

9. Circuite electrice trifazate

Producerea energiei electromagnetice se face în centrale electrice cu ajutorul generatoarelor sincrone trifazate, transportul său se realizează cu ajutorul liniilor electrice trifazate de înaltă tensiune iar distribuția se face cu rețele trifazate de medie și joasă tensiune. Utilizarea sistemului trifazat în producerea, transportul și distribuția energiei este legată de următoarele avantaje ale sistemelor trifazate:

- transmisia este economică, se utilizează trei fire (plus neutrul) în loc de șase fire la transmisia prin trei linii monofazate separate.
- la consumatori se pot utiliza două sisteme de tensiuni, de linie și de fază.
- cu sisteme trifazate de curenți se pot produce câmpuri magnetice învârtitoare, câmpuri pe baza cărora funcționează toate mașinile electrice de curent alternativ (sincrone și asincrone), mașini ce constituie baza acționărilor electrice a mașinilor de lucru din industrie.

9.1. Sisteme trifazate simetrice

Un ansamblu de trei circuite electrice în care acționează trei tensiuni electromotoare sinusoidale de aceeași frecvență dar cu faze inițiale diferite se numește *sistem trifazat de circuite*. Fiecare dintre circuitele sistemului se numește *fază*, iar curentul care circulă prin ele este *curent de fază*. Sistemul trifazat de curenți de fază are forma:

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \gamma_1) \\ i_2 = \sqrt{2}I_2 \sin(\omega t + \gamma_2) \\ i_3 = \sqrt{2}I_3 \sin(\omega t + \gamma_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = I_1 \angle \gamma_1 \\ \underline{I}_2 = I_2 \angle \gamma_2 \\ \underline{I}_3 = I_3 \angle \gamma_3 \end{cases} \quad (9.1)$$

Sistemul (9.1) este un sistem trifazat oarecare. Cei trei curenți formează un *sistem simetric* dacă au aceeași valoare efectivă ($I_1=I_2=I_3=I$) și sunt defazați simetric între ei ($\varphi = \gamma_1 - \gamma_2 = \gamma_2 - \gamma_3 = \gamma_3 - \gamma_1$).

- dacă $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, cei trei curenți formează un sistem trifazat simetric de *succesiune directă* (de secvență 1).

Atât în diagrama carteziană (fig.9.1-a) cât și în diagrama fazorială (fig.9.1-b) cei trei curenți sunt defazați simetric cu câte $\frac{2\pi}{3}$.

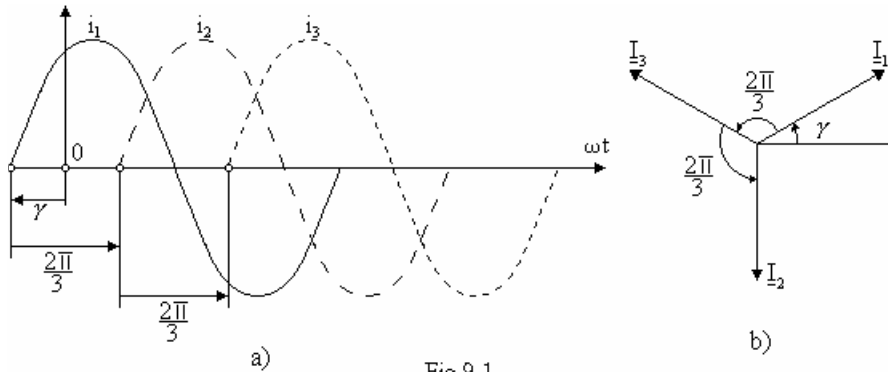


Fig.9.1

Unitatea de defazaj este $\frac{2\pi}{3}$, iar fazorii se rotesc în sens trigonometric în ordinea I_1, I_2, I_3 , faza 2 este în urma fazei 1 cu o unitate, iar 3 în urma fazei 2 tot cu o unitate, deci este *de frecvență 1*.

Un sistem simetric direct de curenți se scrie sub forma:

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma) \\ i_2 = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = I \angle \gamma \\ \underline{I}_2 = I \angle \gamma - \frac{2\pi}{3} \\ \underline{I}_3 = I \angle \gamma + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (9.1')$$

- dacă $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, cei trei curenți formează un sistem simetric de *succesiune inversă* (secvență 2).

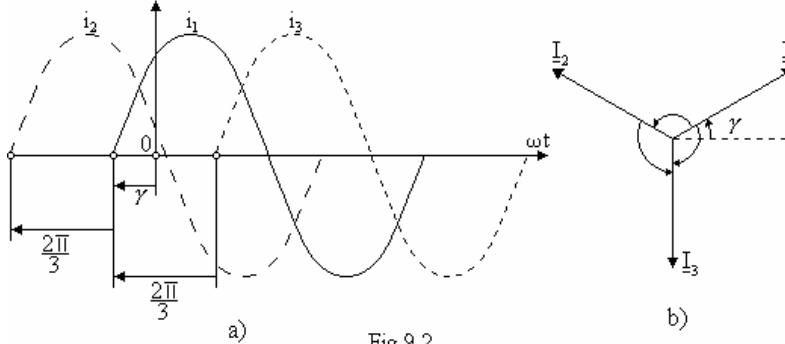


Fig.9.2

În diagramele din figura 9.2 sunt reprezentați un sistem invers de curenți. Curenții se succed în ordinea 1 – 3 – 2, respectiv \underline{I}_2 este în urma lui \underline{I}_1 cu $\frac{4\pi}{3} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ deci cu 2 unități și tot așa \underline{I}_3 în urma lui \underline{I}_2 , respectiv sistemul invers este de secvență 2. Ei au expresiile (9.2).

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma) \\ i_2 = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{3}\right) \\ i_3 = \sqrt{2}I \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = I \angle \gamma \\ \underline{I}_2 = I \angle \gamma + \frac{2\pi}{3} \\ \underline{I}_3 = I \angle \gamma - \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (9.2)$$

Sistemul invers provine din sistemul direct în care sau inversat două faze între ele (de ex. faza 2 cu faza 3). Un motor trifazat alimentat cu un sistem direct de curenți și câmpul învârtitor are un anumit sens de rotație, iar dacă îl alimentăm cu un sistem invers de curenți se va roti invers; deci schimbarea sensului de rotație la un motor se obține prin inversarea a două faze la alimentare.

- dacă $\varphi = 0 = 2\pi$ cei trei curenți formează un sistem simetric de *succesiune homopolară* (de secvență 0 sau 3).

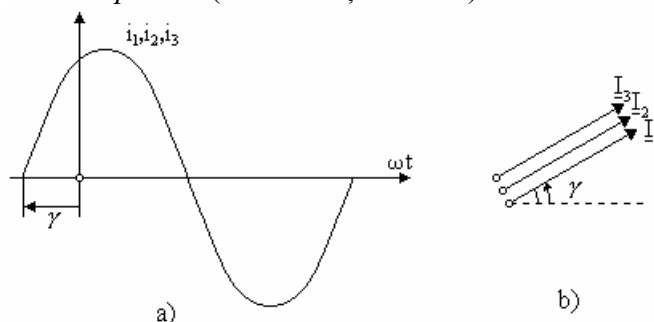


Fig 9.3

În diagramele din figura 9.3 sunt reprezentați un sistem homopolar de curenți. În rotația lor, între \underline{I}_1 și \underline{I}_2 nu există defazaj sau defazajul este $2\pi = 3 \cdot \frac{2\pi}{3}$, deci sistemul homopolar este ori de secvență „0” ori „3”.

$$\begin{cases} i_1 = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma) \\ i_2 = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma) \\ i_3 = \sqrt{2}I \sin(\omega t + \gamma) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{I}_1 = I/\underline{\gamma} \\ \underline{I}_2 = I/\underline{\gamma} \\ \underline{I}_3 = I/\underline{\gamma} \end{cases} \quad (9.3)$$

Un sistem homopolar de curenți se poate scrie în instantaneu sau în complex sub forma (9.3).

Un *operator de rotație* „a” are modulul „1” iar faza „ $\frac{2\pi}{3}$ ”. Orice mărime complexă înmulțită cu „a”, o va roti pe aceasta în sens direct (trigonometric) cu $\frac{2\pi}{3}$. Operatorul are proprietățile:

$$\begin{cases} a = e^{j\frac{2\pi}{3}} = 1 \angle \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = 1 \angle \frac{4\pi}{3} = 1 \angle -\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^3 = 1 \\ a^4 = a; a^5 = a^2; a^6 = a^3 = 1 \dots \end{cases} \quad (9.4)$$

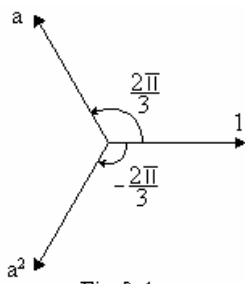


Fig.9.4

Se observă în figura 9.4 că mărimile 1, a, a^2 formează o stea simetrică, deci suma lor este nulă:

$$1 + a + a^2 = 0 \quad (9.5)$$

Dar și un sistem direct sau invers de curenți formează tot o stea simetrică. Cu ajutorul operatorului de rotație „a”, un sistem direct sau invers se scrie sub forma (9.6), iar suma celor trei curenți este nulă: $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$; $i_1 + i_2 + i_3 = 0$.

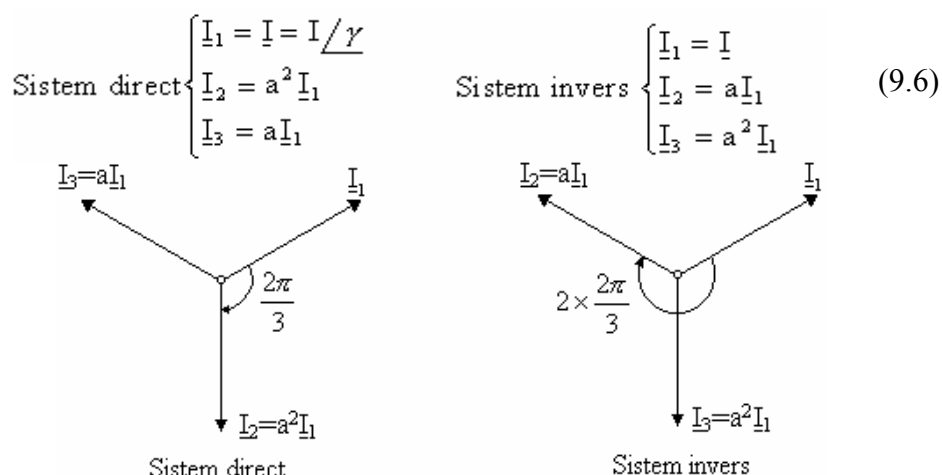


Fig.9.5

Mărimile diferență într-un sistem trifazat direct se scriu sub forma:

$$i_{12} = i_1 - i_2 = \sqrt{2}I \left[\sin(\omega t + \gamma) - \sin\left(\omega t + \gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \sqrt{2}I \cdot 2 \sin \frac{\pi}{3} \cos\left(\omega t + \gamma - \frac{\pi}{3}\right); \quad (9.7)$$

$$i_{12} = \sqrt{2}(\sqrt{3}I) \cdot \sin\left(\omega t + \gamma + \frac{\pi}{6}\right)$$

iar în valori complexe mărimea diferență se scrie sub forma:

$$\underline{I}_{12} = \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = \underline{I}_1 - a^2 \underline{I}_1 = (1 - a^2) \underline{I}_1 = \underline{I}_1 \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} \underline{I}_1 \angle \gamma + \frac{\pi}{6} \quad (9.8)$$

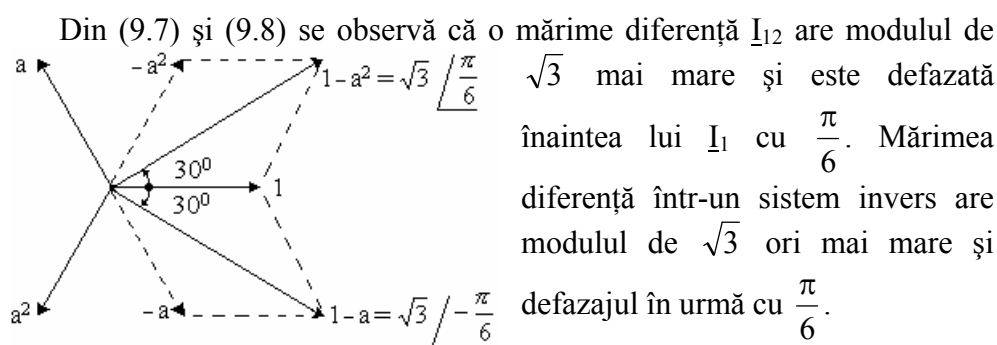


Fig.9.6

Dacă $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ formează un sistem simetric de succesiune directă (fig 9.7) atunci mărimile diferență \underline{I}_{12} ,

\underline{I}_{23} , \underline{I}_{31} vor forma fie o stea simetrică cu modulul mărit de $\sqrt{3}$ ori și rotită cu $\frac{\pi}{6}$ (fig 9.7-a) fie vor forma un triunghi orientat în sens direct (latura triunghiului = $\sqrt{3} \cdot$ latura stelei) ca în figura 9.7-b.

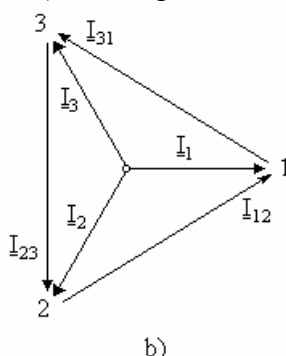
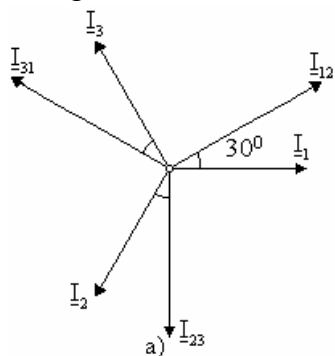


Fig. 9.7

Mărimile unui sistem simetric invers sunt \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , iar mărimile diferență \underline{I}_{12} , \underline{I}_{23} , \underline{I}_{31} formează o stea mărită de $\sqrt{3}$ ori și rotită invers cu $\frac{\pi}{6}$ fie un triunghi orientat în sens invers (fig 9.8).

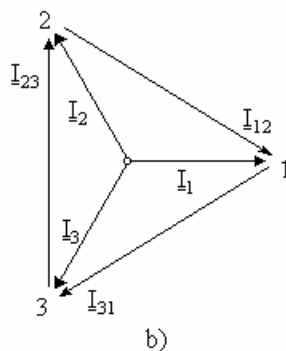
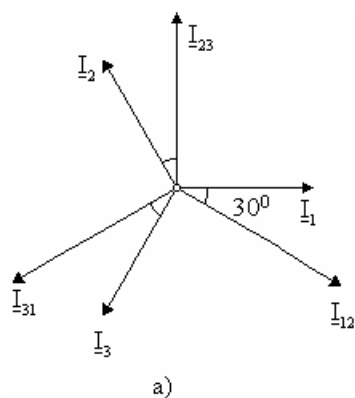


Fig. 9.8

9.2 Conexiunile sistemelor trifazate

Un sistem trifazat de circuite se poate considera că provine prin interconectarea a trei circuite monofazate și aceasta se poate face prin conexiuni: stea, triunghi, zig-zag, etc. Nu vom considera că există un generator trifazat, o linie trifazată de alimentare și un receptor trifazat, cum este de multe ori tratată această problemă. Azi, orice receptor trifazat nu se conectează la generatorul său (eventual undeva pe șantier izolate), ci se

conectează la o priză trifazată unde există un sistem trifazat al tensiunilor de alimentare, furnizat de sistemul național de distribuție.

9.2.1 Conexiunea în stea (Y)

Impedanțele \underline{Z}_1 , \underline{Z}_2 , \underline{Z}_3 (figura 9.9) reprezintă *fazele* receptorului și sunt parcurse de curenți de fază \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 , iar legătura 0-N prin \underline{Z}_N este *firul de nul*, \underline{Z}_N este impedanța firului de nul.

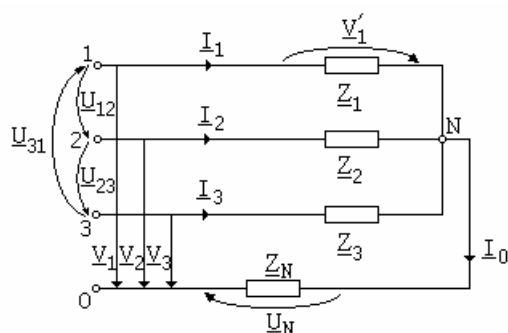


Fig. 9.9

de linie). Curenții care vin prin linia de alimentare spre receptor se numesc *curenți de linie*, numai că la conexiunea în stea ei sunt identici cu curenții prin fazele receptorului; curențul \underline{I}_0 prin firul de nul se mai numește *de întoarcere* fiindcă el are orientarea $N \rightarrow 0$.

Punctul N este *nulul receptorului* (așa cum 0 este *nulul rețelei*, sau nulul generatorului). Curențul prin firul de nul $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$ iar dacă cei trei curenți formează un sistem simetric, atunci $\underline{I}_0 = 0$ și firul de nul poate lipsi.

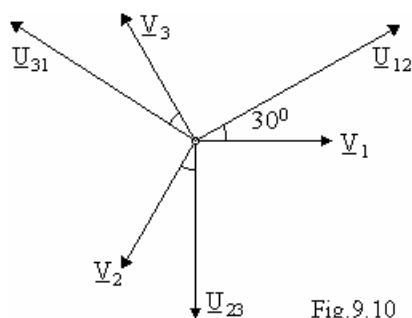


Fig. 9.10

Receptorul este alimentat cu un sistem trifazat de tensiuni pentru care: \underline{V}_1 , \underline{V}_2 , \underline{V}_3 sunt *tensiunile pe fază*, fiecare definite între o fază și *nulul* rețelei de alimentare 0 (punctul 0 se consideră referința de potențial într-un sistem trifazat). Tensiunile definite între fazele sistemului: \underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} se numesc *tensiuni între faze* (sau *tensiuni*

Caracteristic pentru conexiunea stea sunt:

\underline{V}_1 , \underline{V}_2 , \underline{V}_3 – tensiuni de fază ($V = U_f$) la alimentare;

\underline{U}_{12} , \underline{U}_{23} , \underline{U}_{31} – tensiuni între faze ($U = U_l$) sau de linie;

\underline{V}'_1 , \underline{V}'_2 , \underline{V}'_3 – tensiuni de fază la receptor;

\underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 – curenții de fază I_f
linie I_l

$U_f = \sqrt{3} \cdot U_f$; ($U = \sqrt{3} V$); $I_f = I_f$.

9.2.2 Conexiunea triunghi (Δ sau D)

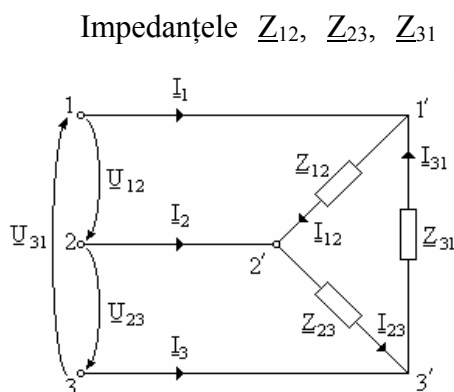


Fig. 9.11

Impedanțele Z_{12} , Z_{23} , Z_{31} sunt impedanțele receptorului (*fazele receptorului*) și sunt legate în triunghi ca în figura 9.11, punctele 1' - 2' - 3' sunt bornele receptorului. Nu este accesibil nulul rețelei de alimentare (0), deci aici nu se pot defini decât *tensiunile între faze* (de linie) U_{12} , U_{23} , U_{31} , între bornele rețelei 1-2-3.

I_1 , I_2 , I_3 – *curenții de linie* (care vin prin linia de alimentare)

I_{12} , I_{23} , I_{31} – *curenții de fază*

Aplicând T1K la bornele receptorului: $I_1 = I_{12} - I_{31}$, $I_2 = I_{23} - I_{12}$, $I_3 = I_{31} - I_{23}$ se observă I_1 , I_2 , I_3 sunt mărimi diferență, deci cu proprietățile acestora, ca în figura 9.12. Deci pentru conexiunea triunghi:

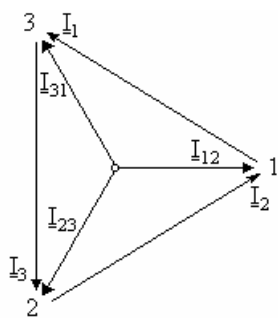


Fig. 9.12

$$\begin{cases} U_l = U_f & (U = V) \\ I_l = \sqrt{3} I_f \end{cases}$$

În practică un sistem trifazat de tensiuni se indică fie prin valoarea tensiunii de linie U , fie prin raportul între tensiunea de linie U și cea de fază V (U/V); de exemplu rețeaua publică de joasă tensiune este 0,4 kV (380 V) sau 380/220 V ($380 = \sqrt{3} \cdot 220$).

9.2.3 Conexiunea zig-zag (Z)

Fazele receptorului Z_1 , Z_2 , Z_3 se împart în două și la faza (1) nu se leagă Z_1 ci $\frac{1}{2} Z_1$ în serie cu $\frac{1}{2} Z_2$ și analog pentru celelalte faze, ca în figura 9.13 – a, de unde numele de legare în zig-zag. În fond este tot un fel de conexiune stea, cu nulul N, dar fazele receptorului se leagă încrucișat. Conexiunea se utilizează pentru receptori puternic dezechilibrați pe cele trei faze și prin acest mod de legare (conexiune) se realizează o mai bună

echilibrare, repartiție a consumului pe cele trei faze, curenții I_1 , I_2 , I_3 să nu fie puternic nesimetrizați.

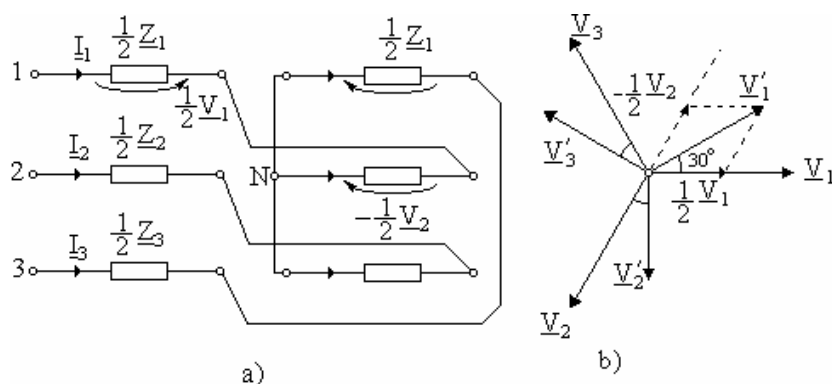


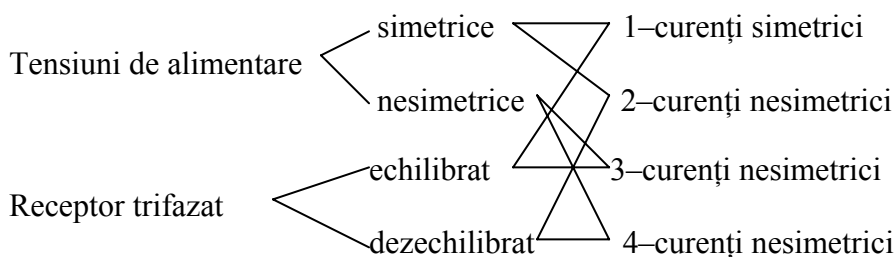
Fig. 9.13

Însă , prin această conexiune, tensiunile ce revin receptorului nu mai sunt V_1 , V_2 , V_3 ci V'_1 , V'_2 , V'_3 și așa cum rezultă din figura 9.13-b ($V' = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}V_1\right) \cos 30^\circ = 0,86V_1$) este un sistem mai mic(s-au micșorat tensiunile de 0,86 ori) și rotit cu 30° .

9.3 Rezolvarea circuitelor electrice trifazate

A rezolva un circuit electric trifazat înseamnă a determina *curenții absorbiți* și *puterile totale absorbite* (totale = pe cele trei faze), atunci când se cunoaște sistemul tensiunilor de alimentare și cele trei impedanțe ale receptorului și modul lor de conexiune.

Sistemul tensiunilor de alimentare poate fi *simetric* (direct sau invers) sau *nesimetric*, iar receptorul poate fi *echilibrat* ($Z_1=Z_2=Z_3=Z$) sau *dezechilibrat* ($Z_1 \neq Z_2 \neq Z_3$). În funcție de aceste date, sistemul curenților absorbiți poate fi și el un sistem *simetric* (direct sau invers) sau un sistem *nesimetric*.



9.3.1 Rezolvarea circuitelor trifazate echilibrate, alimentate cu tensiuni simetrice

A. Receptor în stea

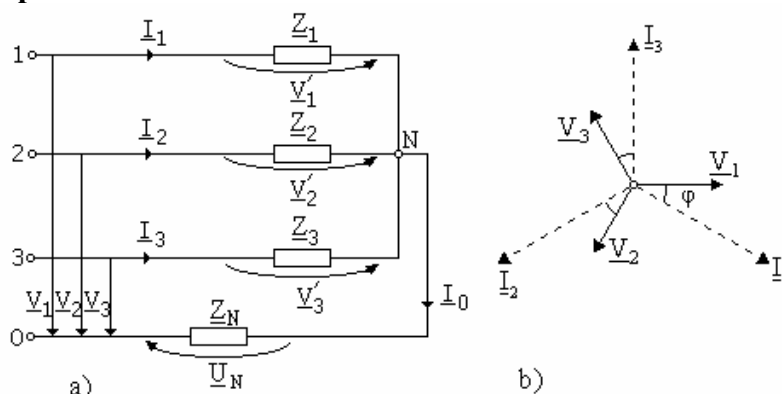


Fig.9.14

Tensiunile pe fază la alimentare $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ (măsurate între o fază și firul de nul) formează un sistem simetric de succesiune directă:

$$\underline{V}_1 = \underline{V}; \quad \underline{V}_2 = a^2 \underline{V}_1; \quad \underline{V}_3 = a \underline{V}_1 \quad (9.9)$$

iar receptorul este echilibrat: $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z/\gamma$, tensiunile $\underline{V}'_1 = \underline{V}_1 - \underline{U}_N$, $\underline{V}'_2 = \underline{V}_2 - \underline{U}_N$ și $\underline{V}'_3 = \underline{V}_3 - \underline{U}_N$ sunt tensiunile pe fază la receptor.

Curenții absorbiți se pot scrie sub forma:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{\underline{V}'_1}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{V}_1 - \underline{U}_N}{\underline{Z}} = \underline{Y}(\underline{V}_1 - \underline{U}_N) \\ \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}'_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{V}_2 - \underline{U}_N}{\underline{Z}} = \underline{Y}(\underline{V}_2 - \underline{U}_N) \\ \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}'_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{V}_3 - \underline{U}_N}{\underline{Z}} = \underline{Y}(\underline{V}_3 - \underline{U}_N) \end{cases} \quad (9.10)$$

Curentul prin firul de nul este: $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{Y}[(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) - 3\underline{U}_N]$. Cum sistemul tensiunilor de alimentare este simetric, cele trei tensiuni formează în diagrama fazorială o stea simetrică (fig.9.14-b) și $\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 0$. Rămâne că $\underline{I}_0 = -3\underline{Y} \underline{U}_N$ și $\underline{I}_0 = \underline{Y}_N \underline{U}_N \rightarrow \underline{U}_N(3\underline{Y} + \underline{Y}_N) = 0 \rightarrow \underline{U}_N = 0 \rightarrow \underline{I}_0 = 0$.

Punctul de nul N se găsește la potențial zero ca și punctul 0, tensiunea între ele este nulă, dar nu există nici curent prin firul de nul ($\underline{I}_0 = 0$), iar curenții pe cele trei faze formează un sistem simetric:

$$\underline{I}_1 = \underline{Y} \cdot \underline{V}_1; \quad \underline{I}_2 = \underline{Y} \cdot \underline{V}_2 = \underline{Y} a^2 \underline{V}_1 = a^2 \underline{I}_1; \quad \underline{I}_3 = \underline{Y} \cdot \underline{V}_3 = \underline{Y} a \underline{V}_1 = a \underline{I}_1; \quad (9.11)$$

Atunci când sistemul de curenți este simetric, este suficient să-l cunoaștem pe unul dintre ei (de exemplu pe \underline{I}_1), iar ceilalți doi \underline{I}_2 și \underline{I}_3 se obțin din rotirea lui \underline{I}_1 înainte și în urmă cu $\frac{2\pi}{3}$ (fig. 9.14-b). Se spune că astfel de sisteme „se rezolvă pe o singură fază”.

B. Receptor în triunghi

Se consideră cunoscute tensiunile de alimentare $\underline{U}_{12} = \underline{U}$, $\underline{U}_{23} = a^2 \underline{U}$, $\underline{U}_{31} = a \underline{U}$, care formează un sistem simetric de succesiune directă, iar receptorul (fig. 9.15-a) este echilibrat $\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{23} = \underline{Z}_{31} = \underline{Z} = \underline{Z} \angle \varphi$.

Vom determina atât curenții de fază \underline{I}_{12} , \underline{I}_{23} , \underline{I}_{31} cât și curenții prin linia de alimentare \underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3 (curenții de linie). Neavând fir de nul accesibil, nu se pot defini tensiunile pe fază la alimentare: \underline{V}_1 , \underline{V}_2 , \underline{V}_3 , deși au fost și ele reprezentate în diagrama din fig.9.15-b.

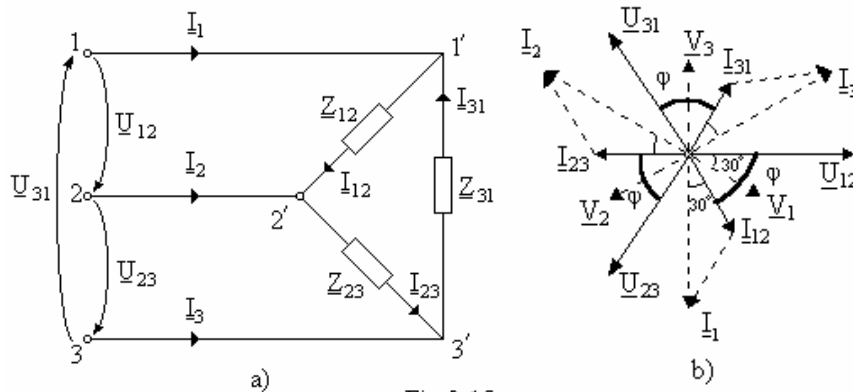


Fig.9.15

Curenții de fază se pot scrie direct, sub forma:

$$\begin{aligned}\underline{I}_{12} &= \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}} \angle -\varphi \\ \underline{I}_{23} &= \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \frac{a^2 \underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = a^2 \underline{I}_{12}; \\ \underline{I}_{31} &= \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \frac{a \underline{U}_{12}}{\underline{Z}} = a \underline{I}_{12}\end{aligned}\quad (9.12)$$

iar curenții de linie rezultă ca mărimi diferență sub forma:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = \underline{I}_{12}(1 - a) = \underline{I}_{12}\sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \angle -\left(\varphi + \frac{\pi}{6}\right) \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = \underline{I}_{23}(1 - a) = \underline{I}_{23}\sqrt{3} \angle -\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \angle -\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi + \frac{\pi}{6}\right) = a^2 \underline{I}_1 \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{12} = \underline{I}_{31}(1 - a) = a \underline{I}_{12}(1 - a) = a \underline{I}_1 \end{cases} \quad (9.13)$$

Ambele sisteme de curenți (9.12) și (9.13) formează un sistem simetric așa cum rezultă din diagrama fazorială (fig.9.15-b). Unghiul între $(\underline{U}_{12}, \underline{I}_{12})$ este același ca între $(\underline{V}_1, \underline{I}_1)$ și egal cu faza φ a receptorului.

C.Puteri în circuite trifazate echilibrate, alimentate simetric

Considerăm un receptor echilibrat alimentat simetric: $\underline{V}_1 = \underline{V} = \underline{V}$; $\underline{V}_2 = a^2 \underline{V}_1$; $\underline{V}_3 = a \underline{V}_1$ și care absoarbe curenți simetrici $\underline{I}_1 = \underline{I} \angle \varphi$; $\underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_1$; $\underline{I}_3 = a \underline{I}_1$.

Puterea complexă totală (pe toate cele trei faze ale sistemului) absorbită de un receptor trifazat se poate scrie sub forma (6.59):

$$\underline{S} = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \underline{I}_3^* \quad (9.14)$$

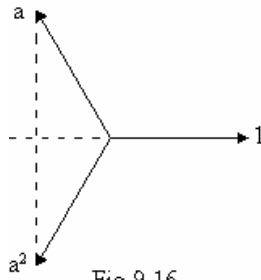


Fig. 9.16

puterea corespunzătoare firului neutru este nulă ($\underline{I}_0=0$).

Curenții complex conjugați sunt:

$\underline{I}_1^* = I / \varphi$; $\underline{I}_2^* = (a^2 \underline{I}_1)^* = a \underline{I}_1^*$; $\underline{I}_3^* = (a \underline{I}_1)^* = a^2 \underline{I}_1^*$, dacă se ține seama că a este așezat simetric față de axa reală cu a^2 (fig. 9.16), deci $(a)^* = a^2$; $(a^2)^* = a$; $(a^3) = 1$.

Atunci puterea complexă absorbită se scrie:

$$\underline{S} = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + (a^2 \underline{V}_1) \cdot (a \underline{I}_1^*) + (a \underline{V}_1) \cdot (a^2 \underline{I}_1^*) = 3 \underline{V}_1 \underline{I}_1^* \quad (9.15)$$

deci nici puterea nu trebuie calculată decât pe o singură fază și se înmulțește rezultatul cu 3. Puterea complexă are componentele:

$$\underline{S} = 3 \underline{V}_1 \underline{I}_1^* = 3VI \angle \varphi = 3VI \cos \varphi + j3VI \sin \varphi = P + jQ \quad (9.16)$$

Puterile activă și reactivă totale absorbite de receptorul trifazat echilibrat sunt:

$$\begin{cases} P = 3VI_f \cos \varphi = \sqrt{3} UI_f \cos \varphi \text{ [W]} \\ Q = 3VI_f \sin \varphi = \sqrt{3} UI_f \sin \varphi \text{ [VAR]} \end{cases} \quad (9.17)$$

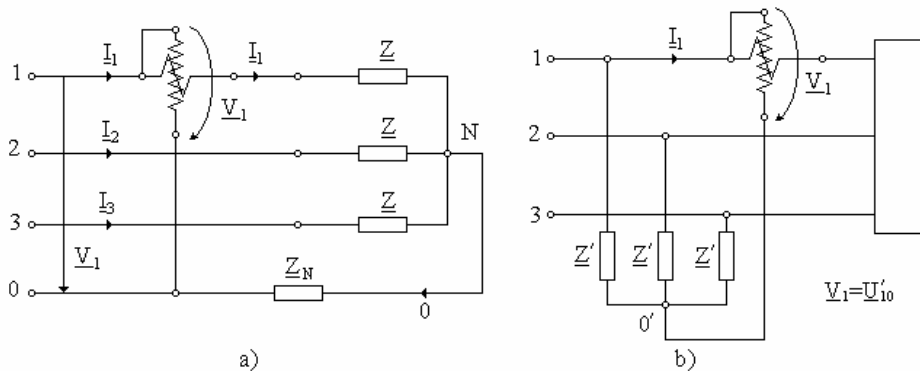


Fig. 9.17

Cea de a doua formă este valabilă atât pentru conexiunea stea ($I_f = I_f$; $U = \sqrt{3} V$) cât și pentru conexiunea triunghi ($I_f = \sqrt{3} I_f$; $U = V$). Conform primei relații din (9.17) puterea activă totală se poate măsura cu un singur wattmetru montat pe una dintre faze ca în fig. 9.17-a și înmulțim indicația sa cu 3.

La receptoare în triunghi sau în stea fără fir de nul, firul neutru nu este accesibil și bobina volt a wattmetrului nu are unde să fie legată. În acest caz se creează un *neutru artificial* – punctul $0'$ – din fig.9.17-b, prin legarea în stea a trei impedanțe identice \underline{Z}' (de obicei 3 capacități identice, pentru a nu avea consum de putere activă pe ele). Tensiunea pe bobina volt va fi: $\underline{U}'_{10} = \underline{V}_1$.

9.3.2 Rezolvarea circuitelor trifazate dezechilibrate, alimentate cu tensiuni simetrice

Dacă neutrul rețelei de alimentare este accesibil, atunci se pot defini tensiunile pe fază la alimentare ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$) măsurate între una dintre faze și firul de nul. Pentru sistemele la care $\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 \neq 0$ se spune că sistemul de tensiuni este nesimetric (nu mai formează o stea simetrică). În cazul sistemului de tensiuni între faze, relația $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$ este îndeplinită întotdeauna, ele formează un triunghi închis în diagrama fazorială, aceste tensiuni de linie nu sunt afectate de dezechilibrul receptorului.

A.Receptor în stea

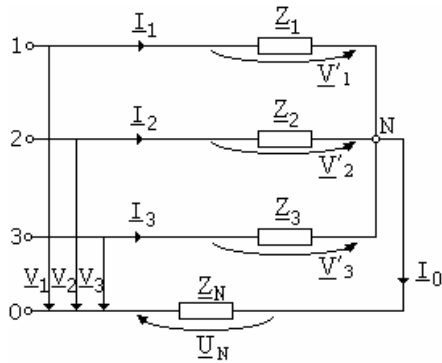


Fig.9.18

Considerăm un receptor trifazat dezechilibrat pentru care se cunosc $\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$ cu conexiune în stea, cu fir neutru (cu neutrul accesibil). Tensiunile pe fază la alimentare sunt: $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ (sistem simetric direct), iar tensiunile pe fază la bornele receptorului sunt: $\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3$.

Cum în circuite trifazate originea de potențial se consideră punctul 0 (nulul rețelei de alimentare), teorema lui Millman (relația 7.28) ne permite să calculăm potențialul punctului (nodului) N în raport cu 0 și cum tensiunea pe nul este: $\underline{U}_{N0} = \underline{V}_N - \underline{V}_0 = \underline{V}_N = \underline{U}_N$, putem scrie:

$$\underline{U}_N = \frac{\sum_{k=1}^3 \underline{Y}_k \underline{V}_k}{\underline{Y}_N + \sum_{k=1}^3 \underline{Y}_k} = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_1 + \underline{Y}_2 \underline{V}_2 + \underline{Y}_3 \underline{V}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N} \quad (9.18)$$

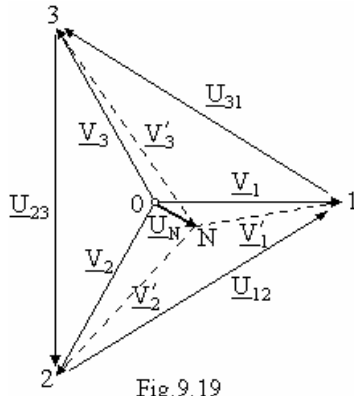


Fig. 9.19

Curenții absorbiți pe cele trei faze sunt:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{V}'_1 = \underline{Y}_1 (\underline{V}_1 - \underline{U}_N) \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{V}'_2 = \underline{Y}_2 (\underline{V}_2 - \underline{U}_N) \\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{V}'_3 = \underline{Y}_3 (\underline{V}_3 - \underline{U}_N) \end{cases} \quad (9.19)$$

În diagrama fazorială din fig. 9.19 sunt reprezentate tensiunile de alimentare $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ definite între fazele 1, 2, 3 și punctul de referință 0, precum și tensiunile la receptor $\underline{V}'_1, \underline{V}'_2, \underline{V}'_3$ definite între bornele receptorului 1, 2, 3 și nulul receptorului, punctul N.

În cazul receptorului dezechilibrat ($\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$) nulul receptorului (punctul N) nu se mai găsește la același potențial cu punctul 0, între ele este tensiunea \underline{U}_N care face ca în diagrama din fig. 9.19 punctul N să fie deplasat față de 0 cu \underline{U}_N . Din acest motiv, tensiunea pe firul de nul \underline{U}_N (sau potențialul punctului N în raport cu referința 0), se mai numește *deplasarea punctului neutru*. Practic, se întâlnesc mai multe situații:

- dacă tensiunile de alimentare formează un sistem simetric, relația (9.18) devine:

$$\underline{U}_N = \underline{V} \frac{\underline{Y}_1 + a^2 \underline{Y}_2 + a \underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3 + \underline{Y}_N} \quad (9.20)$$

- dacă nu există fir neutru ($\underline{Z}_N = \infty, \underline{Y}_N = 0$) atunci:

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_1 + \underline{Y}_2 \underline{V}_2 + \underline{Y}_3 \underline{V}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad (9.21)$$

și deplasarea neutrului \underline{U}_N este mai mare. Punctul N se poate deplasa oriunde în interiorul triunghiului din fig. 9.19, în funcție de dezechilibrul receptorului. Deplasarea maximă este din 0 până în vârful triunghiului (de exemplu vârful 1), ceea ce înseamnă scurtcircuit pe faza 1 a receptorului când: $\underline{U}_N = \underline{V}_1$, iar $\underline{V}'_2 = -\underline{U}_{12}$, $\underline{V}'_3 = -\underline{U}_{31}$, $\underline{V}'_1 = 0$. Pe fazele sănătoase (2 și 3) se observă că va crește tensiunea de $\sqrt{3}$ ori ($\underline{V}'_3 = \underline{U}_{31} = \sqrt{3} \underline{V}_3$) care va atrage, posibil, să cadă și aceste două faze, alături de faza 1.

- dacă firul de nul nu are impedanță $\underline{Z}_N=0$, $\underline{Y}_N=\infty$ (numit *nul direct*), atunci $\underline{U}_N=0$, deci punctul N nu se va deplasa din 0 indiferent cât este dezechilibrul receptorului și $\underline{V}'_1 = \underline{V}_1$; $\underline{V}'_2 = \underline{V}_2$; $\underline{V}'_3 = \underline{V}_3$, tensiunile la receptor rămân un sistem simetric, dar curenții nu sunt simetrici. Acest caz este realizat de receptori trifazați care provin din grupuri de consumatori monofazați (de ex. consumatori casnici, grupați pe cele trei faze). În acest caz, orice s-ar întâmpla cu receptorul, trebuie menținut nulul direct ($\underline{Z}_N=0$), deci nu se pune siguranță fuzibilă pe firul de nul, pentru ca tensiunile \underline{V}'_1 , \underline{V}'_2 , \underline{V}'_3 să se mențină toate la 220V.
- dacă punctul neutru nu-i accesibil, se poate admite referință oricare dintre faze (de ex. faza 2):

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{U}_{12} \\ \underline{V}_2 = 0 \\ \underline{V}_3 = \underline{U}_{32} = -\underline{U}_{23} \end{cases} \rightarrow \underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_1 \underline{U}_{12} - \underline{Y}_3 \underline{U}_{23}}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} \quad (9.22)$$

B.Receptor în triunghi

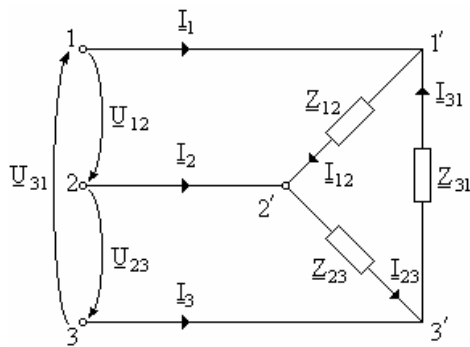


Fig. 9.20

Receptorul dezechilibrat ($\underline{Z}_{12} \neq \underline{Z}_{23} \neq \underline{Z}_{31}$) este conectat în triunghi ca în fig.9.20 și alimentat cu tensiunile simetrice pentru care se pot defini: $\underline{U}_{12}=U$; $\underline{U}_{23}=a^2 \underline{U}_{12}$; $\underline{U}_{31}=a \underline{U}_{12}$.

Curenții de fază sunt de forma:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}; \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}; \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}; \quad (9.23)$$

și nu mai formează între ei un sistem

simetric. Curenții de linie sunt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{23}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}; \quad (9.24)$$

Observație: Un receptor dezechilibrat cu conexiune stea ($\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$) și alimentat simetric va absorbi un sistem simetric de curenți dacă $\underline{Z}_1 + a \underline{Z}_2 + a^2 \underline{Z}_3 = 0$, însă tensiunile la receptor \underline{V}'_1 , \underline{V}'_2 , \underline{V}'_3 rămân tot nesimetrice. Un receptor trifazat dezechilibrat cu conexiune în triunghi ($\underline{Y}_{12} \neq \underline{Y}_{23} \neq \underline{Y}_{31}$) alimentat simetric va absorbi de la rețea un sistem de curenți (\underline{I}_1 , \underline{I}_2 , \underline{I}_3) simetrici dacă $\underline{Y}_{12} + a \underline{Y}_{23} + a^2 \underline{Y}_{31} = 0$, însă curenții de fază tot nesimetrice rămân.

C. Puteri electrice în sisteme dezechilibrate alimentate simetric

Într-un circuit trifazat dezechilibrat cu fir neutru (multipol cu 4 poli), puterea complexă totală absorbită pe la borne (de forma 6.59) se scrie pentru cele 3 porți sub forma:

$$\underline{S} = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \underline{I}_3^* + \underline{U}_N (-\underline{I}_0)^* = \underline{U}_{10} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{20} \underline{I}_2^* + \underline{U}_{30} \underline{I}_3^* \quad (9.25)$$

Puterile activă și reactivă totale se scriu prin separarea părților reale și imaginare în expresia (9.25):

$$\begin{cases} P = U_{10} I_1 \cos \varphi_1 + U_{20} I_2 \cos \varphi_2 + U_{30} I_3 \cos \varphi_3 \\ Q = U_{10} I_1 \sin \varphi_1 + U_{20} I_2 \sin \varphi_2 + U_{30} I_3 \sin \varphi_3 \end{cases} \quad (9.26)$$

fiecare termen din aceste sume nu are semnificație (nu este „localizabil“), doar suma are semnificația puterii totale absorbite prin toate cele trei faze.

Puterea activă din (9.26) se poate măsura prin „metoda celor trei wattmetre“ montate astfel ca fiecare să măsoare unul dintre termenii sumei (fig.9.21-a), iar puterea activă totală va fi suma indicațiilor celor trei wattmetre. Analog montând 3 varmetre în locul celor 3 wattmetre se poate măsura Q.

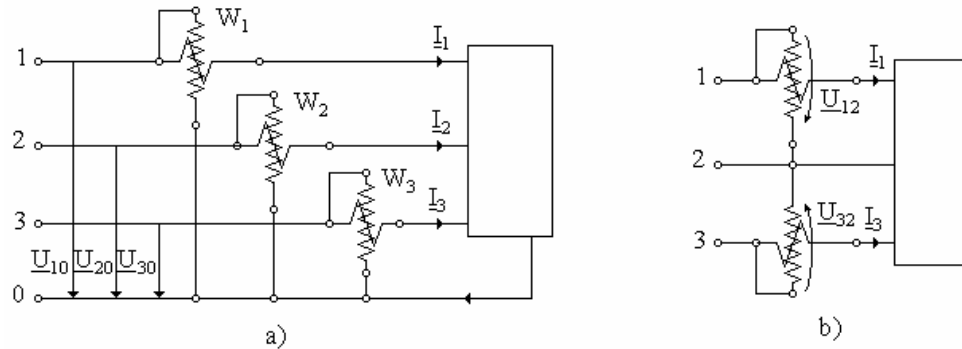


Fig. 9.21

Dacă lipsește firul neutru, atunci $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \rightarrow \underline{I}_2 = -(\underline{I}_1 + \underline{I}_3)$. Puterea totală absorbită se exprimă astfel:

$$\underline{S} = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \underline{I}_3^* = (\underline{V}_1 - \underline{V}_2) \underline{I}_1^* + (\underline{V}_3 - \underline{V}_2) \underline{I}_3^* = \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \underline{I}_3^* \quad (9.27)$$

Separând părțile reală și imaginară se obțin puterile activă și reactivă totale:

$$\begin{cases} P = U_{12} I_1 \cos \varphi(\underline{U}_{12}, \underline{I}_1) + U_{32} I_3 \cos \varphi(\underline{U}_{32}, \underline{I}_3) \\ Q = U_{12} I_1 \sin \varphi(\underline{U}_{12}, \underline{I}_1) + U_{32} I_3 \sin \varphi(\underline{U}_{32}, \underline{I}_3) \end{cases} \quad (9.28)$$

În acest caz puterea activă care apare în relația 9.28 ca suma a doi termeni respectiv puterea P se va măsura prin „metoda celor două wattmetre” montate conform relației (9.28), așa cum indică figura 9.21-b. Cu două varmetre montate analog se poate măsura puterea Q pentru receptori dezechilibrați fără fir neutru.

9.3.3 Rezolvare circuitelor trifazate echilibrate, alimentate cu tensiuni nesimetrice

Un sistem de tensiuni trifazate nesimetrice ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$) se poate descompune după trei coordonate (homopolar, direct și invers) în trei sisteme simetrice componente. Dacă \underline{V}_h este *componenta homopolară* (componenta lui \underline{V}_1 după coordonata h); \underline{V}_d este *componenta directă* (componenta lui \underline{V}_1 după coordonata d) și \underline{V}_i este *componenta inversă* (componenta lui \underline{V}_1 după coordonata i), atunci cele trei tensiuni vor avea componentele scrise astfel:

$$\begin{cases} \underline{V}_1 = \underline{V}_h + \underline{V}_d + \underline{V}_i \\ \underline{V}_2 = \underline{V}_h + a^2 \underline{V}_d + a \underline{V}_i \\ \underline{V}_3 = \underline{V}_h + a \underline{V}_d + a^2 \underline{V}_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}}_{[T]} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_h \\ \underline{V}_d \\ \underline{V}_i \end{bmatrix} \quad (9.29)$$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ h & d & i \end{matrix}$

Dacă este dat sistemul nesimetric ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$), *componentele simetrice* ($\underline{V}_h, \underline{V}_d, \underline{V}_i$) sunt legate de primele prin *matricea de transformare* $[T]$ a sistemului de coordonate (1, 2, 3) în (h, d, i) și pentru care: $|T| = j3\sqrt{3}$. Această descompunere (9.29) este cunoscută și sub numele de *teorema lui Fortesque*. Exprimarea inversă (deducerea componentelor simetrice ale unui sistem dat) se scrie astfel:

$$\begin{cases} \underline{V}_h = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3) \\ \underline{V}_d = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a \underline{V}_2 + a^2 \underline{V}_3) \\ \underline{V}_i = \frac{1}{3}(\underline{V}_1 + a^2 \underline{V}_2 + a \underline{V}_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{V}_h \\ \underline{V}_d \\ \underline{V}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{V}_1 \\ \underline{V}_2 \\ \underline{V}_3 \end{bmatrix} \quad (9.30)$$

Atunci când $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ se cunosc grafic (în diagrama fazorială din figura 9.22) componentele simetrice ($\underline{V}_h, \underline{V}_d, \underline{V}_i$) se pot deduce tot grafic, făcând compunerile conform (9.30).

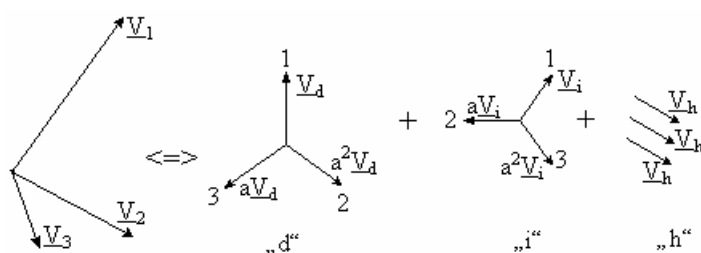


Fig.9.22

Observație: indiferent de tipul sistemului simetric component (d sau i), cei trei faze ai săi se rotesc tot în sens trigonometric cu viteza unghiulară ω și tot așa se măsoară și unghiurile, numai modul cum se succed fazele în acest sens diferă: el este 1 – 2 – 3 la sistemul direct (d) și 1 – 3 – 2 la sistemul invers (i), ca în fig.9.22.

Algoritmul rezolvării circuitului trifazat pe baza metodei de descompunere a unui sistem nesimetric în componente simetrice se poate rezuma astfel:

- se descompune sistemul nesimetric de tensiuni ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$) în componentele sale simetrice ($\underline{V}_h, \underline{V}_d, \underline{V}_i$) care presupunem că se aplică pe rând la bornele receptorului.
- se calculează componentele simetrice ale curenților absorbiți ($\underline{I}_h, \underline{I}_d, \underline{I}_i$).
- se compun ($\underline{I}_h, \underline{I}_d, \underline{I}_i$) sub forma (9.29) și se obțin curenții ($\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$).

Fiecare dintre subcircuitul „d”, „i” și „h”, în care am descompus circuitul inițial (fig.9.23), este un receptor echilibrat alimentat cu tensiuni simetrice (însă de diferite succesiuni).

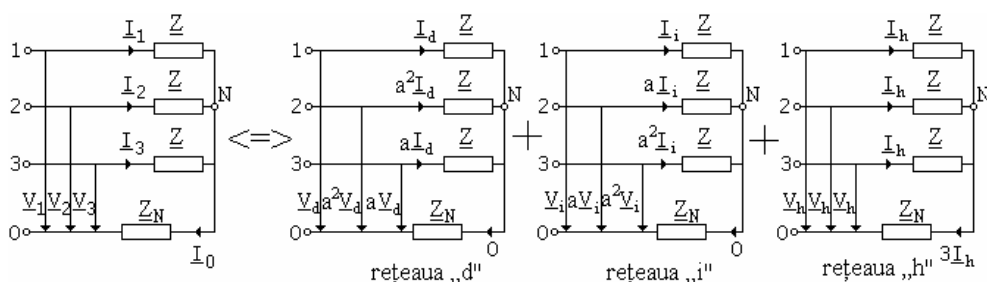


Fig.9.23

Astfel de circuite se rezolvă pe o singură fază (faza 1), respectiv:

$$\underline{I}_d = \frac{\underline{V}_d}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_i = \frac{\underline{V}_i}{\underline{Z}}; \quad \underline{I}_h = \frac{\underline{V}_h}{\underline{Z} + 3\underline{Z}_h} \quad (9.31)$$

Curenții reali pe cele trei faze se obțin pe baza relațiilor (9.29):

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_h + \underline{I}_d + \underline{I}_i \\ \underline{I}_2 = \underline{I}_h + a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i \\ \underline{I}_3 = \underline{I}_h + a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i \end{cases} \quad (9.32)$$

9.3.4. Rezolvarea circuitelor trifazate dezechilibrate, alimentate nesimetric

Tensiunile nesimetrice de alimentare ($\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$) le descompunem în componentele lor simetrice ($\underline{V}_h, \underline{V}_d, \underline{V}_i$) pe baza relațiilor (9.30). Atunci și impedanțele dezechilibrate ($\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$) să le descompunem în „componentele lor simetrice“, niște impedanțe fictive, de calcul, sub forma:

$$\begin{cases} \underline{Z}_h = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3) \\ \underline{Z}_d = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a\underline{Z}_2 + a^2\underline{Z}_3) \\ \underline{Z}_i = \frac{1}{3}(\underline{Z}_1 + a^2\underline{Z}_2 + a\underline{Z}_3) \end{cases} \quad (9.33)$$

Pentru receptoare trifazate *statice* (linii trifazate, transformatoare, receptoare pasive (iluminat, încălzit etc.)) componentele simetrice $\underline{Z}_d = \underline{Z}_i$, iar pentru receptoare *dinamice*, cu părți rotative (motoare, generatoare), $\underline{Z}_d = \underline{Z}_s$ este impedanța sincronă (cea opusă trecerii curenților direcți), iar $\underline{Z}_i = \underline{Z}_a$ este impedanța asincronă (cea opusă trecerii curenților inverși).

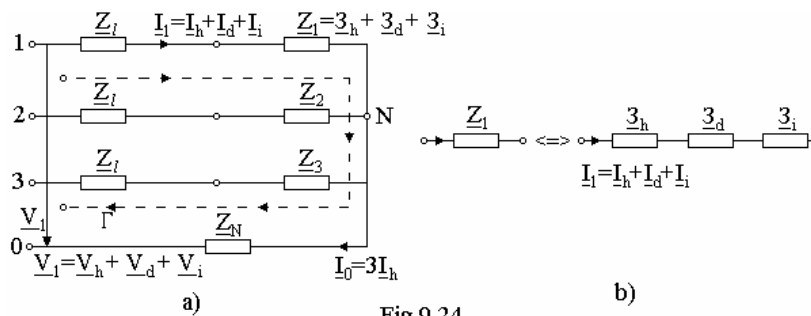


Fig. 9.24

Receptorul dezechilibrat ($\underline{Z}_1 \neq \underline{Z}_2 \neq \underline{Z}_3$) l-am descompus în „componentele sale simetrice“ ($\underline{Z}_h, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$) conform (9.33), iar relația $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_h + \underline{Z}_d + \underline{Z}_i$ o interpretăm că \underline{Z}_1 este formată din cele trei impedanțe în serie, ca în fig.9.24-b. Linia de alimentare are impedanța fizică \underline{Z}_l , iar firul neutru are impedanța \underline{Z}_N (acestea două nu sunt „componente simetrice“, ci sunt impedanțe fizice, reale).

La trecerea unei componente a curentului printr-o „componentă“ a lui \underline{Z} se va produce o cădere de tensiune de o anumită secvență. Sistemul *direct* este de *secvență (1)*, cel *invers* este de *secvență (2)*, iar cel *homopolar* este de *secvență (0) sau (3)*. Regula de înmulțire a secvențelor este de forma:

$$\begin{cases} h \cdot h = 0 + 0 = 0 = h \\ h \cdot d = 0 + 1 = 1 = d \\ h \cdot i = 0 + 2 = 2 = i \end{cases} \quad \begin{cases} d \cdot d = 1 + 1 = 2 = i \\ i \cdot i = 2 + 2 = 4 = 0 + 1 = d \\ d \cdot i = 1 + 2 = 3 = h \end{cases} \quad (9.34)$$

În fig.9.24 considerăm ochiul Γ format din faza (1) și firul de nul. La bornele sale se aplică tensiunea \underline{V}_1 , dar noi vom considera că nu o aplicăm toată, ci aplicăm pe rând componentele sale $\underline{V}_h, \underline{V}_d, \underline{V}_i$ și calculăm efectul cu teorema superpoziției. Când aplicăm componenta \underline{V}_h aceasta va fi egală cu suma căderilor homopolare de tensiune din ochiul Γ , la fel pentru \underline{V}_d și \underline{V}_i , sub forma:

$$\begin{cases} \underline{V}_h = (\underline{Z}_l + \underline{Z}_h + 3\underline{Z}_N) \underline{I}_h + \underline{Z}_i \underline{I}_d + \underline{Z}_d \underline{I}_i \\ \underline{V}_d = \underline{Z}_d \underline{I}_h + (\underline{Z}_l + \underline{Z}_h) \underline{I}_d + \underline{Z}_i \underline{I}_i \\ \underline{V}_i = \underline{Z}_i \underline{I}_h + \underline{Z}_d \underline{I}_d + (\underline{Z}_l + \underline{Z}_h) \underline{I}_i \end{cases} \quad (9.35)$$

Se rezolvă sistemul (9.35) și se determină $\underline{I}_h, \underline{I}_d, \underline{I}_i$, iar apoi curenții absorbiți vor fi de forma (9.32.).

Puterile absorbite de un receptor dezechilibrat, alimentat nesimetric

Puterea complexă totală absorbită se scrie sub forma:

$$\underline{S} = \underline{V}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \cdot \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \cdot \underline{I}_3^* \quad (9.36)$$

Dacă înlocuim mărimile reale prin componentele lor simetrice se obține succesiv expresia puterii scrisă în funcție de componentele simetrice sub forma:

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= (\underline{V}_h + \underline{V}_d + \underline{V}_i) \underline{I}_1^* + (\underline{V}_h + a^2 \underline{V}_d + a \underline{V}_i) \underline{I}_2^* + (\underline{V}_h + a \underline{V}_d + a^2 \underline{V}_i) \underline{I}_3^* = \\
&= \underline{V}_h \underbrace{(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3)^*}_{3\underline{I}_h^*} + \underline{V}_d \underbrace{(\underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + a^2 \underline{I}_3)^*}_{3\underline{I}_d^*} + \underline{V}_i \underbrace{(\underline{I}_1 + a^2 \underline{I}_2 + a \underline{I}_3)^*}_{3\underline{I}_i^*} = \quad (9.37) \\
&= 3\underline{V}_h \underline{I}_h^* + 3\underline{V}_d \underline{I}_d^* + 3\underline{V}_i \underline{I}_i^*
\end{aligned}$$

Fiecare termen din (9.37) reprezintă puterea absorbită în una dintre rețelele (h), (d) și (i), care fiind simetrice se evaluează pe o singură fază.

Puterile activă și reactivă totale absorbite sunt de forma:

$$\begin{cases} P = 3V_h I_h \cos \varphi_h + 3V_d I_d \cos \varphi_d + 3V_i I_i \cos \varphi_i \\ Q = 3V_h I_h \sin \varphi_h + 3V_d I_d \sin \varphi_d + 3V_i I_i \sin \varphi_i \end{cases} \quad (9.38)$$

Observație: Relația dintre două sisteme simetrice de aceeași succesiune se reduce la relația dintre *fazorii principali* ai celor două sisteme.

Dacă la mărimile de fază fazorul principal este \underline{V}_1 , iar la mărimile între faze este \underline{U}_{12} , atunci la sisteme directe (fig.9.25), respectiv la sisteme inverse (fig.9.26), relația între fazorii principali este :

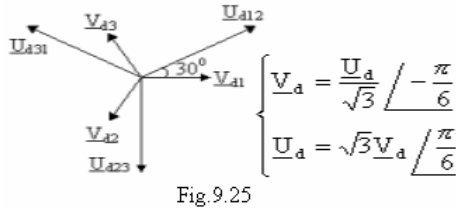


Fig. 9.25

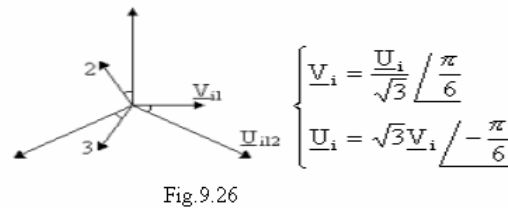


Fig. 9.26

În alte situații fazorii principali ai celor două sisteme sunt \underline{V}_1 și \underline{U}_{23} .

În acest caz, legătura dintre componentele simetrice pe fază și pe linie este:

$$\begin{cases} \underline{V}_d = j \frac{\underline{U}_d}{\sqrt{3}} \leftrightarrow \underline{U}_d = -j\sqrt{3} \underline{V}_d \\ \underline{V}_i = -j \frac{\underline{U}_i}{\sqrt{3}} \leftrightarrow \underline{U}_i = j\sqrt{3} \underline{V}_i \end{cases} \quad (9.39)$$

9.4. Aplicații

1. Un sistem simetric de tensiuni având tensiunea pe fază $V=200V(f=50Hz)$ alimentează un receptor echilibrat în stea $\underline{Z}=(30+j40)\Omega$. Să se determine curenții și puterile absorbite, valoarea capacităților C_{Δ} care compensează puterea reactivă a receptorului (fig.9.27).

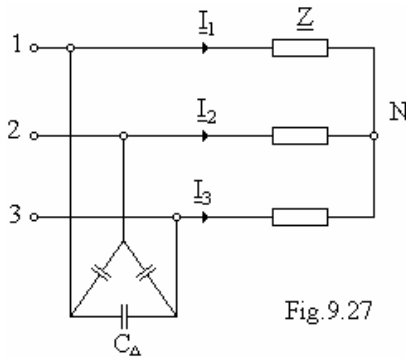


Fig.9.27

Receptorul este echilibrat cu

$$\underline{Z} = 30 + j40 = 50/\underline{53}^0 \Omega.$$

Curentul absorbit pe faza(1)este:

$$I_1 = \frac{V_1}{Z} = \frac{200}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{50} = \frac{4}{\sqrt{3}} = 2,31 \text{ A}; \quad I_2 = a^2 I_1; \quad I_3 = a I_1;$$

Puterea activă absorbită și consumată se scrie sub forma:

$$\begin{cases} P = 3V_1 I_1 \cos \varphi = \sqrt{3}UI \cos \varphi = \sqrt{3} \cdot 200 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 0,6 = 480 \text{ W} \\ P_C = 3RI^2 = 3 \cdot 30 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 480 \text{ W} \end{cases}$$

Puterea reactivă absorbită și consumată este:

$$\begin{cases} Q = 3V_1 I_1 \sin \varphi = \sqrt{3}UI \sin \varphi = \sqrt{3} \cdot 200 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 0,8 = 640 \text{ VAR} \\ Q_C = 3XI^2 = 3 \cdot 40 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 = 640 \text{ VAR} \end{cases}$$

Puterea reactivă produsă de cele trei condensatoare legate în triunghi va acoperi puterea reactivă consumată de receptor:

$$Q' = 3X_C I_C^2 = 3X_C \left(\frac{U}{X_C}\right)^2 = 3\omega C_{\Delta} U^2 = Q_C \rightarrow C_{\Delta} = \frac{Q_C}{3\omega U^2} = \frac{640}{3 \cdot 314 \cdot 200^2} = 17 \mu F$$

Dacă s-ar fi montat în stea cele trei condensatoare valoarea C_Y era de forma:

$$Q' = 3X_C I_C^2 = 3X_C \left(\frac{U/\sqrt{3}}{X_C}\right)^2 = \omega C_Y U^2 = Q_C \rightarrow C_Y = \frac{Q_C}{\omega U^2} = 51 \mu F = 3C_{\Delta}$$

2. Trei impedanțe de valoare $\underline{Z}=(3+j4)\Omega$ pot fi cuplate în stea sau triunghi și alimentate cu tensiuni simetrice 380/220 V. Să se determine curenții și puterile absorbite de cele două conexiuni.

• *Stea:*

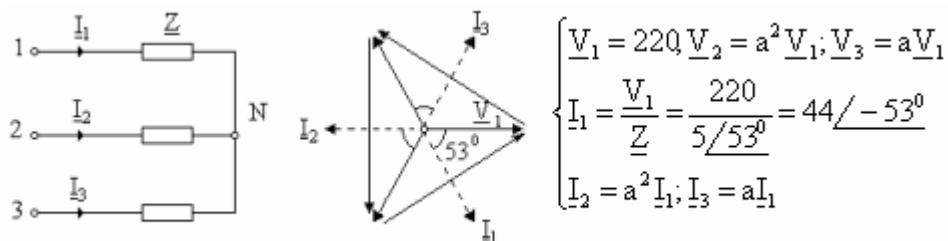


Fig.9.28

$$P = 3RI^2 = 3 \cdot 3 \cdot (44)^2 = 17,4 \text{ kW}; Q = 3XI^2 = 23,1 \text{ kVAR}; S = 3ZI^2 = 29 \text{ kVA}$$

• *Triunghi:*

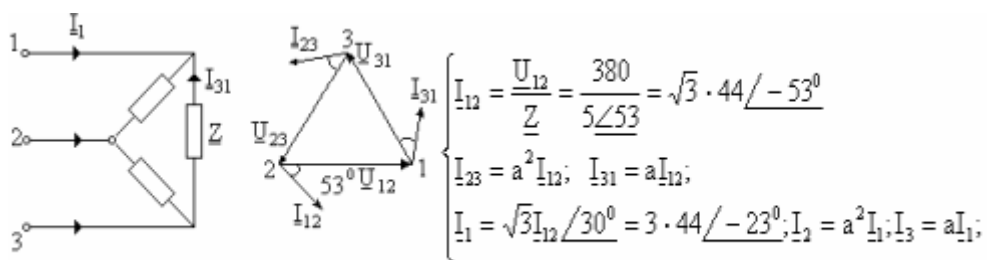


Fig.9.29

$$P' = 3RI_f^2 = 3 \cdot 3 \cdot (\sqrt{3} \cdot 44)^2 = 3 \cdot 17,4 \text{ kW}; Q = 3 \cdot 23,1 \text{ kVAR}$$

La conexiunea în triunghi, tensiunile pe \underline{Z} și curenții prin \underline{Z} cresc de $\sqrt{3}$ ori, iar curenții de linie și puterile cresc de 3 ori.

3. Un receptor ca în fig.9.25 cu $X_L = X_C = 10\Omega$ este alimentat cu un sistem simetric având $U=200V$. Să se determine curenții și puterile absorbite.

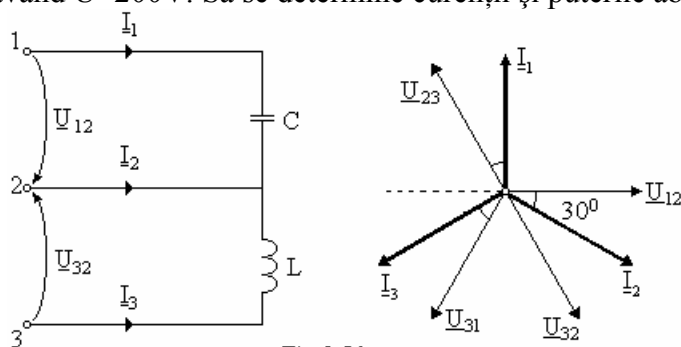


Fig.9.30

Curenții absorbiți sunt:

$$I_1 = \frac{U_{12}}{-jX_C} = \frac{200}{-j10} = j20, I_3 = \frac{U_{32}}{jX_L} = \frac{200 \angle -\frac{\pi}{3}}{j10} = 20 \angle -\frac{5\pi}{6}$$

$$I_2 = -(I_1 + I_3) = -\left(j20 + 20 \angle -\frac{\pi}{6}\right) = 20 \angle -\frac{\pi}{6}$$

Curenții sunt reprezentați în fig.9.25 și formează un sistem simetric deși receptorul este dezechilibrat.

$$\underline{S} = \underline{U}_{12} \underline{I}_1^* + \underline{U}_{32} \underline{I}_3^* = 200(-j20) + 200 \angle -\frac{\pi}{3} \cdot 20 \angle \frac{5\pi}{6} = -j4000 + j4000 = 0$$

Condensatorul furnizează bobinei puterea reactivă (4 kVAR) de care are nevoie și pe la borne nu se absoarbe putere reactivă.

4. Circuitul din fig.9.26 cu $R=11\Omega$; $X_1=11\sqrt{3}\Omega$; $X_2=\frac{44}{\sqrt{3}}\Omega$ este alimentat cu tensiuni simetrice 380/220 V. Se cer curenții și puterile absorbite.

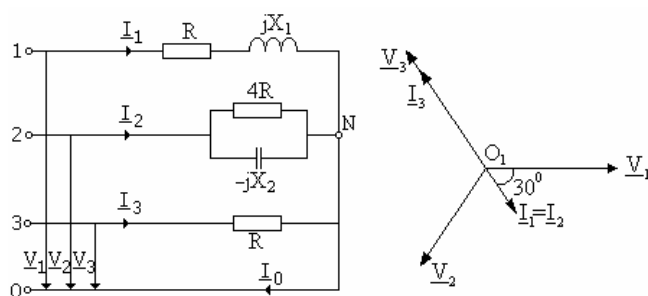


Fig.9.31

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{R} + j\underline{X}_1} = \frac{220}{11(1 + j\sqrt{3})} = 5(1 - j\sqrt{3}) = 10 \angle -\frac{\pi}{6}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{V}_2 = \left(\frac{1}{44} - j\frac{\sqrt{3}}{44} \right) a^2 \underline{V}_1 = 5(1 - j\sqrt{3}) = 10 \angle -\frac{\pi}{6}$$

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{R}} = \frac{a\underline{V}_1}{\underline{R}} = \frac{220 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{11} = -10(1 - j\sqrt{3}) = 20 \angle \frac{2\pi}{3}$$

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

Deși există nul direct, curentul prin el este zero. Puterea absorbită este:

$$\underline{S} = \underline{V}_1 \underline{I}_1^* + \underline{V}_2 \underline{I}_2^* + \underline{V}_3 \underline{I}_3^* = 220 \cdot 10 \angle \frac{\pi}{6} + a^2 \cdot 220 \cdot 10 \angle \frac{\pi}{6} + a \cdot 220 \cdot 20 \angle \frac{2\pi}{3} = 6600 + j0$$

Nu se absoarbe putere reactivă deoarece schimbul de putere între X_2 și X_1 este perfect.

$$Q_{\text{cons}} = X_1 I_1^2 - \frac{V_2^2}{X_2} = 11\sqrt{3} \cdot 10^2 - \frac{220^2}{44/\sqrt{3}} = 0$$

5. Un receptor echilibrat ($\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z} = 10 + j10$) cu conexiune în stea este alimentat cu un sistem nesimetric de tensiuni (fig.9.32)

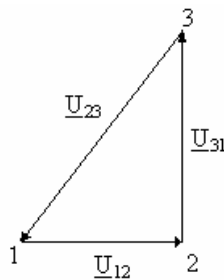


Fig.9.32

$$\underline{U}_{12} = 100\sqrt{2} \text{ V};$$

$$\underline{U}_{23} = 200 \angle -\frac{3\pi}{4} \text{ V}; \quad \underline{U}_{31} = j100\sqrt{2} \text{ V}$$

Să se determine curenții și puterile absorbite.

Componentele simetrice ale sistemului de tensiuni de alimentare au valorile:

$$\begin{cases} \underline{U}_d = \frac{1}{3}(\underline{U}_{12} + a \cdot \underline{U}_{23} + a^2 \underline{U}_{31}) = 152 - j41 \\ \underline{U}_1 = \frac{1}{3}(\underline{U}_{12} + a^2 \cdot \underline{U}_{23} + a \underline{U}_{31}) = -11 + j41 \\ \underline{U}_h = \frac{1}{3}(\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31}) = 0 \end{cases}$$

Componentele simetrice ale receptorului (conform cu 9.33) sunt:

$$\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = 0; \quad \underline{Z}_h = 10 + j10 \, \Omega$$

Scriind ecuațiile de tensiuni pe componente simetrice, de forma 9.35, obținem

$$\begin{cases} \underline{U}_d = \underline{Z}_h \underline{I}_d + \underline{Z}_i \underline{I}_i \\ \underline{U}_i = \underline{Z}_d \underline{I}_d + \underline{Z}_h \underline{I}_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \underline{I}_d = 5,57 + j3,22 = 6,43 / 33^\circ \\ \underline{I}_i = 1,5 - j0,86 = 1,73 / -33^\circ \end{cases}$$

Curenții reali absorbiți pe cele trei faze sunt:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_d + \underline{I}_i = 7,07 - j2,36 = 7,45 / 20^\circ \\ \underline{I}_2 = a^2 \underline{I}_d + a \underline{I}_i = 6,43 / -87^\circ + 1,73 / 87^\circ \\ \underline{I}_3 = a \underline{I}_d + a^2 \underline{I}_i = 6,43 / 153^\circ + 1,73 / -153^\circ \end{cases}$$

Puterea complexă absorbită pe la borne este:

$$\underline{S} = 3 \underline{U}_d \underline{I}_d^* + 3 \underline{U}_i \underline{I}_i^* = 1999(1 - j) \text{ VA}$$

6. Receptorul din fig.9.33 este alimentat simetric cu tensiunile 380/220V și are valorile:

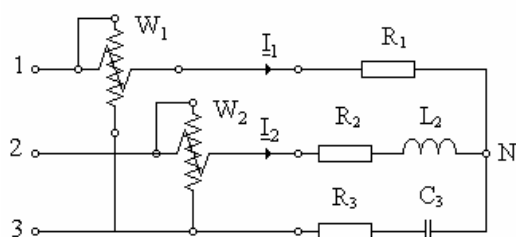


Fig.9.33

$$\begin{cases} \underline{Z}_1 = 5 \, \Omega \\ \underline{Z}_2 = (4 + j3) = 5 / 37^\circ \, \Omega \\ \underline{Z}_3 = (4 - j3) = 5 / -37^\circ \, \Omega \end{cases}$$

Să se determine curenții absorbiți, indicația celor două wattmetre și să se verifice bilanțul puterilor.

Tensiunile pe fază sunt: $\underline{V}_1 = 220 \text{ V}$; $\underline{V}_2 = 220 / -120^\circ$; $\underline{V}_3 = 220 / 120^\circ$

Admitanțele receptorului au valorile:

$$\begin{aligned}\underline{Y}_1 &= \frac{1}{5} = 0,2 \, \Omega^{-1}, \\ \underline{Y}_2 &= \frac{1}{4 + j3} = 0,2 \angle -37^\circ = 0,16 - j0,12, \\ \underline{Y}_3 &= \frac{1}{4 - j3} = 0,2 \angle 37^\circ = 0,16 + j0,12;\end{aligned}$$

Deplasarea neutrului are valoarea (conform relației 9.18):

$$\underline{U}_N = \frac{\underline{Y}_1 \underline{V}_1 + \underline{Y}_2 \underline{V}_2 + \underline{Y}_3 \underline{V}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = 220 \cdot 0,2 \frac{1 + 1 \angle -157^\circ + 1 \angle 157^\circ}{0,2 + 0,16 + j0,12 + 0,16 - j0,12} = -71 \, \text{V}$$

iar în diagrama fazorială din fig.9.34 punctul N s-a deplasat din 0 cu (-71 V). Tensiunile pe bază la receptor sunt:

$$\begin{cases} \underline{V}'_1 = \underline{V}_1 - \underline{U}_N = 291 \, \text{V} \\ \underline{V}'_2 = \underline{V}_2 - \underline{U}_N = (-39 - j190) = 194,5 \angle -101^\circ \\ \underline{V}'_3 = \underline{V}_3 - \underline{U}_N = (-39 + j190) = 194,5 \angle 101^\circ \end{cases}$$

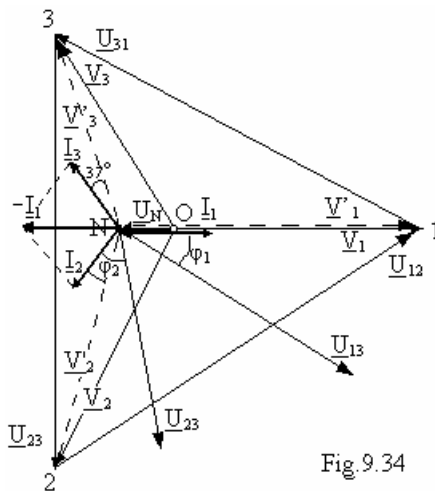


Fig. 9.34

Curenții absorbiți pe cele trei faze sunt:

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{V}_1' = 58,2 \text{ A} \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{V}_2' = 38,9 \angle -138^\circ \text{ A} \\ \underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{V}_3' = 38,9 \angle 138^\circ \text{ A} \end{cases}$$

Cele două wattmetre indică valorile ($\varphi_1=30^\circ$; $\varphi_2=48^\circ$):

$$\begin{cases} P_1 = U_{13} I_1 \cos \varphi(\underline{U}_{13}, \underline{I}_1) = 380 \cdot 58,2 \cdot \cos 30^\circ = 19,15 \text{ kW} \\ P_2 = U_{23} I_2 \cos \varphi(\underline{U}_{23}, \underline{I}_2) = 380 \cdot 38,9 \cdot \cos 48^\circ = 9,89 \text{ kW} \end{cases}$$

Puterea absorbită de circuit (și măsurată prin metoda celor 2 wattmetre) are valoarea:

$$P = P_1 + P_2 = 29,04 \text{ kW};$$

Iar puterea consumată este:

$$P_{\text{cons}} = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 = 5 \cdot 58,2^2 + 2 \cdot 4 \cdot 38,9^2 = 29,04 \text{ kW}$$

Prin componente simetrice, problema se rezolvă astfel:

$$\underline{I}_d = \frac{1}{3} (\underline{I}_1 + a \underline{I}_2 + a^2 \underline{I}_3) = \frac{1}{3} (58,2 + 38,9 \angle -138^\circ + 38,9 \angle 138^\circ) = 44 \text{ A}$$

Nu există fir neutru, deci $\underline{I}_h=0$. Sistemul tensiunilor de alimentare este simetric de succesiune directă, deci: $\underline{V}_d=220 \text{ V}$; $\underline{V}_i=\underline{V}_h=0$.

Atunci puterea activă consumată se scrie sub forma:

$$\begin{aligned} P &= 3V_h I_h \cos \varphi_h + 3V_d I_d \cos \varphi_d + 3V_i I_i \cos \varphi_i = \\ &= 3V_d I_d \cos \varphi_d = 3 \cdot 220 \cdot 44 = 29,04 \text{ kW} \end{aligned}$$