s=1}^n V_s I_s \cos \varphi_s + \sum_{k=1}^l E_k I_k \cos \varphi_k = \sum_{k=1}^l R_k I_k^2 \end{cases} \quad (6.69)$$

Expresiile (6.69) reprezintă *teorema de conservare a puterilor active* care spune că “puterea activă absorbită pe la borne din exterior  $P_b$  plus cea produsă de sursele interne  $P_g$  este egală cu suma puterilor active consumate pe laturile interne  $P_R$ ”.

Dacă în (6.63) identificăm părțile imaginare se obține :

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n V_s I_s \sin \varphi_s + \sum_{k=1}^l E_k I_k \sin \varphi_k = \sum_{k=1}^l X_k I_k^2 + \sum_{\substack{(k,q)=1 \\ k \neq q}}^l 2X_{kq} I_k I_q \cos \varphi_{kq} \\ Q_b + Q_g = Q_x \end{cases} \quad (6.70)$$

Expresiile (6.70) reprezintă *teorema de conservare a puterilor reactive*, care spune că “puterea reactivă absorbită pe la borne din exterior  $Q_b$  , plus puterea reactivă generată de sursele interne ( $Q_g$ ) este egală cu puterea reactivă  $Q_x$  consumată pe reactanțele interne proprii laturilor ( $X_k$ ) și pe reactanțele de cuplaj  $X_{kq}$ ”.

În particular, pentru circuite izolate :  $\underline{S}_b = 0 \rightarrow P_b=0, Q_b=0$  și puterea generată de sursele interne:  $\underline{S}_g = P_g + jQ_g$  trebuie să acopere consumul intern al circuitului : ( $\underline{S}_{\text{cons}} = P_R + jQ_X$ ).

Pentru circuite fără cuplaje mutuale, putere reactivă se cosumă doar pe reactanțele proprii ale laturilor și  $Q_X = \sum_{k=1}^l X_k I_k^2$ .

### Observații

- În sumele care intervin în expresiile teoremelor de conservare anterioare, fiecare termen are o *semnificație fizică* bine precizată, reprezentând puterea consumată sau produsă de un anumit element de circuit. Numai termenii care exprima puterile care

$$\text{intră pe la borne} \left[ P_b = \sum_{s=1}^n v_s i_s^{\text{ex}} ; \underline{S}_b = \sum_{s=1}^n V_s \left( I_s^{\text{ex}} \right)^* = P_b + jQ_b \right] \text{ nu au fiecare}$$

în parte vreo semnificație fizică. În adevăr, valoare numerică a fiecăruia dintre acești termeni depinde de *valoarea potențialului* ( $v_s$ ), potențialul este o mărime

arbitrară care depinde de *alegerea originii de potențial* (oricare dintre termenii sumei poate fi nul dacă aleg polul respectiv ca origine de potențial, ceea ce nu înseamnă că prin polul respectiv nu intră putere). Puterea totală care intră pe la borne ( $p_b, \underline{S}_b$ ) nu depinde de alegerea originii de potențial, deci are semnificație pe ansamblu, numai termenii din sumă rămân fictivi.

- Puterile aparente ( $S = |\underline{S}| \geq 0$ ) nu au proprietate de conservare, respectiv pentru o rețea închisă  $\sum_{k=1}^l S_k = \sum_{k=1}^l U_k I_k \neq 0$ , suma unor termeni pozitivi nu poate fi nulă.
- Pe baza teoremelor de conservare a puterilor se poate face *bilanțul puterilor*. El se face numai pentru întreaga rețea, sumele trebuie efectuate asupra tuturor laturilor, respectiv nodurilor. Prin *ecuații de bilanț*, de multe ori, se poate verifica dacă curenții din laturi au fost bine calculați.

## 6.10. Transferul de putere activă în circuite cuplate

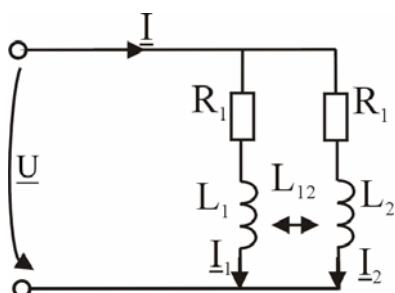


Fig. 6.25

Fie două laturi cuplate dintr-un circuit (figura 6.25). Ecuațiile de tensiuni scrise pentru cele două laturi sunt:

$$\underline{U} = (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 \pm j\omega M \underline{I}_2 \quad (6.71)$$

$$\underline{U} = (R_2 + j\omega L_2) \underline{I}_2 \pm j\omega M \underline{I}_1$$

Rezolvând sistemul (6.71), se obțin valorile curenților  $\underline{I}_1 = I_1 \angle \gamma_1$  și  $\underline{I}_2 = I_2 \angle \gamma_2$  iar  $\varphi_{12} = \gamma_1 - \gamma_2$  este defazajul dintre cei doi curenți.

Puterea complexă absorbită de latura (1) este:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = (R_1 + jX_{L_1}) \underline{I}_1 \underline{I}_1^* \pm jX_M \underline{I}_1^* \underline{I}_2$$

$$jX_M \underline{I}_1^* \underline{I}_2 = jX_M I_1 I_2 \angle \gamma_2 - \gamma_1 = jX_M I_1 I_2 (\cos \varphi_{12} - j \sin \varphi_{12}) = jX_M I_1 I_2 (\sin \varphi_{12} - j \cos \varphi_{12})$$

Deci puterea  $\underline{S}_1$  se poate scrie astfel:

$$\underline{S}_1 = (R_1 I_1^2 \pm X_M I_1 I_2 \sin \varphi_{12}) + j(X_{L_1} I_1^2 \pm X_M I_1 I_2 \cos \varphi_{12}) = P_1 + jQ_1 \quad (6.72)$$

In mod similar se va scrie și puterea complexă absorbită de latura (2):

$$\underline{S}_2 = \underline{U}_2 \underline{I}_2^* = (R_2 I_2^2 \mp X_M I_1 I_2 \sin \varphi_{12}) + j(X_{L_2} I_2^2 \pm X_M I_1 I_2 \cos \varphi_{12}) = P_2 + jQ_2 \quad (6.73)$$

Dacă  $P_1$  și  $P_2$  sunt puterile active absorbite de către fiecare latură în parte, puterea activă absorbită de întregul circuit pe la borne va fi:

$$P = P_1 + P_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 \quad (6.74)$$

Termenul  $P_{12} = X_M I_1 I_2 \sin \varphi_{12}$  reprezintă puterea activă absorbită în plus de latura 1 (sau de latura 2, la cuplaj diferențial) și transferată laturii 2 prin câmpul magnetic de cuplaj dintre ele. În raport cu bornele de alimentare a circuitului se verifică teorema de conservare a puterilor active. Se transferă maxim de putere activă printr-un cuplaj când cei doi curenți sunt în cuadratură ( $\varphi_{12} = \pm \frac{\pi}{2}$ ) și nu se transferă când cei doi curenți oscilează în fază ( $\varphi_{12} = 0$ ).

Analog, puterea reactivă absorbită de circuit pe la borne este:

$$Q = Q_1 + Q_2 = X_{L1} I_1^2 + X_{L2} I_2^2 \pm 2X_M I_1 I_2 \cos \varphi_{12} \quad (6.75)$$

deci în acord cu expresia (6.70) a teoremei de conservare a puterilor reactive într-un circuit.

## 6.11 Îmbunătățirea factorului de putere al unui circuit

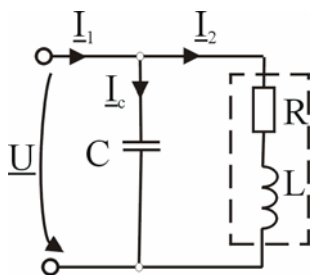


fig 6.26

Considerăm un receptor cu caracter inductiv (bobină de reactanță, motor de curent alterantiv monofazat, etc.) care absoarbe de la rețea putere activă  $P$  (pe care o transformă fie în căldură pe rezistențele interne, fie în alte forme de energie activă) sub factorul de putere  $\cos \varphi_1$ . Schema echivalentă a receptorului inductiv este un circuit RL serie (fig. 6.26).

Puterea reactivă absorbită de receptor este:

$$Q_1 = P \cdot \tan \varphi_1 \text{ și}$$

corespunde fluxului de energie spre câmpul magnetic al bobinei.

Corespunzător puterii active  $P$ , circuitul absoarbe de la sursă curentul  $I_{1a}$  iar corespunzător puterii

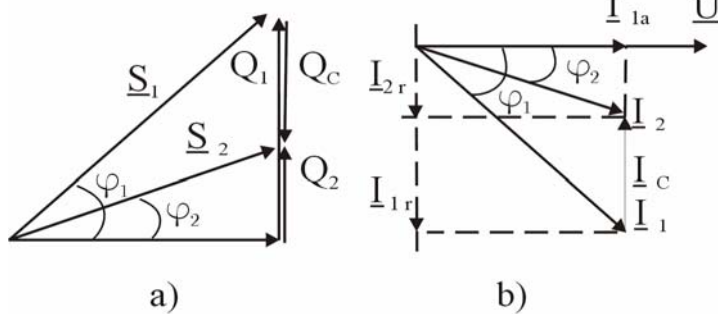


Fig 6.27

reactive  $Q_1$  absoarbe curentul (reactiv)  $I_{1r}$ . Cele două componente (activă și reactivă) compuse (fig. 6.27-b) dau curentul absorbit de receptor  $I_1$ .

Prin montarea la bornele circuitului a unui condensator de capacitate  $C$ , se reduce defazajul dintre curentul absorbit  $I_2$  și tensiunea  $U$  de la  $\varphi_1$  la  $\varphi_2$  iar factorul de putere a crescut ( $\cos \varphi_2 > \cos \varphi_1$ ), valoarea (modulul) curentului absorbit s-a micșorat:  $I_2 = I_1 + I_C$ ; ( $|I_2| < |I_1|$ ).

Condensatorul cedează bobinei puterea reactivă  $Q_C$  pe care el o produce:  $Q_C = B_C U^2 = \omega C U^2$  iar puterea reactivă  $Q_2$  absorbită pe la borne este numai diferența:  $Q_2 = Q_1 - Q_C$ ;  $Q_2 = P \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - \omega C U^2$ . Din triunghiul puterilor (figura 6.27-a):  $Q_2 = P \cdot \operatorname{tg} \varphi_2$ . Deci:

$$P \cdot \operatorname{tg} \varphi_2 = P \cdot \operatorname{tg} \varphi_1 - \omega C U^2 \rightarrow C = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) \quad (6.76)$$

Prin îmbunătățirea factorului de putere la  $\cos \varphi_2$ , curentul absorbit de la sursă se reduce de la  $I_1$  la  $I_2$ , ca urmare a reducerii componenetei sale reactive de la  $I_{1r}$  la  $I_{2r}$ . Condensatorul furnizează pe plan local o parte din puterea reactivă necesară bobinei ( $Q_C$ ), aceasta este nevoită să absoarbă de la sursă doar diferența  $Q_2$ .

Dacă vrem să mărim factorul de putere la maxim ( $\cos \varphi_2 = 1, \varphi_2 = 0, \operatorname{tg} \varphi_2 = 0$ ) atunci:

$$C_0 = \frac{P}{\omega^2 U} \operatorname{tg} \varphi_1$$

În practică, în unități industriale, plata energiei se face cu luarea în seamă a factorului de putere mediu  $k_{p\text{mediu}}$ , determinat pe baza citirii contorului de energie activă  $W_a$  (kWh) și de energie reactivă  $W_r$  (kVARh) pentru aceeași perioadă de timp ( $t=1$  lună, 1 an).

$$k_{p\text{mediu}} = \frac{W_a}{W_{\text{aparenta}}} = \frac{W_a}{\sqrt{W_a^2 + W_r^2}} \quad (6.77)$$

Mărirea factorului de putere pentru un receptor implică reducerea puterii reactive  $Q$  absorbită, a curentului  $I$  absorbit, deci sursele produc curenți și  $Q$  mai mici, economii de combustibil, economii de energie (pierderi mici pe liniile de transport) și în final economii bănești.

## 6.12 Aplicații

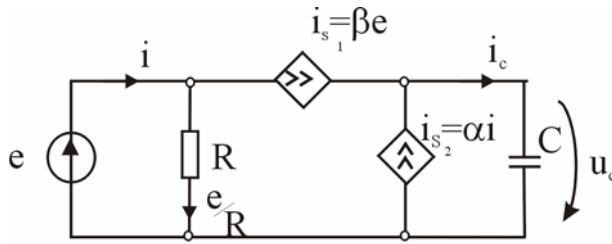


Fig 6.28

1. Se consideră circuitul din figura 6.28 pentru care se cere să se stabilească expresia tensiunii  $u_c$  pe condensator.

Curentul debitat de sursa independentă este  $i$  iar ecuațiile de curent ale schemei, scrise în instantaneu și în complex sunt de forma:

$$\begin{cases} i = i_{s1} + i_R \\ I = \beta E + \frac{E}{R} = E \cdot \left( \beta + \frac{1}{R} \right) \\ i_{s1} = i_{s2} + i_c \\ \beta E = \alpha I + I_c \rightarrow I_c = \beta E - \alpha I = E \cdot \left[ \beta - \alpha \left( \beta + \frac{1}{R} \right) \right] \end{cases}$$

Tensiunea pe condensator va fi:  $\underline{U}_c = -jX_c I_c = -jX_c E \cdot \left[ \beta(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{R} \right]$  iar coeficientul de transfer al tensiunii de la  $\underline{E}$  la  $\underline{U}_c$  este:

$$\underline{k} = \frac{\underline{U}_c}{\underline{E}} = -jX_c \left[ \beta(1 - \alpha) - \frac{\alpha}{R} \right]$$

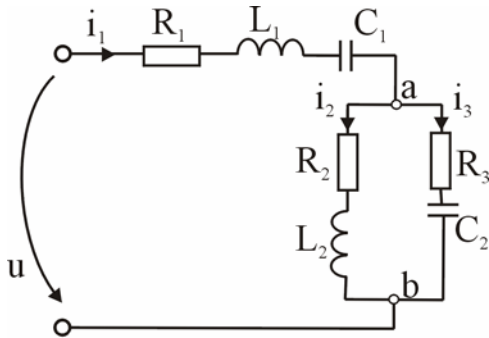


Fig 6.29

2. Circuitul din figura 6.29 este alimentat cu o tensiune nesinusoidală:

$$u = 60 + \sqrt{2}120 \sin \omega t + \sqrt{2}100 \sin 3\omega t$$

Se cere să se determine curenții și puterile absorbite și să se facă bilanțul puterilor.

$$\begin{cases} R_1 = R_2 = R_3 = R = 3\Omega \\ X_{L1} = X_{C1} = 3\Omega \\ X_{L2} = 1\Omega; X_{C3} = 9\Omega \end{cases}$$



Deoarece  $R^2 = X_{L_2} \cdot X_{C_3} \leftrightarrow R^2 = \omega L_2 \frac{1}{\omega C_3}$ , respectiv  $R = \sqrt{\frac{L_2}{C_3}}$  deci este

îndeplinită condiția (5.23) structura laturilor 2 și 3 rezonază pe orice frecvență (în cazul nostru și pe fundamentală ( $\omega$ ) și pe armonica a treia ( $3\omega$ )) iar  $Z_{ab} = R = 3\Omega$  pentru orice frecvență.

- Pe armonica fundamentală impedanța echivalentă a circuitului este  $Z_e(\omega) = R_1 + R = 6\Omega$  iar fundamentalele curenților, scrise în complex, vor fi:

$$\underline{I}_1' = \frac{U_1}{Z_e(\omega)} = \frac{120}{6} = 20A; \quad \underline{U}_{ab} = R \underline{I}_1' = 60V$$

$$\underline{I}_2' = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_2 + j\omega L_2} = \frac{60}{3 + j} = 6(3 - j) = 6\sqrt{10} \angle -\alpha; \quad \alpha = \arctg \frac{1}{3} \approx 19^\circ$$

$$\underline{I}_3' = \frac{\underline{U}_{ab}}{R_3 - jX_{C_3}} = \frac{60}{3 - j9} = 2(1 + j3) = 2\sqrt{10} \angle \frac{\pi}{2} - \alpha$$

- Pe armonica de ordinul 3, impedanța și curenții au valorile:

$$\underline{Z}_e(3\omega) = R + j3X_{L_1} - j\frac{X_{C_1}}{3} + \underline{Z}_{ab} = 3 + j9 - j + 3 = 6 + j8 = 10 \angle \gamma;$$

$$\gamma = \arctg \frac{4}{3} = 57^\circ$$

$$\underline{I}_1^{(3)} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_e(3\omega)} = \frac{100}{6 + j8} = 6 - j8 = 10 \angle -\gamma \rightarrow \underline{U}_{ab}^{(3)} = R \underline{I}_1^{(3)} = 30 \angle -\gamma = (18 - j24) V$$

$$\underline{I}_2^{(3)} = \frac{\underline{U}_{ab}^{(3)}}{R_2 + j3X_{L_2}} = \frac{18 - j24}{3 + j3} = \frac{30 \angle -\gamma}{3\sqrt{2} \angle \frac{\pi}{4}} = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle -13^\circ A$$

$$\underline{I}_3^{(3)} = \frac{\underline{U}_{ab}^{(3)}}{R - j\frac{1}{3}X_{C_3}} = \frac{30 \angle -\gamma}{3 - j3} = 5\sqrt{2} \angle -102^\circ A$$

- Din cauza condensatorului  $C_1$  nu va circula componenta continuă a curentului:  $I_1^0 = I_2^0 = I_3^0 = 0$

Valorile efective a celor trei curenți sunt (conform relației (1.41)):

$$I_{1ef} = \sqrt{400 + 100} = 10\sqrt{5} A; \quad I_{2ef} = \sqrt{360 + 150} = 20,25 A;$$

$$I_{3ef} = \sqrt{40 + 50} = \sqrt{90} A$$

$$U_{ef} = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = \sqrt{60^2 + 120^2 + 100^2} \cong 167 V$$

Aceste valori ar fi fost indicate dacă la borne era conectat un voltmetru, iar pe cele trei laturi era conectat câte un ampermetru.

Puterile absorbite pe la borne sunt:

$$\begin{cases} P = P_b = \sum U_k I_k \cos \varphi_k = 120 \cdot 20 + 100 \cdot 10 \cdot 0,6 = 3 \text{ kW} \\ Q = Q_b = \sum U_k I_k \sin \varphi_k = 120 \cdot 10 \cdot 0 + 100 \cdot 10 \cdot 0,8 = 800 \text{ VAR} \\ S = S_b = U_{ef} I_{1ef} = \sqrt{120^2 + 100^2} \cdot 10\sqrt{5} = 3.492 \text{ VA} \\ D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)} = 1.598 \text{ VAD} \end{cases}$$

Puterile consumate pe laturile interioare sunt:

$$P_{cons} = \sum R_k I_{kef}^2 = 3(500 + 410 + 90) = 3 \text{ kW}$$

$$Q_{cons} = \sum X_k I_{kef}^2 = \underbrace{(3-3)400 + 1 \cdot 360 - 9 \cdot 40}_{\text{pe fundamentală}} + \underbrace{(9-1)100 + 3 \cdot 50 - 3 \cdot 50}_{\text{pe armonica 3}} = 800 \text{ VAR}$$

respectiv se verifică bilanțul puterilor :  $P_b = P_{cons}$  și  $Q_b = Q_{cons}$ .

3. Circuitul din figura 6.30 este alimentat cu o tensiune nesinusoidală

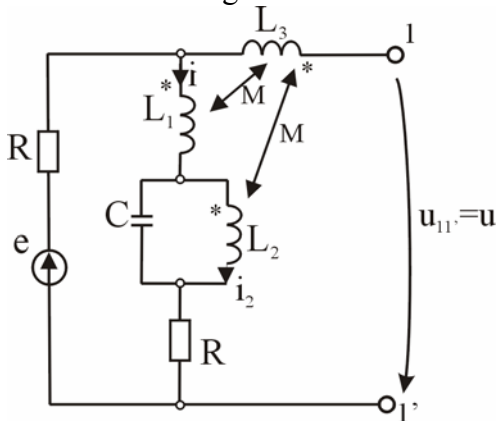


Fig 6.30

circulația curenților.

$e = 10 + \sqrt{2} \cdot 10 \sin 100t + \sqrt{2} \cdot 10 \sin 200t$   
Se cere:

a) Să se determine  $L_1$  și  $L_2$  astfel încât să apară rezonanță de curent pe fundamentală ( $\omega$ ) și rezonanță de tensiune pe armonica a doua ( $2\omega$ ).

b) Să se determine expresiile mărimilor  $i_2$  și  $u$

c) Să se determine valoare medie a produsului:  $u \cdot i_2$

Între punctele 1-1' fiind mers în gol, cuplajul  $M$  nu are nici un rol în

a) Dacă este rezonanță de curenți pe fundamentală înseamnă că:

$$\frac{1}{\omega L_2} = \omega C \rightarrow L_2 = \frac{1}{\omega^2 C} = 1H, \quad (X_{L_2} = 100\Omega)$$

$$\underline{Z}_e(2\omega) = \underbrace{2R_e}_{R_e} + j \underbrace{\left( 2\omega L_1 + \frac{2\omega L_2}{1 - 4\omega^2 L_2 C} \right)}_{X_e}$$

Rezonanță de tensiuni înseamnă  $X_e = 0 \rightarrow L_1 = \frac{L_2}{1 - 4\omega^2 L_2 C} = \frac{L_2}{3} = \frac{1}{3}H, \quad X_{L_1} = \frac{10}{3}\Omega$

b) Componenta continuă a curentului se închide prin  $R - L_1 - L_2 - R$  și are

valoarea  $I_{2_0} = \frac{E_0}{2R} = 0,5A$  iar tensiunea la borne este  $U_0 = RI_{2_0} = 5V$ .

Fiind rezonanță de curent pe fundamentală între punctele a și b înseamnă că sursa nu produce curent de frecvență  $\omega(i_1=0)$  și toată fundamentală de tensiune se va regăsi între punctele a-b. Atunci:

$$i_2^{(1)} = \sqrt{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} 0,1 \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Fundamentală tensiunii  $u = u_{11}$ , este:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{E}_1 + j\omega M \underline{I}_2^{(1)} = 10 + j50 \cdot 0,1 \cdot (-j) = 15V \\ u_1 = \sqrt{2} \cdot 15 \sin 100t \end{cases}$$

Pe armonica a doua avem rezonanță de tensiune, circuitul rămâne pur rezistiv :

$$i^{(2)} = \frac{e^{(2)}}{R} = \sqrt{2} \cdot 0,5 \sin 200t \rightarrow \underline{I}_2^{(2)} = \underline{I}^{(2)} \frac{-j\frac{1}{2}X_C}{j\left(2X_2 - \frac{X_C}{2}\right)} = 0,5 \cdot \left(\frac{-1}{3}\right) = -\frac{1}{6}A = \frac{1}{6} \angle \pi [A]$$

Armonica a doua a tensiunii la borne este:

$$\begin{cases} \underline{U}^{(2)} = R \underline{I}^{(2)} + j2X_M \left( \underline{I}^{(2)} + \underline{I}_2^{(2)} \right) = 5 \left( j + \frac{20}{3} \right) = \frac{100}{3} \angle \arctg \frac{20}{3} \\ u^{(2)} = \sqrt{2} \frac{100}{3} \sin\left(200t + \arctg \frac{20}{3}\right) \end{cases}$$

c) Am obținut pentru  $u$  și  $i_2$  expresiile:

$$u = 5 + \sqrt{2} \cdot 15 \sin 100t + \sqrt{2} \frac{100}{3} \sin\left(200t + \arctg \frac{20}{3}\right)$$

$$i = 0,5 + \sqrt{2} \cdot 0,1 \sin\left(100t - \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} \frac{1}{6} \sin(\omega t - \pi)$$

Valoarea medie a produsului lor (conform relației (1.39)) este:

$$\widetilde{u_i}_2 = U_o I_{2_o} + U^{(1)} I_2^{(1)} \cos\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) + U^{(2)} I_2^{(2)} \cos\left(\pi + \arctg \frac{20}{3}\right) = 3,32$$

4. Pentru circuitul din figura 6.31 se cere să se determine curentul  $\underline{I}_{AB}$  cu teorema lui Thévenin și tensiunea  $\underline{U}_{AB}$  cu teorema lui Norton. Determinăm

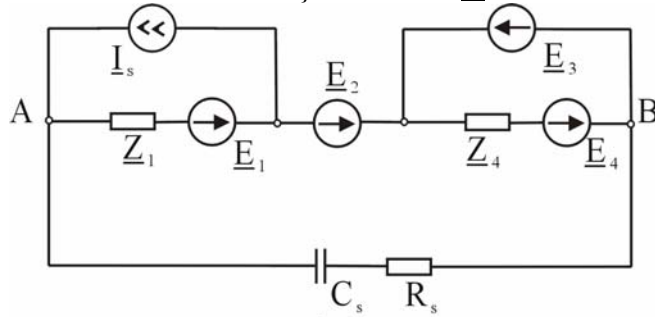


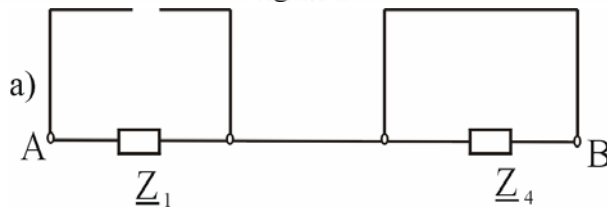
Fig 6.31

elementele  $\underline{Z}_{AB_0}$  și

$$\underline{Y}_{AB_0} = \frac{1}{\underline{Z}_{AB_0}}$$

- $\underline{Z}_{AB_0}$  este impedanța echivalentă între A

și B la mersul în gol, cu circuitul pasivizat (ca în fig. 6.32-a):



$$\underline{Z}_{AB_0} = \underline{Z}_1; \underline{Y}_{AB_0} = \underline{Y}_1$$

Fig. 6.32-a

- Tensiunea  $\underline{U}_{AB_0}$  este între A și B la mersul în gol (fig. 6.32-b):

$$\underline{U}_{AB_0} = \underline{Z}_1 \underline{I}_s - \underline{E}_1 - \underline{E}_2 + \underline{E}_3$$

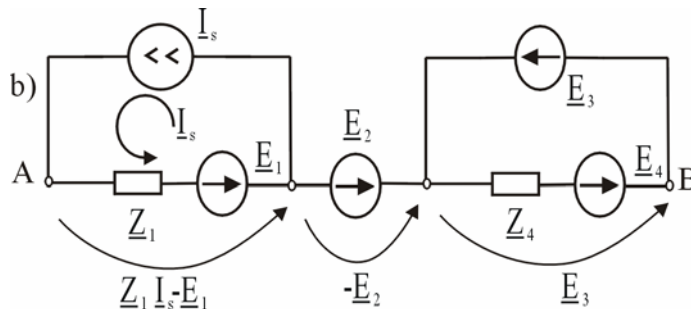


Fig 6.32

- Curentul  $I_{AB_{sc}}$  este între A și B la mersul în scurtcircuit(fig 6.32-c):

$$I_{AB_{sc}} = \frac{U_{AB_0}}{Z_{AB_0}} = I_s + \frac{1}{Z_1}(E_3 - E_2 - E_1)$$

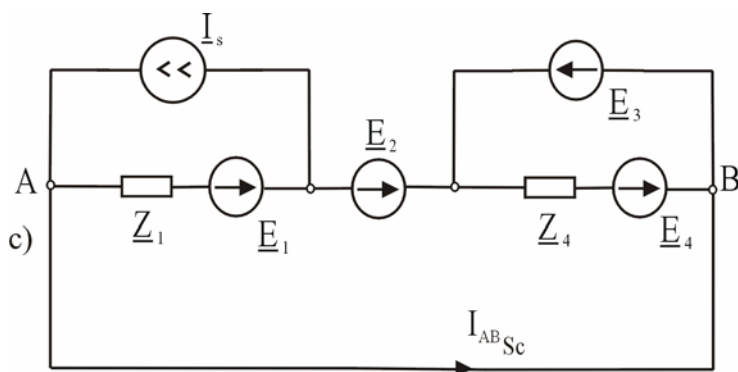


Fig 6.32

Impedanța de sarcină conectată între A și B este: ( $Z = Z_s = R_s - jX_{C_s}$ )

În acest caz mărimile  $I_{AB}$  și  $U_{AB}$  vor fi date de expresiile celor două teoreme sub forma:

$$I_{AB} = \frac{U_{AB_0}}{Z_s + Z_{AB_0}} = \frac{Z_1 I_s + E_3 - E_2 - E_1}{Z_s + Z_1}$$

$$U = \frac{I_{AB_{sc}}}{Y_s + Y_{AB_0}} = \frac{I_s + \frac{1}{Z_1}(E_3 - E_2 - E_1)}{\frac{1}{Z_s} + \frac{1}{Z_1}}$$

5. Circuitul din figura 6.33 are la ieșire o impedanță variabilă  $Z_2 = Z_2 \angle -\pi/4$  cu  $Z_2 \in (0, \infty)$ . Să se determine valoarea impedanței  $Z_2$  astfel ca la receptor să avem :  $P_{2max}$  ,  $I_{2max}$ .

$$\begin{cases} E = 100V; X_{L_1} = 40\Omega \\ X_{L_2} = X_{12} = 20\Omega \end{cases}$$

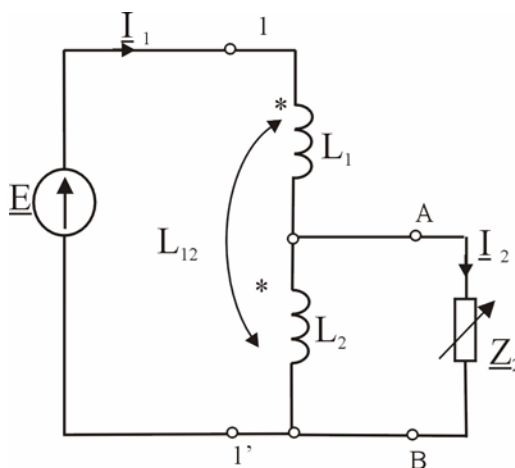


Fig 6.33

Partea din stânga bornelor A-B se poate reduce la generatorul echivalent de tensiune. La mersul în gol între A și B circuitul arată ca în figura 6.34-a, curentul  $I'$  este:

$$\underline{I}' = \frac{\underline{E}}{j(X_1 + X_2 + 2X_{12})} = \frac{100}{j100} = -j = 1 \angle -\pi/2 \text{ A}$$

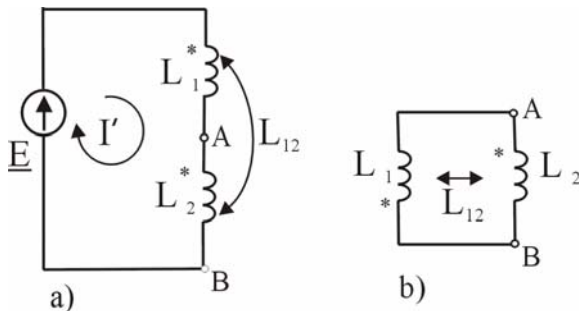


Fig 6.34

Tensiunea de mers în gol între A și B este:

$$\underline{U}_{AB_0} = j(X_2 + X_{12})\underline{I}' = j40(-j) = 40 \text{ V}$$

Schema la mersul în gol, cu circuitul pasivizat este reprezentată în figura 6.34-b.

$$\underline{Z}_{AB_0} = jX_2 - \frac{X_{12}^2}{X_1^2}(jX_1) = j\omega \left( L_2 - \frac{L_{12}^2}{L_1} \right) = j10 \Omega$$

Cu teorema lui Thévenin am redus circuitul inițial la forma din figura 6.35. Impedanța  $\underline{Z}_2$  absoarbe  $I_{2 \max}$  și  $P_{2 \max}$  dacă schema funcționează adaptat și cum numai modulul lui  $\underline{Z}_2$  este variabil, va fi o adaptare de

modul de tipul (6.44), respectiv  $\underline{Z}_2 = |\underline{Z}_{AB_0}|$ ;  $\underline{Z}_{AB_0} = j10$  și în mod normal

adaptarea ar însemna  $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{AB_0}^* = -j10 \Omega$ , în cazul nostru  $\underline{Z}_2 = 10 \Omega$ .

6. În regim permanent de funcționare și la rezonanță, indicațiile instrumentelor de măsură sunt:  $I = 3,6 \text{ A}$  și  $I_1 = 6 \text{ A}$ . Cât indică ampermetrul  $A_2$ ?

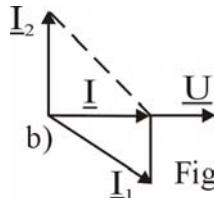
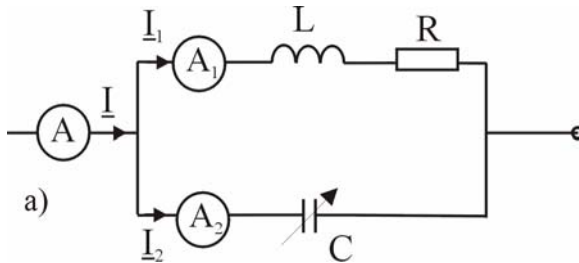


Fig 6.36

Circuitul din figura 6.36-a funcționând la rezonanță  $\angle(\underline{U}, \underline{I}) = 0$  și diagrama fazorială a circuitului este cea din figura 6.36-b. În consecință, indicația ampermetrului  $A_2$ , curentul  $I_2$  va avea valoarea :

$$I_2 = \sqrt{I_1^2 - I^2} = \sqrt{6^2 - 3,6^2} = 4,8 \text{ A}$$

iar valoarea sa complexă este  $\underline{I}_2 = j4,8 \text{ A}$ .